LEONHARDI EULERI
OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM
HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

FERDINAND RUDIO
ADOLF KRAZER PAUL STÄCKEL

SERIES PRIMA
OPERA MATHEMATICA
VOLUMEN SEXTUM



LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXXI

LEONHARDI EULERI

COMMENTATIONES ALGEBRAICAE

AD THEORIAM AEQUATIONUM PERTINENTES

EDIDERUNT

FERDINAND RUDIO

ADOLF KRAZER PAUL STÄCKEL



LIPSIAE ET BEROLINI

TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI

MCMXXI

VORWORT

Unter mancherlei Schicksalsfügungen ist der vorliegende Band I_6 unserer Eulerausgabe zustande gekommen. Ursprünglich war seine Bearbeitung von HEINRICH WEBER übernommen worden, der 1911 EULERS *Vollständige Anleitung zur Algebra* mit den Zusätzen von LAGRANGE herausgegeben und damit das große Unternehmen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in glückverheißendem Sinne inauguriert hatte. Aber schon 1913, am 17. Mai, starb WEBER, bevor er noch mit der neuen Arbeit hatte beginnen können. Und dann kam der Krieg und legte lähmend seine Faust auch auf unser Werk.

Zu gänzlicher Untätigkeit freilich wurden weder Redaktion noch Druckerei gezwungen, und so gelang es immerhin, in den Jahren 1914—1917 den bisher erschienenen zehn Bänden weitere vier, nämlich die Bände I_2, I_3, I_{13} und I_{17}, hinzuzufügen oder doch ihre Drucklegung dem Abschlusse nahe zu bringen. Aber erst 1916 war das Redaktionskomitee in der Lage, seine Aufmerksamkeit auch den algebraischen Abhandlungen EULERS wieder zuzuwenden. Auf meine Bitte erklärte sich STÄCKEL bereit, mit mir zusammen den durch WEBERS Tod verwaisten Band der *Commentationes algebraicae ad theoriam aequationum pertinentes*[1]) zu übernehmen. Wir teilten die Arbeit unter uns so, daß mir die erste Hälfte zufiel, die mit der Abhandlung 30 des ENESTRÖMSCHEN *Verzeichnisses der Schriften* LEONHARD EULERS beginnt und mit der Abhandlung 395 abschließt, während STÄCKEL die zweite Hälfte, nämlich die Abhandlungen 406—819, übernahm. Übrigens war diese Teilung eine rein äußerliche und mehr durch den Geschäftsgang bedingte, denn jeder von uns hat sich auch mit der Abteilung des andern, nicht nur bei der Korrektur, eingehend beschäftigt, und wir beide wiederum wurden in unserer Arbeit durch den ganzen Band hindurch in wirksamer und dankenswerter Weise von KRAZER unterstützt.

Entgegen dem ursprünglichen Einteilungsplane, wie er im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **19**, 1910, Zweite Abt., p. 104, abgedruckt ist,

1) Der zweite Band der *Commentationes algebraicae*, der sich auf Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherungswesen bezieht, wird als Band I_7 von DU PASQUIER herausgegeben.

sind in den vorliegenden Band I_6 noch die Abhandlungen 395 *De inventione quotcumque mediarum proportionalium citra radicum extractionem* und 532 *De serie* LAMBERTINA *plurimisque eius insignibus proprietatibus* aufgenommen worden, die zuerst den Bänden I_3 und I_{15} zugedacht waren, die aber wegen ihrer engen Beziehungen zur Theorie der algebraischen Gleichungen besser unter die *Commentationes algebraicae* einzuordnen sind.[1])

Der Satz unseres Bandes I_6 begann 1917, die Arbeit schritt aber, den Zeitverhältnissen entsprechend, nur sehr langsam vorwärts und wurde oft durch Pausen ganz unterbrochen. So kam es, daß im Herbst 1919 zwar die Fahnenkorrektur zum größeren Teil, die Bogenkorrektur aber kaum zu einem Drittel besorgt war. Da traf unser Unternehmen der schwerste Schlag. Noch am 19. Oktober hatte mir STÄCKEL in einem längeren Briefe allerlei Vorschläge unterbreitet, die sich auf Anmerkungen zu den Abhandlungen 407 und 450 bezogen. Nichts ließ ahnen, daß dies sein letzter Brief sein sollte. Nach einer für unseren Verkehr ungewöhnlich langen und beunruhigenden Pause erhielt ich Anfang Dezember die Mitteilung, er sei schwer erkrankt, und schon wenige Tage darauf folgte die Trauerbotschaft, daß er am 12. Dezember seinen Leiden erlegen sei.

Zwölf Jahre lang hat sich STÄCKEL mit begeisterter Hingebung und größter Energie der Eulerausgabe gewidmet. Seine ungewöhnliche Vertrautheit mit der mathematischen Literatur, seine Begabung und sein feiner Sinn für historische Forschung ließen ihn gerade für so weit ausschauende Unternehmungen als besonders berufen erscheinen. Nicht nur die von ihm speziell herausgegebene *Mechanica* und die vorliegenden *Commentationes algebraicae*, die ganze Eulerausgabe atmet STÄCKELSCHEN Geist und ist ein Denkmal seines Wirkens. Es muß einer besonderen Arbeit vorbehalten bleiben, darzulegen, was die Eulerausgabe STÄCKEL verdankt.

Wenn nun trotz diesem schweren Verluste die Drucklegung unseres Bandes I_6 verhältnismäßig rasch zu Ende geführt werden konnte, so war das nur dadurch möglich, daß sich gleich nach STÄCKELS Tode KRAZER mit freundlicher Bereitwilligkeit zur Verfügung stellte und für den verstorbenen Kollegen eintrat. Es ist mir ein Bedürfnis, ihm hierfür auch öffentlich aufs herzlichste zu danken.

Es möge nun eine kurze Übersicht[2]) über den Inhalt des vorliegenden Bandes folgen.

Der Band wird eröffnet durch die Abhandlung 30 *De formis radicum aequationum cuiusque ordinis coniectatio*, die EULER nach den Akten schon am 2. November 1733 der

1) Siehe hierzu auch das Vorwort zum Bande I_3, p. VII.

2) Diese Übersicht ist von KRAZER und mir gemeinsam verfaßt.

Petersburger Akademie vorgelegt hatte, die aber erst 1738 gedruckt wurde.[1]) Euler entwickelt zunächst die nach ihm benannten Methoden der Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades und zeigt, daß die Auflösung wesentlich in der Herstellung einer gewissen Gleichung nächst niedrigeren Grades besteht, deren Wurzeln zu den Wurzeln der gegebenen Gleichung führen. Entsprechendes gilt auch schon für die quadratischen Gleichungen. Für diese auflösenden Hilfsgleichungen führt Euler den Namen *Resolventen* ein, eine Bezeichnung, die sich bald allgemein einbürgerte.[2]) Durchdrungen von der Bedeutung dieses Begriffes ließ sich nun Euler zu der Vermutung verleiten, daß es auch für die Gleichungen höheren Grades solche Resolventen gebe, derart also, daß für die Gleichung

$$x^n = ax^{n-2} + bx^{n-3} + cx^{n-4} + \text{etc.}$$

stets eine Gleichung der Form

$$z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3} + \gamma z^{n-4} - \text{etc.}$$

existiere, aus deren $n-1$ Wurzeln A, B, C, D etc. sich die Wurzel x der gegebenen Gleichung darstellen lasse in der Gestalt

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} + \text{etc.}$$

Euler hat nicht nur in der vorliegenden Abhandlung, sondern auch in mehreren der folgenden, die den algebraischen Gleichungen gewidmet sind, diese seine *Coniectatio*[3]) zu stützen gesucht. Wie ein roter Faden zieht sich die Mutmaßung durch seine Arbeiten hindurch. Bekanntlich hat erst Abel (1802—1829) nachgewiesen, daß sie für allgemeine Gleichungen von höherem als dem vierten Grade unrichtig ist, aber zugleich auch, daß sie für auflösbare irreduzible Gleichungen von Primzahlgrad in vollem Umfange zutrifft.

---

1) Eine deutsche Übersetzung findet sich in der Sammlung algebraischer Abhandlungen von Euler und Lagrange, die J. A. Chr. Michelsen (1749—1797) unter dem Nebentitel *Die Theorie der Gleichungen*, Berlin 1791, seiner Übersetzung von Eulers *Introductio in analysin infinitorum* als „Drittes Buch" hat folgen lassen. Mit der *Introductio* hat diese Sammlung freilich nicht viel zu tun.

2) Die Einführung des Begriffes *Resolvente,* als eines fundamentalen, rührt also durchaus von Euler her. Bedient, bei der Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen, hat man sich natürlich schon von jeher solcher Resolventen, aber erst Euler hat ihre grundsätzliche Bedeutung betont.

3) Zur Vorgeschichte dieser *Coniectatio*, namentlich bei Tschirnhaus (1651—1708) und Leibniz (1647—1716), siehe Eneström, Biblioth. Mathem. 13_3, 1912—1913, p. 345—346. Danach war schon Leibniz „fest überzeugt, daß die Wurzel einer Gleichung 5. Grades die Form

$$x = \sqrt[5]{a_1} + \sqrt[5]{a_2} + \sqrt[5]{a_3} + \sqrt[5]{a_4}$$

haben muß, wo a_1, a_2, a_3, a_4 als Wurzeln von Gleichungen 4. Grades betrachtet werden können".

EULER gibt selbst zu, daß es ihm noch nicht gelungen sei, für $n > 4$ allgemein die Resolvente herzustellen, er weist aber darauf hin, daß es unter den bisher untersuchten Gleichungen höheren Grades nicht an Belegen für die Richtigkeit seiner Mutmaßung fehle. Insbesondere waren es gewisse von MOIVRE[1]) aufgelöste Gleichungen, die ihm dazu dienten. Dabei wird er auf Gleichungen geführt, die ihre Form nicht ändern, wenn man die Unbekannte durch ihren reziproken Wert ersetzt. Solche Gleichungen nennt EULER *reziproke* Gleichungen. Auch diese Bezeichnung, die seitdem dauernd in den mathematischen Sprachschatz übergegangen ist, geht auf EULER zurück, während freilich derartige Gleichungen selbst auch schon vor EULER vorkamen.[2])

Mit der Abhandlung 30 hängt aufs engste zusammen die 1764 gedruckte Abhandlung 282 *De resolutione aequationum cuiusvis gradus,* die EULER nach den Akten am 15. Oktober 1759 der Petersburger Akademie vorgelegt hatte.[3]) Eine Abhandlung mit dem Titel *Resolutio aequationum cuiusvis generis* war nach C. G. J. JACOBI schon am 3. Mai 1753 in der Berliner Akademie gelesen worden. EULER geht in der Abhandlung 282 wieder von seiner Mutmaßung über die Form der Wurzeln einer beliebigen Gleichung aus, findet nun aber, daß in dieser Form die Wurzeln noch nicht mit genügender Unterscheidung zum Ausdruck gelangen. In der früheren Form

$$x = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \sqrt[n]{\delta} + \text{etc.}$$

müsse wegen der Vieldeutigkeit der einzelnen Glieder eine genauere Ordnung eingerichtet

---

1) Siehe die Anmerkung 1 p. 8 des vorliegenden Bandes.

2) Insbesondere bei MOIVRE. In seiner für die Wahrscheinlichkeitsrechnung bedeutsamen Abhandlung *De mensura sortis,* Philosophical Transactions (London) **27**, 1711, numb. 329, p. 213, treten bei der Berechnung der Gewinnaussichten beim Spiel wiederholt Gleichungen auf, die wir jetzt, seit EULER, *reziproke* nennen, und MOIVRE unterläßt auch nicht, ausdrücklich auf die Eigenart dieser Gleichungen hinzuweisen; so namentlich in dem Corollarium zu Problema 23, p. 260. Und in seinen *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis,* Londini 1730, beginnt das 4. Kapitel des 3. Buches gleich mit einem Hinweis auf jene Gleichungen, auf die er in seiner *Mensura sortis* gestoßen sei. Gerade auf dieses Kapitel bezieht sich der Schluß der Anmerkung 1 p. 82 des vorliegenden Bandes. Siehe auch MOIVRES Werk *The doctrine of chances,* London 1718, 3. Ausg. 1756, Probl. LXII, p. 201—202.

3) Das Summarium der Abhandlung 282 findet sich wörtlich abgedruckt in den Nova acta eruditorum 1765, p. 248—250. Weitere Bemerkungen sind dort nicht hinzugefügt.

Auch von der Abhandlung 282 findet sich eine deutsche Übersetzung in der p. IX zitierten Sammlung von MICHELSEN. Schon vorher, 1785, war von FR. v. SCHAFFGOTSCH (1743—1809) eine deutsche Übersetzung in den Abhandlungen der böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften **1**, Prag 1785, p. 180—207, veröffentlicht worden, versehen mit einer Einleitung, p. 177—180, und mit Anmerkungen, p. 207—236.

werden, damit sich unter Benutzung der Einheitswurzeln die richtigen Kombinationen ergeben und ungeeignete ausgeschlossen werden. So wie sich nun die n Wurzeln der Einheit als die aufeinanderfolgenden Potenzen einer jeden von ihnen darstellen lassen, so seien höchstwahrscheinlich auch die einzelnen Radikale der Form eingerichtet, die für die Wurzel x gilt. Demgemäß behauptet EULER, daß sich die Wurzel x der allgemeinen Gleichung

$$x^n + \Delta x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + Cx^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

stets ausdrücken lasse in der Form[1])

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \cdots + \mathfrak{Q}\sqrt[n]{v^{n-1}}.$$

Die andern $n-1$ Wurzeln ergeben sich dann aus der einen, indem man der Reihe nach $\sqrt[n]{v}$ durch $\mathfrak{a}\sqrt[n]{v}$, $\mathfrak{b}\sqrt[n]{v}$, $\mathfrak{c}\sqrt[n]{v}$ etc. ersetzt, wo 1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ etc. die n^{ten} Einheitswurzeln sind.

EULER erprobt nun die Kraft dieser neuen Wurzelform, indem er sie auf die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades anwendet und ihre Gültigkeit nachweist. Für die Gleichung fünften Grades gelingt es ihm freilich nicht, die Rechnung allgemein durchzuführen. Er sieht sich daher veranlaßt, sich auf spezielle Fälle zu beschränken. So gelangt er zu den algebraisch auflösbaren Gleichungen

$$x^5 = 5Px^2 + 5Qx + \frac{Q^2}{P} + \frac{P^3}{Q}$$

und

$$x^5 = 5Px^3 - 5P^2x + D,$$

von denen die zweite leicht in eine schon von MOIVRE[2]) aufgelöste übergeführt werden kann. Zuletzt zeigt EULER, wie man aus der allgemeinen Form unendlich viele algebraisch auflösbare Gleichungen fünften Grades gewinnen könne, indem er für die Koeffizienten A, B, C, D der Gleichung

$$x^5 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

gewisse aus fünf Hilfsgrößen rational zusammengesetzte Ausdrücke einführt.[3])

1) Gerade von dieser Form ist 1824 ABEL bei seinem berühmten Beweise von der Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der Gleichungen fünften und höheren Grades ausgegangen. Die EULERSCHE Wurzelform gibt bereits der zuerst von KRONECKER erwiesenen Tatsache Ausdruck, daß die Resolvente $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der auflösbaren irreduziblen Gleichung n^{ten} Grades eine zyklische Gleichung ist. Siehe L. KRONECKER, *Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen*, Monatsberichte d. preuß. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1853, p. 365, und 1856, p. 203. Siehe auch J. PIERPONT, *Zur Geschichte der Gleichung des V. Grades,* Monatshefte für Math. u. Phys. 6, 1895, p. 15, wo speziell die Seiten 20—23 den Bemühungen EULERS gelten.

2) Siehe die Anmerkung 1 p. 8 des vorliegenden Bandes.

3) Leider ist in dieser letzten Untersuchung das Original durch Fehler, die nur zum Teil als Druckfehler anzusehen sind, arg entstellt und leider sind diese Fehler auch in die Übersetzungen

An die Abhandlung 282, insbesondere an die Untersuchungen der von MOIVRE und von EULER selbst behandelten auflösbaren Gleichungen fünften Grades, schließt sich die Abhandlung 644 so unmittelbar an, daß sie fast als Fortsetzung von jener bezeichnet werden kann. Sie ist betitelt *Innumerae aequationum formae ex omnibus ordinibus, quarum resolutio exhiberi potest,* und wurde am 6. Mai 1776 der Petersburger Akademie vorgelegt, aber erst 1790 veröffentlicht. EULER stellt darin algebraisch auflösbare Gleichungen beliebigen Grades auf folgendem Wege her, der übrigens schon vor ihm zu dem gleichen Zwecke von BÉZOUT[1]) beschritten worden war.

Da aus

$$x = \frac{b\sqrt[n]{\frac{a}{b}} - a}{1 - \sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$$

sofort

$$b(a + x)^n - a(b + x)^n = 0$$

folgt, so besitzt umgekehrt diese Gleichung n^{ten} Grades jene n Werte x als Wurzeln, die aus der vorletzten Gleichung hervorgehen, wenn für $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ die n verschiedenen Werte gesetzt werden.

Auf diese Weise erhält aber EULER nicht nur unzählige algebraisch auflösbare Gleichungen beliebigen Grades, sondern es stellt sich auch, wenn man x in der Form

$$x = \sqrt[n]{a^{n-1}b} + \sqrt[n]{a^{n-2}b^2} + \cdots + \sqrt[n]{ab^{n-1}}$$

schreibt, die Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades wieder in jener Gestalt dar, die EULER in den Abhandlungen 30 und 282 als die allgemein gültige vermutet hat, und die Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades mit den Wurzeln

$$a^{n-1}b, \quad a^{n-2}b^2, \ \ldots \ ab^{n-1}$$

---

von SCHAFFGOTSCH und MICHELSEN übergegangen. In unserer Ausgabe dürfte die Darstellung einwandfrei sein, denn unabhängig vom Herausgeber und unabhängig voneinander haben die Herren Dr. H. BRANDT, Karlsruhe, und Dr. J. WILDHABER, Zürich, denen auch hier für ihre Mitarbeit bestens gedankt sei, die Rechnungen durchgeführt und die Korrekturen geprüft. Eine weitere Bestätigung haben diese aber nachträglich auch durch die (noch nicht veröffentlichte) Abhandlung des Herrn Dr. S. BREUER, *Beiträge zum ABELSCHEN Gleichungsproblem* (Habilitationsschrift Karlsruhe, 1921) gefunden, in der eine Herleitung der EULERSCHEN Formeln gegeben ist, von der vermutet werden darf, daß sie der von EULER selbst benutzten mindestens nahekommt.

1) E. BÉZOUT (1730—1783), *Sur plusieurs classes d'équations de tous les degrés, qui admettent une solution algébrique,* Mém. de l'acad. d. sc. de Paris (1762), 1764, p. 17.

ist die zu der gegebenen Gleichung n^{ten} Grades gehörige EULERSCHE Resolvente $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades.[1])

Die Abhandlung 153 *Demonstratio gemina theorematis* NEUTONIANI, *quo traditur relatio inter coefficientes cuiusvis aequationis algebraicae et summas potestatum radicum eiusdem* ist im 2. Bande der *Opuscula varii argumenti* EULERS enthalten, der im Jahre 1750 erschien. Eine Abhandlung mit demselben Titel wurde aber nach C. G. J. JACOBI schon am 12. Januar 1747 in der Berliner Akademie gelesen. Es ist nicht überflüssig auf diese Zeitdifferenz ausdrücklich hinzuweisen, da sich daraus ergibt, daß EULER beispielsweise von MAC LAURINS *Algebra* (1748) keine Kenntnis haben konnte, als er die Abhandlung 153 verfaßte. EULER hat für die NEWTONSCHEN Formeln, die richtiger GIRARDSCHE Formeln heißen sollten, zwei ganz verschiedene Beweise gegeben. Bei dem ersten bedient er sich logarithmischer Differentiation und darauf folgender Reihenentwicklung und Koeffizientenvergleichung, während der zweite, dem er selbst den Vorzug gibt, rein algebraisch und ganz elementar ist. In seinen Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen hat KRONECKER nie unterlassen, auf diesen zweiten EULERSCHEN Beweis, als einen besonders scharfsinnigen und eleganten, ausdrücklich aufmerksam zu machen. Der Beweis beruht auf der folgenden einfachen Überlegung. Bezeichnet n den Grad der vorgelegten Gleichung, so kann man die Summe der r^{ten} Wurzelpotenzen, also $\int \alpha^r$, für $r = n$ fast ohne Rechnung hinschreiben und erhält so eine erste GIRARDSCHE Formel. Sukzessive Multiplikationen der Gleichung mit x, x^2, x^3 etc. liefern dann sofort auch die entsprechenden GIRARDSCHEN Formeln für $r > n$. Ist aber $r < n$, so bildet EULER — und das ist sein genialer Griff — aus der gegebenen Gleichung unter Beibehaltung der Koeffizienten Gleichungen niedrigeren Grades, die dann aber, eben wegen der Übereinstimmung der Koeffizienten, Potenzsummen für die Wurzeln liefern, die den entsprechenden der gegebenen Gleichung gleich sind.[2]) Für jede dieser Gleichungen r^{ten} Grades ($r = 1, 2, \ldots n-1$) erhält man jetzt auf Grund des zu Anfang erledigten ersten Falles je eine GIRARDSCHE Formel, und diese $n-1$ Formeln gelten dann auch für die ursprüngliche Gleichung.[3])

---

1) In neuester Zeit hat K. WÄISÄLÄ in der Dissertation *Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen fünften Grades*, Helsingfors 1916, eine sehr übersichtliche Darstellung einiger von EULER weggelassener Rechnungen und eine Behandlung der von EULER untersuchten Spezialfälle gegeben. Ferner hat S. BREUER in der bereits erwähnten Habilitationsschrift das gegenseitige Verhältnis der drei EULERSCHEN Abhandlungen 30, 282 und 644 zueinander und ihre Stellung in der heutigen Theorie der algebraischen Gleichungen eingehend erörtert.

2) In der Editio princeps ist offenbar in der ersten Zeile des § 14 ein „quod" ausgefallen. In unserer Ausgabe würde also p. 29 besser stehen: In quibus autem aequationibus [quod] non solum ... ibi quoque ... est eadem.

3) Zu diesem Beweise bemerkt M. CANTOR in seinen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **3**, 2. Aufl., Leipzig 1901, p. 605: „EULERS zweiter Beweis ähnelt sehr demjenigen, welchen

Für die weitere Ausbildung und Verwertung der GIRARDSCHEN Formeln ist namentlich auf die Abhandlung 406 zu verweisen, über die wir aber lieber im Zusammenhang mit anderen Untersuchungen berichten wollen.

Die Abhandlung 157 *De extractione radicum ex quantitatibus irrationalibus* ist von EULER nach den Akten am 5. Dezember 1740 der Petersburger Akademie vorgelegt worden. Im Druck erschien sie aber erst 1751. EULER entwickelt darin, zunächst im Anschlusse an NEWTONS *Arithmetica universalis*, Methoden der Wurzelausziehung aus Binomen $A \pm B$, wo A rational, B aber mit einer Quadratwurzel behaftet ist. Die von NEWTON gegebenen Regeln werden sodann, unter Ausdehnung auf höhere Wurzeln, verallgemeinert und verbessert. Ein bestimmtes Beispiel war für EULER wegleitend gewesen. Er wußte, daß die fünfte Wurzel aus $5\sqrt{5}+11$ gleich $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}$ sei, NEWTONS Regel aber führte zu dem unrichtigen Werte $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{12}}{\sqrt[10]{8}}$. EULER setzt die gesuchte n^{te} Wurzel aus $A \pm B$, wo A^2 und B^2 ganze rationale Zahlen sein sollen, zunächst in der Form

$$\frac{x \pm y}{\sqrt[2n]{p}}$$

voraus, um aus dieser dann die Form

$$\frac{\sqrt{2r+s+t} \pm \sqrt{s+t-2r}}{2\sqrt[2n]{p}}$$

abzuleiten, wo p, r, s, t rational sind. Obwohl diese Methode auf Binome, in denen

---

wir bei unserer Besprechung von MAC LAURINS *Algebra* zu erwähnen hatten. Wir lassen dahingestellt, ob EULER von jenem Werke Kenntnis besaß". Das letztere ist durch die bereits hervorgehobene Zeitdifferenz ausgeschlossen, denn MAC LAURINS Werk *A treatise of algebra* wurde zu London im Jahre 1748, zwei Jahre nach MAC LAURINS Tode, herausgegeben. Der dort p. 286—296 (s. auch p. 142—143) entwickelte Beweis (s. hierzu die Bemerkung von ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 13_3, 1912—1913, p. 174) ähnelt aber nur in dem sehr einfachen ersten Falle $r \gtreqless n$ dem EULERSCHEN, während er für den schwierigeren zweiten Fall $r < n$ davon gänzlich verschieden ist und auch nicht das geringste mit dem originellen Beweise EULERS gemein hat.

Es sei bei diesem Anlasse gestattet, zu den Anmerkungen p. 20—22 unseres Bandes noch einige Ergänzungen hinzuzufügen. BAERMANNS Abhandlung ist unter dem Titel *Demonstratio theorematis de potentiis radicum etc.* als achter Zusatz auch abgedruckt in den *Additamenta,* die J. DE CASTILLON seiner im Jahre 1761 in Amsterdam erschienenen Ausgabe von NEWTONS *Arithmetica universalis* beigefügt hat. Die vorhergehenden *Additamenta,* darunter auch die p. 8 und 57 unseres Bandes erwähnten Abhandlungen von MOIVRE und COLSON finden sich auch schon in der Ausgabe von G. J. 's GRAVESANDE. Von seinem eigenen Beweise der GIRARDSCHEN Formeln sagt CASTILLON p. 77 des zweiten Bandes seiner Ausgabe, daß er ihn schon 1749 BAERMANN mitgeteilt habe.

sich imaginäre Größen befinden, zunächst nicht anwendbar ist — ein Mangel, der in noch höherem Maße der NEWTONSCHEN Regel anhaftet —, so gelingt es EULER doch, mit Hilfe der schon früher von ihm benutzten MOIVRESCHEN Gleichungen auch diese Schwierigkeit zu überwinden.

Bisher hatten sich die Wurzelausziehungen nur auf solche irrationale Größen beschränkt, die in der Binomialform $A \pm B$ enthalten waren. Die Verallgemeinerung dieser Untersuchungen, die zugleich die wahre Quelle der mitgeteilten Methoden aufdeckt, führt nun zu der Aufgabe, aus einer irgendwie gegebenen Irrationalität eine Wurzel beliebigen Grades auszuziehen. Wird die gegebene Irrationalität x als Wurzel der algebraischen Gleichung

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{etc.} = 0$$

vorausgesetzt, so führt die Forderung, eine Größe y so zu bestimmen, daß $y = \sqrt[n]{x}$ oder $x = y^n$ sei, zu der Gleichung

$$y^{mn} + ay^{mn-n} + by^{mn-2n} + cy^{mn-3n} + \text{etc.} = 0.$$

Die Aufgabe, in dieser Allgemeinheit gestellt, kommt also auf die Auflösung gewisser algebraischer Gleichungen hinaus. EULER führt dies nun für spezielle Fälle durch, indem er die Irrationalität x durch Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades definiert. Dadurch wurde er veranlaßt, sich mit den binomischen Gleichungen $x^n - 1 = 0$ zu beschäftigen und die Einheitswurzeln der ersten zehn Grade algebraisch darzustellen, wobei die Lösung der Gleichung $x^7 - 1 = 0$ besondere Schwierigkeiten bot.

Wir kommen zu der großen Abhandlung 170 *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, die 1751 im Druck erschien. Eine Abhandlung mit dem Titel *Theoremata de radicibus aequationum imaginariis* war nach C. G. J. JACOBI am 10. November 1746 der Berliner Akademie vorgelegt worden. Man kann die Abhandlung 170, rein äußerlich genommen, in drei Teile zerlegen. Im ersten Teile, der bis § 20 reicht, entwickelt EULER die Vorbereitungen und beschäftigt sich darin besonders mit gewissen biquadratischen Gleichungen, wie

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$$

oder allgemeiner

$$x^4 + ax^3 + (b + 2)x^2 + ax + 1 = 0,$$

von denen er zeigt, daß sich ihre linken Seiten in reelle Faktoren zweiten Grades zerlegen lassen, obwohl ihre Wurzeln (für $a^2 < 4b$) alle imaginär sind.[1])

---

1) Im vierten Bande der von ENESTRÖM so genannten *Notizbücher* EULERS (s. ENESTRÖM, *Bericht an die Eulerkommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft über die* EULER-

Den größten und wichtigsten Teil der Abhandlung 170 füllt EULERS berühmter Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Von diesem hatte einst FROBENIUS[1]) gesagt: „Für die Existenz der Wurzeln einer Gleichung führt er jenen am meisten algebraischen Beweis, der darauf fußt, daß jede reelle Gleichung unpaaren Grades eine reelle Wurzel besitzt. Ich halte es für unrecht, diesen Beweis ausschließlich GAUSS zuzuschreiben, der doch nur die letzte Feile daran gelegt hat.“ Bekanntlich hat GAUSS selber Einwendungen gegen EULERS Beweis erhoben und zwar in seiner Doktordissertation vom Jahre 1799, deren erster Teil sich mit der Geschichte des Fundamentalsatzes beschäftigt. Das Redaktionskomitee hat geglaubt, dem Leser durch Abdruck dieses ersten Teiles einen Dienst zu erweisen und ihm die Vergleichung zu erleichtern. Indem wir auf diesen Abdruck hinweisen, können wir von einer weiteren Besprechung des EULERSCHEN Beweises absehen.

SCHEN *Manuskripte der Petersburger Akademie,* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **22**, 1913, Zweite Abt., p. 191) findet sich p. 357 folgender Eintrag:

„Cum dixissem omnem formulam rationalem in factores reales vel simplices vel quadratos resolvi posse Celeb. NIC. BERNOULLI contra opponit hanc formulam $x^4 - 4x^3 + 2xx + 4x + 4$, cuius factores trinomiales reales assignari posse negat: ecquod simplices imaginarii sint

$$x - 1 - \sqrt{2 + \sqrt{-3}}$$
$$x - 1 + \sqrt{2 + \sqrt{-3}}$$
$$x - 1 - \sqrt{2 - \sqrt{-3}}$$
$$x - 1 + \sqrt{2 - \sqrt{-3}},$$

at vero sunt hi duo factores reales

$$xx - (2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}})x + 1 + \sqrt{7} + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}$$
$$xx - (2 - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}})x + 1 + \sqrt{7} - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}.$$

Quorum productum est

$$x^4 - 4x^3 + 2xx + 4x + 4.\text{“}$$

Nach ENESTRÖM begann das Eintragen der Notizen in den vierten Band vielleicht im Jahre 1740. Der hier vorliegende Eintrag, betreffend den Einwand BERNOULLIS, dürfte mit Sicherheit im Jahre 1742 erfolgt sein, entsprechend dem Datum des ersten der beiden Briefe BERNOULLIS an EULER, die in der Anmerkung 1 p. 82 des vorliegenden Bandes erwähnt sind. Reichlich vier Jahre später legte EULER der Berliner Akademie die Abhandlung 170 vor, die aber erst 1751 gedruckt wurde. Die in der Anmerkung 1 p. 82 ausgesprochene Vermutung, daß sich EULER in seinem Gedächtnis geirrt habe, als er die Gleichung $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$ einem andern zusprach, wird aber auch noch durch die Verallgemeinerung $x^4 + ax^3 + (b + 2)x^2 + ax + 1 = 0$ gestützt, die er selber jener ersten Gleichung hinzufügte.

1) *Festakt der Universität Basel zur Feier des zweihundertsten Geburtstages* LEONHARD EULERS, Basel 1907, p. 15.

Den Schluß der Abhandlung bildet der ausführliche Nachweis, daß alle imaginären Größen, wie sie auch beschaffen seien, stets auf die Form $M + N\sqrt{-1}$ zurückgeführt werden können, wo M und N reelle Größen sind. Alle Operationen, sowohl alle algebraischen als auch alle bekannten transzendenten, auf imaginäre Größen angewandt, ergeben immer wieder Größen derselben Form.[1])

Wie die Abhandlung 170, so ist auch die Abhandlung 310 *Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations* in den Berliner Memoiren abgedruckt. Sie ist darin 1766 erschienen; eine Abhandlung mit ungefähr demselben Titel war aber nach C. G. J. JACOBI schon am 10. Februar 1752 der Berliner Akademie vorgelegt worden. Im wesentlichen hatte übrigens EULER seine *Nouvelle méthode*, die wir heute als EULERSCHE Eliminationsmethode bezeichnen und die unter diesem Namen in alle Lehrbücher übergegangen ist, bereits 1748 in seiner *Introductio*[2]) dargelegt.

Die Abhandlung 370 *Nova criteria radices aequationum imaginarias dignoscendi,* 1769 im Druck erschienen, ist nach den Akten am 6. Juli 1767 der Petersburger Akademie eingereicht worden.[3]) EULER knüpft darin zunächst an NEWTONS *Arithmetica universalis* an und fügt den beiden dort entwickelten Kriterien ein drittes hinzu. Sind nämlich die Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

alle reell, so gilt dasselbe auch von den beiden hieraus nach einfachem Bildungsgesetze abgeleiteten Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$nx^{n-1} + (n-1)ax^{n-2} + (n-2)bx^{n-3} + (n-3)cx^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

und

$$ax^{n-1} + 2bx^{n-2} + 3cx^{n-3} + 4dx^{n-4} + \text{etc.} = 0.$$

In gleicher Weise ergeben sich dann aus diesen beiden Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades drei vom Grade $n-2$, hieraus vier vom Grade $n-3$ usw. So gelangt man schließlich zu quadratischen Gleichungen, deren Wurzeln alle reell sein müssen, wenn die Wurzeln der gegebenen Gleichung alle reell waren. Damit hat man notwendige, aber freilich nicht hinreichende Kriterien gewonnen. Da es aber zu umständlich wäre, diese Graderniedrigungen

1) Bei der Kontrolle und der Vervollständigung der numerischen Rechnungen, die in den Paragraphen 91 und 97 enthalten sind, hat wieder in dankenswerter Weise Dr. J. WILDHABER mitgewirkt.

2) L. EULER, *Introductio in analysin infinitorum,* Lausannae 1748, t. II cap. XIX, p. 483—485; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 9.

3) Das Summarium der Abhandlung 370 findet sich wörtlich abgedruckt in den Nova acta eruditorum 1770, p. 294—296. Weitere Bemerkungen sind dort nicht hinzugefügt.

schrittweise durchzuführen, so zeigt EULER, wie man für je drei aufeinanderfolgende Koeffizienten p, q, r der gegebenen Gleichung direkt eine zugehörige quadratische herstellen kann, die dann sofort ein notwendiges Kriterium liefert. Man kann aber auch den Charakter der kubischen Gleichungen benutzen, um in ähnlicher Weise für je vier aufeinanderfolgende Koeffizienten p, q, r, s der gegebenen Gleichung passende Kriterien abzuleiten, ja sogar für je fünf, falls man imstande wäre, den vollständigen Charakter auch der biquadratischen Gleichungen für den Fall reeller Wurzeln bequem auszudrücken. Endlich setzt EULER auseinander, auf welche Weise alle diese Kriterien aus nur zwei Prinzipien gewonnen werden können.

Auf die Abhandlung 395 *De inventione quotcumque mediarum proportionalium citra radicum extractionem* ist schon zu Anfang unseres Vorwortes aufmerksam gemacht worden. EULER hatte sie nach den Akten am 18. August 1768 der Petersburger Akademie vorgelegt, gedruckt wurde sie 1770. Die Brüder P. H. und N. FUSS haben sie 1849 in die *Commentationes arithmeticae*[1]) aufgenommen, obwohl ihr Inhalt eigentlich nicht zahlentheoretischer Natur ist. Wie der Titel der Abhandlung sagt, handelt es sich um Näherungsaufgaben. Sind zwei Zahlen a und b gegeben, die im Verhältnis $1:r$ zueinander stehen, so sollen ohne Wurzelausziehung und in rationaler Form der Reihe nach eine, zwei, drei oder beliebig viele mittlere Proportionalzahlen zwischen a und b möglichst genau eingeschaltet werden. Die Methode, die EULER hierfür benutzt, beruht auf dem Satze, daß, wenn a, b, c, d etc. in stetiger Proportion zueinander stehen, auch die Differenzen $b-a$, $c-b$, $d-c$ etc. eine solche geometrische Proportion bilden, und zwar mit demselben Quotienten; weicht aber die erste Reihe von der geometrischen Proportion ab, so wird die zweite um so mehr davon abweichen. Ausführlicher verweilt EULER bei der Einschaltung von vier mittleren Proportionalzahlen. Sie führt ihn auf eine Gleichung fünften Grades, deren Wurzeln sich in der Form

$$z = \alpha + \beta\sqrt[5]{r} + \gamma\sqrt[5]{r^2} + \delta\sqrt[5]{r^3} + \varepsilon\sqrt[5]{r^4}$$

darstellen. EULER erblickt darin eine Bestätigung seiner in den Abhandlungen 30 und 282 ausgesprochenen *Coniectatio*.

Die Abhandlung 406 *Observationes circa radices aequationum* wurde am 14. Januar 1771 der Petersburger Akademie vorgelegt und noch im selben Jahre veröffentlicht. EULER knüpft hier an die GIRARDSCHEN Formeln für die Potenzsummen der Wurzeln

1) LEONHARDI EULERI *Commentationes arithmeticae collectae*. Ed. P. H. et N. FUSS, Petropoli 1849, t. I, p. 401—413. In dieser Ausgabe sind auch die Rechenfehler des § 14, die sich in der Editio princeps finden, in unserer Ausgabe aber berichtigt sind, wieder abgedruckt. Hierüber siehe das Vorwort zu Band I_2 unserer Eulerausgabe, p. VIII—XII.

einer algebraischen Gleichung an, wie er sie am Ende der Abhandlung 153 angegeben hatte. Nachdem er ein allgemeines Gesetz für den Ausdruck von $\int x^n$ durch die Koeffizienten A, B, C etc. der Gleichung ermittelt hat,[1]) bemerkt er, daß die ihm entsprechende Formel nur dann $\int x^n$ liefere, wenn n eine positive ganze Zahl ist und wenn weiter alle Glieder fortgelassen werden, in denen der Exponent von A negativ wird. EULER fragt nun, ob die Formel noch eine Bedeutung habe, wenn für n andere Zahlen zugelassen und alle Glieder beibehalten werden, und findet, daß sie dann die n^{te} Potenz der größten Wurzel der Gleichung liefere.

Die Reihenentwicklung, die EULER auf diese Weise für x^n erhielt, hat ihn noch wiederholt beschäftigt, wie aus den Abhandlungen 532, 631, 632, 711 (auch 643) hervorgeht, die sich mit 406 insofern zusammengruppieren lassen, als sie alle mehr oder weniger mit der LAMBERTSCHEN Reihe in Verbindung stehen.

Nachdem nämlich EULER schon in der Abhandlung 406 gezeigt hatte, daß jene Reihe für x^n im Falle der trinomischen Gleichungen mit der von LAMBERT 1758 im 3. Bande der Acta Helvetica[2]) aufgestellten Reihe übereinstimme, ging er auf diesen Fall in der Abhandlung 532 *De serie* LAMBERTINA *plurimisque eius insignibus proprietatibus,* die am 27. Mai 1776 der Petersburger Akademie vorgelegt, aber erst 1783 gedruckt wurde, näher ein und erhielt eine Bestätigung des LAMBERTSCHEN Resultates, indem er zeigte, daß der Reihenwert, wenn man ihn als Funktion von n mit $\varphi(n)$ bezeichnet, der Funktionalgleichung

$$\varphi(n-\beta)-\varphi(n-\alpha)=(\alpha-\beta)v\varphi(n)$$

genügt, die in der Tat für $\varphi(n)=x^n$ in die trinomische Gleichung

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha-\beta)vx^{\alpha+\beta}$$

übergeht.[3])

1) In bezug auf das schon 1762 von E. WARING (1734—1798) veröffentlichte Gesetz für $\int x^n$ siehe den in der Anmerkung 1 p. 265 des vorliegenden Bandes zitierten Aufsatz von L. SAALSCHÜTZ.

2) Siehe die Anmerkung 1 p. 274 des vorliegenden Bandes.

3) Nach einer freundlichen Mitteilung von ENESTRÖM hatte sich EULER schon lange vor den Abhandlungen 406 und 532 mit der LAMBERTSCHEN Reihe beschäftigt, und zwar in dem noch ungedruckten Briefe an CHR. GOLDBACH vom 17. März 1764. Dieser Brief befindet sich in dem Handschriftenmaterial, das die Petersburger Akademie der Eulerkommission zur Verfügung gestellt hat und das in Zürich aufbewahrt wird. Er bildet den Abschluß des berühmten Briefwechsels zwischen EULER und GOLDBACH, der schon 1729 begonnen hatte und der in der bekannten von P. H. FUSS 1843 herausgegebenen *Correspondance math. et phys.* (siehe z. B. die Anmerkung 1 p. 19 des vor-

In der am 15. April 1776 der Petersburger Akademie vorgelegten, aber erst 1789 gedruckten Abhandlung 631 *Analysis facilis et plana ad eas series maxime abstrusas perducens, quibus omnium aequationum algebraicarum non solum radices ipsae sed etiam quaevis earum potestates exprimi possunt*, geht EULER umgekehrt von einer trinomischen Gleichung aus und setzt jetzt

$$x^n = f(n) + f'(n) + f''(n) + \text{etc.}$$

Für die Funktionen f, f', f'' etc. erhält man dann aus der gegebenen Gleichung ein System von Funktionalgleichungen, und indem man diesem auf möglichst einfache Weise zu genügen sucht, gerade die LAMBERTSCHE Reihe. EULER wendet sodann dasselbe Verfahren auf quadrinomische und endlich auf Gleichungen mit beliebig vielen Gliedern an und erhält auch hier für x^n jene Entwicklungen wieder, die er schon in der Abhandlung 406 angegeben hatte.

Endlich hat EULER in den beiden Abhandlungen 632 *De innumeris generibus serierum maxime memorabilium, quibus omnium aequationum algebraicarum non solum radices ipsae sed etiam quaecumque earum potestates exprimi possunt* (am 11. April 1776 der Petersburger Akademie vorgelegt, aber erst 1789 gedruckt) und 711 *Methodus nova ac facilis omnium aequationum algebraicarum radices non solum ipsas sed etiam quascumque earum*

---

liegenden Bandes) mit 177 Nummern den ganzen ersten Band füllt. GOLDBACH starb am 20. November 1764 im Alter von 74 Jahren.

In jenem Briefe vom 17. März 1764, der FUSS unbekannt geblieben ist, knüpft EULER zunächst an eine kurze zahlentheoretische Notiz an, die ihm GOLDBACH noch am 10. Januar 1764 hatte zukommen lassen (Nummer 177 der *Correspondance*), um dann von LAMBERT zu erzählen, der wenige Wochen zuvor auf einer Reise zum ersten Male nach Berlin gekommen war. Schon 1761 hatte die Berliner Akademie den damals kaum 33-jährigen zum auswärtigen Mitglied gewählt und nun bemühten sich die Akademiker, vor allem SULZER, ihn dauernd für Berlin zu gewinnen. Dazu mußte freilich zunächst der Widerstand des Königs überwunden werden, der aus einer ersten, ergötzlichen Unterhaltung mit LAMBERT ein Vorurteil gegen diesen gefaßt hatte. Als dann aber eine Berufung LAMBERTS nach Petersburg drohte, gelang es SULZER, den König umzustimmen. LAMBERT wurde Januar 1765 zum ordentlichen Mitglied der Akademie ernannt, der König machte ihn zum Oberbaurat, und in dieser Stellung verblieb nun LAMBERT — der ehemalige arme Schneidergeselle von Mülhausen — bis zu seinem Tode.

Doch kehren wir nach dieser Abschweifung, die in dem Namen LAMBERT ihre Begründung finden mag, zu EULER und seinem Briefe an GOLDBACH zurück. Wie bei jeder Gelegenheit, so spricht EULER auch jetzt von LAMBERT in Ausdrücken größter Hochschätzung: LAMBERT excelliere in allen Wissenschaften. Eingehend berichtet EULER sodann über die merkwürdige Reihe, mit der ihn LAMBERT bekannt gemacht habe, und über ihre Beziehungen zu den trinomischen Gleichungen. Er sei erstaunt darüber; denn eine Reihe von solcher Beschaffenheit sei ihm noch niemals vorgekommen.

potestates per series concinnas exprimendi (am 21. September 1778 vorgelegt, aber erst 1801 gedruckt) eine nochmalige Bestätigung seiner Reihenentwicklung von x^n erbracht, indem er die Koeffizienten der einzelnen Glieder mit Hilfe der gegebenen Gleichung ermittelte.

Der Inhalt der Abhandlung 643 *Methodus generalis investigandi radices omnium aequationum per approximationem*, die am 25. April 1776 der Akademie vorgelegt, aber erst 1790 gedruckt wurde, läßt sich so zusammenfassen. Es sei z die gesuchte Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ und v ein Näherungswert, also $V = f(v)$ eine kleine Größe. Bezeichnet man dann mit $v = \Gamma(V)$ die zu f inverse Funktion und setzt in der TAYLORSCHEN Entwicklung von $\Gamma(V + h)$ für h den Wert $-V$, so wird $\Gamma(V + h) = \Gamma(0) = z$ und man erhält die Reihe

$$z = v - \frac{\Gamma'(V)}{1!} V + \frac{\Gamma''(V)}{2!} V^2 - \frac{\Gamma'''(V)}{3!} V^3 + \text{etc.},$$

die, auf ihre ersten zwei Glieder beschränkt, nichts anderes ist als die NEWTONSCHE Näherungsformel, an deren Ableitung auch der obige Gedankengang erinnert.

Man kann dasselbe Verfahren auf jede Funktion von z, also auch auf z^n anwenden, und insofern hängt diese EULERSCHE Abhandlung, aber nur äußerlich, mit jenen zusammen, über die soeben berichtet wurde.

Unser Bericht führt uns nun zu einem anderen Thema. Für die n^2 Koeffizienten einer orthogonalen Substitution liefert das Verlangen, daß

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2$$

sei, ein System von $\frac{1}{2}n(n+1)$ Bedingungen, auf Grund deren sie sich durch $\frac{1}{2}(n-1)n$ unabhängige Parameter darstellen lassen. Eine solche Darstellung gibt EULER in der Abhandlung 407 *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile*, die am 5. März 1770 der Petersburger Akademie vorgelegt und 1771 veröffentlicht wurde. Sie findet sich auch abgedruckt in den bereits erwähnten *Commentationes arithmeticae*, Petropoli 1849, t. 1, p. 427.

Sind $\varkappa$, λ irgend zwei der Zahlen 1, 2, ... n und ist α ein beliebiger Winkel, so stellen die beiden Gleichungen

$$x_\varkappa = x'_\varkappa \cos.\alpha + x'_\lambda \sin.\alpha, \qquad x_\lambda = x'_\varkappa \sin.\alpha - x'_\lambda \cos.\alpha$$

zusammen mit den $n-2$ Gleichungen $x_\mu = x'_\mu$, wo μ die $n-2$ von $\varkappa$ und λ verschiedenen Zahlen durchläuft, eine orthogonale Substitution dar und aus den $\frac{1}{2}(n-1)n$ Substitutionen, die den verschiedenen Zahlenpaaren $\varkappa$, λ entsprechen, setzt sich die allgemeine orthogonale Substitution zusammen, deren Koeffizienten so durch $\frac{1}{2}(n-1)n$ unabhängige Parameter, hier die Winkel α, β, γ etc., ausgedrückt sind. Dies wird für $n = 3, 4, 5$ durchgeführt. Im Falle $n = 3$

stimmen die so entstehenden Formeln mit jenen überein, die EULER bei der Transformation rechtwinkliger Raumkoordinaten schon 1748 im 2. Bande der *Introductio in analysin infinitorum*, p. 369, angegeben und die er dann 1760 in der Abhandlung 336 für die Mechanik verwendet hatte.[1])

Um rationale Werte für die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution zu erhalten, gibt EULER im späteren Teile seiner Abhandlung für die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ ihre heute allen Mathematikern bekannten rationalen Parameterdarstellungen. Diese Formeln, für die EULER eine Ableitung nicht angibt, hat für $n = 3$ O. RODRIGUES aus anderen, auch auf EULER zurückgehenden Formeln hergeleitet, für $n = 4$ in etwas anderer Form A. CAYLEY mit Hilfe der schiefsymmetrischen Determinanten gewonnen.[2]) Auf welchem Wege EULER selbst zu seinen Formeln gekommen ist, sieht man aus einem Briefe an CHR. GOLDBACH vom Jahre 1748 und aus den beiden arithmetischen Abhandlungen 242 und 445.[3])

Die Abhandlung 450 *Nova ratio quantitates irrationales proxime exprimendi* wurde am 18. Mai 1772 der Petersburger Akademie vorgelegt und erschien 1774 im Druck. Wenn man in der Gleichung

$$(1 - \alpha x + \beta x^2 - \cdots \pm \mu x^m)(1 + x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.}$$

die m Größen $\alpha, \beta, \ldots \mu$ so bestimmt, daß auf der rechten Seite die Koeffizienten von m aufeinanderfolgenden Gliedern Null werden, und man dann die darauffolgenden Glieder vernachlässigt, so erhält man angenäherte Darstellungen von $(1 + x)^n$, unter welchen diejenigen besonders einfache Formen haben, bei denen auf der rechten Seite ebenfalls die $m + 1$ ersten Glieder vorkommen. Da sie den Wert von $(1 + x)^n$ um so genauer liefern, je größer m genommen wird, so kann man auf diese Weise nicht nur Ausdrücke wie $\sqrt{(a^2 + b)}$ und $\sqrt[3]{(a^3 + b)}$, sondern auf Grund der Beziehungen

$$l(1 + x) = \lim_{n=0} \frac{(1 + x)^n - 1}{n} \quad \text{und} \quad e^x = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

auch Werte des Logarithmus und der Exponentialfunktion angenähert berechnen.

EULER hatte im 2. und 12. Kapitel der *Introductio in analysin infinitorum* und in den beiden späteren Abhandlungen 162 und 163 das Problem der Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion bereits eingehend behandelt.[4]) Wieder aufgenommen hat er es in den Abhandlungen 540 *Nova methodus fractiones quascumque rationales in fractiones*

1) Siehe die Anmerkung 1 p. 294 des vorliegenden Bandes.

2) Siehe die Anmerkungen 1 p. 309 und 312 des vorliegenden Bandes.

3) Siehe die Anmerkung 1 p. 311 des vorliegenden Bandes.

4) Siehe die Anmerkung 1 p. 370 des vorliegenden Bandes.

simplices resolvendi (am 14. August 1775 der Petersburger Akademie vorgelegt und 1783 veröffentlicht) und 728 *De resolutione fractionum compositarum in simpliciores* (am 11. Januar 1779 der Akademie vorgelegt, aber erst 1809 gedruckt).

Die Arbeit 540 behandelt den Fall, daß ein Linearfaktor $z - a$ in einer höheren Potenz, der n^{ten}, im Nenner Q der gegebenen rationalen Funktion $\frac{P}{Q}$ auftritt. Die Zähler α, β, γ etc. der zu ihm gehörigen Partialbruchreihe

$$\frac{\alpha}{(z-a)^n} + \frac{\beta}{(z-a)^{n-1}} + \frac{\gamma}{(z-a)^{n-2}} + \text{etc.}$$

werden dann durch Entwicklung von $\frac{P}{Q}$ nach Potenzen von $z - a = \omega$ in der Form

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{\omega^n}(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \text{etc.})$$

erhalten. Am Schlusse der Abhandlung wird gezeigt, wie dieses Verfahren auch zur Partialbruchentwicklung der transzendenten Funktion

$$\frac{\sin.\varphi}{\text{tg.}\,\varphi - \cos.\varphi}$$

benutzt werden kann.

In der Abhandlung 728 behandelt EULER das Problem in der allgemeinsten Form. Es sei P ein beliebiger Faktor n^{ten} Grades des Nenners $Q = PM$ der gegebenen rationalen Funktion $\frac{N}{Q}$, der nur der Bedingung zu genügen hat, daß er zu M relativ prim sei. Der Zähler $\mathfrak{P}$ des zu P gehörigen Partialbruches ist für alle diejengen Werte von x, für die $P = 0$ ist, gleich $\frac{N}{M}$, wobei man noch aus N und M mit Hilfe von $P = 0$ die n^{te} und alle höheren Potenzen von x entfernen kann. Bestimmt man nun einen Multiplikator Π so, daß sich $M\Pi$, immer unter Zuhilfenahme von $P = 0$, auf eine Konstante C reduziert, so ist $\frac{N\Pi}{C}$, nachdem man wieder die n^{te} und alle höheren Potenzen von x daraus entfernt hat, der gesuchte Zähler $\mathfrak{P}$. Einen Multiplikator Π der gesuchten Art aber kann man auf Grund der aus

$$M\Pi = C + P\Theta$$

folgenden Gleichung

$$\frac{P}{M} - \frac{\Pi}{\Theta} = \frac{C}{M\Theta}$$

durch ein Kettenbruchverfahren aus $\frac{P}{M}$ ableiten.

Wie die Abhandlungen 540 und 728, so hängt auch die Abhandlung 794 *Theorema arithmeticum eiusque demonstratio* mit der Partialbruchzerlegung zusammen. Sie wurde zuerst 1849 im 2. Bande der *Commentationes arithmeticae* veröffentlicht und 1862 im 1. Bande der *Opera postuma* wieder abgedruckt.

Es seien a, b, c, d etc. irgendwelche Größen, m an der Zahl, und A, B, C, D etc. ihre Differenzenprodukte, also

$$A = (a-b)(a-c)(a-d) \text{ etc.},$$
$$B = (b-a)(b-c)(b-d) \text{ etc.},$$
$$C = (c-a)(c-b)(c-d) \text{ etc.},$$
$$D = (d-a)(d-b)(d-c) \text{ etc.}$$

Es sei ferner

$$S^{(n)} = \frac{a^n}{A} + \frac{b^n}{B} + \frac{c^n}{C} + \frac{d^n}{D} + \text{etc.}$$

Dann ist, wie EULER schon 1762 in Briefen an CHR. GOLDBACH mitgeteilt und sodann 1769 im 2. Bande des *Calculus integralis* in § 1169 mit Hilfe der Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \text{ etc.}}$$

bewiesen hatte,[1])

$$S^{(n)} = 0,$$

so lange $n \overline{\gtrless} m-2$ ist. In der Abhandlung 794 wiederholt EULER diesen Beweis und gibt dann aber auch die Werte von $S^{(n)}$ für $n > m-2$ an, wonach

$$S^{(m-1)} = 1, \quad S^{(m)} = P, \quad S^{(m+1)} = P^2 - Q, \quad S^{(m+2)} = P^3 - 2PQ + R \text{ etc.}$$

ist, wenn P die Summe der Größen a, b, c, d etc., Q die Summe ihrer Produkte zu zweien, R die Summe ihrer Produkte zu dreien, etc. bezeichnet.

Es mag bemerkt werden, daß sich eine Ableitung dieser Formeln auch in der Abhandlung von GAUSS *Theoria interpolationis methodo nova tractata* findet, die im 3. Bande von *GAUSS Werken* p. 265 aus seinem Nachlaß veröffentlicht wurde.

Die Abhandlung 808 *Problema algebraicum de inveniendis quatuor numeris ex datis totidem productis uniuscuiusque horum numerorum in summas trium reliquorum*, die 1862 im 1. Bande der *Opera postuma* veröffentlicht wurde, enthält zwei verschiedene Lösungen des Gleichungssystems

$$v(x+y+z) = a, \quad x(v+y+z) = b, \quad y(v+x+z) = c, \quad z(v+x+y) = d,$$

von denen die erste auch der Form nach von EULER selbst herrührt, die zweite aber auf Grund eines EULERSCHEN Entwurfes von NICOLAUS FUSS ausgearbeitet wurde.[2])

Im Fragment 819, mit dem unser Band abschließt, werden Kriterien für das Auftreten rationaler Wurzeln bei Gleichungen dritten Grades abgeleitet. Die Redaktion rührt von

1) Siehe die Anmerkungen 1 und 2 p. 486 des vorliegenden Bandes.

2) Siehe die Anmerkung p. 502 des vorliegenden Bandes.

EULERS Schüler und Gehilfen A. J. LEXELL (1740—1784) her und dürfte etwa aus dem Jahre 1770 stammen. Das Fragment ist dem ersten der drei zu den Petersburger Handschriften gehörenden Bücher entnommen, die man bisher, den Brüdern P. H. und N. FUSS folgend, schlechtweg als *Adversaria mathematica I—III* bezeichnet hat.[1]) Diese drei bilden aber nur den Schluß in der Reihe der *Notizbücher*[2]) EULERS und es war daher selbstverständlich, daß auch die vorhergehenden daraufhin untersucht werden mußten, was etwa wert erscheinen könnte, in die Eulerausgabe aufgenommen zu werden. Soweit es sich um algebraische Fragen handelt, sind die Herausgeber dabei in dankenswerter Weise von Herrn G. POLYA unterstützt worden. Abgesehen aber von dem Eintrag, der in der Anmerkung 1 p. XV mitgeteilt ist, hat sich nichts besonders bemerkenswertes gefunden.

Nach ENESTRÖMS *Verzeichnis*[3]) hat EULER wiederholt Inhaltsübersichten (Summaria) auch von Abhandlungen anderer Autoren verfaßt. So enthält allein der 7. Band der Petersburger Novi commentarii acht Abhandlungen, deren Résumés von EULERS Hand herrühren. Darunter befindet sich auch, p. 211—226, die Abhandlung von J. A. SEGNER (1704—1777) *Methodus simplex et universalis omnes omnium aequationum radices detegendi,* zugleich die einzige algebraische Abhandlung eines fremden Verfassers, über die EULER Bericht erstattet hat. Die graphischen Auflösungsmethoden, die SEGNER darin mitteilt, stehen indessen den EULERSCHEN algebraischen Arbeiten zu ferne, als daß man an einen Abdruck der Abhandlung in unserer Ausgabe, nur des Summariums wegen, denken dürfte. Dieses selbst[4]) aber möge hier eine Stelle finden. Es lautet:

„Complures iam a Geometris excogitatae sunt methodi aequationum algebraicarum radices vel accurate vel proxime saltem determinandi: omnes autem fere postulant, ut valores radicum, quae quaeruntur, propemodum iam sint cogniti, ad quam cognitionem quomodo sit perveniendum, saepenumero parum perspicitur. Cel. BERNOULLI[5]) iam pridem quidem excellentem methodum tradidit ope serierum recurrentium hoc praestandi: verum ipse animad-

---

1) Siehe die Anmerkung 1 p. 504 des vorliegenden Bandes.

2) Siehe hierzu die Anmerkung 1 p. XV dieses Bandes, sowie das Vorwort zu Band I_2 unserer Eulerausgabe, p. XI.

3) *Verzeichnis der Schriften LEONHARD EULERS,* 2. Lieferung, p. 213. Siehe namentlich den daselbst mitgeteilten Brief, den EULER am 5. September 1761 an G. F. MÜLLER, den Nachfolger GOLDBACHS im Sekretariate der Petersburger Akademie, gerichtet hat.

4) Novi comment. acad. sc. Petrop. 7 (1758/9), 1761, *Summarium dissertationum* p. 15—16. Das Mannskript ist im Besitze der Petersburger Akademie.

5) Gemeint ist D. BERNOULLI (1700—1782), *Observationes de seriebus recurrentibus,* Comment. acad. sc. Petrop. 3 (1728), 1732, p. 85.

vertit, hoc modo tantum vel ad maximam vel ad minimam aequationis radicem appropinquari. Ill. igitur Auctor hic mechanicam methodum perquam ingeniosam exponit, ubi descriptione certarum linearum curvarum limites omnium radicum realium manifesto exhibentur; constructionem autem harum linearum geometricam admodum facilem docet, qua quovis casu oblato fere sine labore uti liceat. Quae lineae quo accuratius super Charta delineantur, eo propius veros singularum radicum valores manifestat, quibus cognitis eo promtius aliarum methodorum beneficio approximatio instituitur."

Herzlichen Dank schulden die Bearbeiter des vorliegenden Bandes Herrn G. Eneström, auf dessen nie versagenden Rat sie zu jeder Zeit rechnen durften. Dank und Anerkennung schulden sie aber auch der Verlagsfirma B. G. Teubner, die trotz der Ungunst der Verhältnisse in ihrer Fürsorge um die Drucklegung nicht erlahmte.

Zürich, im Januar 1921.

Ferdinand Rudio.

INDEX

Insunt in hoc volumine indicis ENESTROEMIANI commentationes
30, 153, 157, 170, 282, 310, 370, 395, 406, 407, 450, 532, 540, 631, 632, 643, 644, 711, 728, 794, 808, 819

DE FORMIS RADICUM AEQUATIONUM CUIUSQUE ORDINIS CONIECTATIO[1]

Commentatio 30 indicis ENESTROEMIANI
Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 6 (1732/3), 1738, p. 216—231

SUMMARIUM

Ex manuscriptis academiae scientiarum Petropolitanae nunc primum editum

Iam ab ipso calculi analytici initio notae sunt regulae pro extrahendis radicibus ex aequationibus quadraticis, cubicis et biquadraticis. His vero temporibus, quibus analysis maxima cepit incrementa, modus adhuc latet altiorum aequationum radices eruendi, quamquam id negotium a praestantissimis ingeniis maximo studio sit adgressum. Cum igitur modus has radices eruendi nos lateat, coniecturas tantum de earum formis et, qua forte via ipsae eruendae essent, celeberrimus auctor proponit, quibus fortasse alii magis adiuti tandem ad scopum pervenire poterunt.

Primo igitur loco auctor notat, cum aequatio cuiusvis potestatis inferiores omnes in se comprehendat, facile perspici methodum ex quaque aequatione radicem extrahendi ita comparatam esse, ut omnium inferiorum aequationum methodos involvat. Quamobrem inventio radicis ex aequatione sex dimensionum haberi non potest, nisi eadem antea constet de aequationibus quinti, quarti et tertii gradus. Eleganter igitur celeberrimus auctor ostendit, quomodo quaelibet aequatio habeat aequationem uno gradu ipsa inferiorem, cuius ope resolvi potest. Ita aequatio quadratica resolvitur ope aequationis simplicis, cubica autem ope quadraticae, biquadratica ope cubicae. Probat autem, si aequationis, qua quadratica resolvitur, radix sit A, fore radicem aequationis quadraticae $= \sqrt[2]{A}$; et si aequationis qua-

1) Confer hac cum dissertatione Commentationem 282 huius voluminis. F. R.

draticae, qua cubica resolvitur, radices sint A et B, fore aequationis cubicae radicem $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$; aequationis vero cubicae biquadraticam resolventis existentibus radicibus A, B et C fore radicem ipsius aequationis biquadraticae $\sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{C}$. Haec de his tribus casibus certa et demonstrata sunt.

Exinde vero auctor coniecturam format pro simili forma altiorum radicum, ita ut existentibus A, B, C, D radicibus aequationis biquadraticae resolventis aequationem quinti gradus huius radicem fore $\sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}$ et sic de altioribus. Si itaque aequationes resolventes possent determinari, cuiusque aequationis in promtu esset determinare radices. Perpetuo enim pervenitur ad aequationem inferioris gradus hocque modo progrediendo tandem vera aequationis propositae radix innotesceret.

Hac vero occasione alia quoque praeclara circa inventionem radicum et factorum celeberrimus auctor proponit, quae aliis magis perficienda relinquit.

1. Summopere admirandum videtur, quod, cum ipsis rei analyticae initiis radices aequationum cubicarum et biquadraticarum essent inventae, his tamen temporibus, quibus analysis maxima augmenta accepit, modus adhuc lateat altiorum aequationum radices eruendi, praesertim cum haec res continuo a praestantissimis ingeniis maximo studio sit investigata. Quo studio, quamquam quaesito parum est satisfactum, egregia tamen ad quasque aequationes tractandas subsidia sunt detecta. Quamobrem neminem puto fore, qui hoc meum institutum, quo, quas formas habeant aequationum radices et qua via eae forte inveniri possint, ostendo, etiamsi plus non praestiterim, sit reprehensurus. Alios enim fortasse magis iuvare atque tandem ad inventum scopum perducere poterit.

2. Cum aequatio cuiusque potestatis omnes inferiores in se comprehendat, facile perspicitur methodum quoque radicem ex quaque aequatione extrahendi ita esse comparatam, ut omnium inferiorum aequationum methodos involvat. Quamobrem inventio radicis ex aequatione sex dimensionum haberi non potest, nisi eadem antea constet de aequationibus quinti, quarti et tertii gradus. Ita videmus BOMBELLII[1]) methodum ex aequationibus biquadraticis radices extra-

1) Vide R. BOMBELLI, *L'Algebra*, Venezia 1572, Bologna 1579, libro II, p. 353 et seq. Vide etiam M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2. Bd., 3. Aufl., Leipzig 1900, p. 621 et seq. Vide porro L. EULER, *Vollständige Anleitung zur Algebra*, St. Petersburg 1770, Zweyter Theil, erster Abschnitt, Cap. 14; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 1, p. 304. F. R.

hendi perducere ad resolutionem aequationis cubicae; atque cubicae aequationis radicem definiri non posse sine quadraticae aequationis resolutione.

3. Resolutionem aequationis cubicae sequenti modo a quadratica pendentem considero. Sit aequatio cubica

$$x^3 = ax + b,$$

in qua secundus terminus deest; huius radicem x dico fore

$$= \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

existentibus A et B duabus radicibus aequationis cuiusdam quadraticae

$$z^2 = \alpha z - \beta.$$

Quamobrem ex natura aequationum erit

$$A + B = \alpha \quad \text{et} \quad AB = \beta.$$

Sed ad α et β ex a et b definiendas sumo aequationem

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B},$$

quae cubice multiplicata dat

$$x^3 = A + B + 3\sqrt[3]{AB}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = 3x\sqrt[3]{AB} + A + B.$$

Quae cum proposita $x^3 = ax + b$ comparata dabit

$$a = 3\sqrt[3]{AB} = 3\sqrt[3]{\beta} \quad \text{et} \quad b = A + B = \alpha.$$

Fiet igitur

$$\alpha = b \quad \text{et} \quad \beta = \frac{a^3}{27};$$

quocirca aequatio quadratica resolutioni aequationis $x^3 = ax + b$ dicto modo inserviens erit

$$z^2 = bz - \frac{a^3}{27}.$$

Huius enim radicibus cognitis A et B erit

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}.$$

4. Sed cum radix cubica ex quaque quantitate triplicem habeat valorem, haec formula $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ omnes etiam radices aequationis propositae complectetur. Sint enim μ et ν praeter unitatem radices cubicae ex unitate; erit etiam

$$x = \mu \sqrt[3]{A} + \nu \sqrt[3]{B},$$

si modo sit $\mu\nu = 1$. Quamobrem μ et ν esse debebunt

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

vel inverse. Praeter radicem igitur

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

satisfacient quoque [aequationi] propositae hae duae alterae radices

$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B}$$

et

$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B}.$$

Hacque ratione aequationis cubicae etiam, in qua secundus terminus non deest, radices determinari poterunt.

5. Aequationes biquadraticae variis modis ad cubicas reduci solent, quorum autem nullus instituto meo utilitatem afferre potest. Sed mihi est peculiaris methodus idem efficiendi atque priori, qua cubicae ad quadraticas reducuntur, similis, ita ut exinde quodammodo concludi possit, quomodo aequationes altiorum graduum debeant tractari. Ut si proposita sit haec aequatio

$$x^4 = ax^2 + bx + c,$$

in qua itidem secundus terminus deest, dico fore

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C},$$

at A, B et C esse tres radices ex aequatione quadam cubica

$$z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma.$$

Hanc ob rem erit

$$\alpha = A + B + C, \quad \beta = AB + AC + BC \quad \text{et} \quad \gamma = ABC.$$

Quo autem α, β et γ determinentur, aequatio $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ ab irrationalitate liberetur hoc modo. Sumantur quadrata; erit

$$x^2 = A + B + C + 2\sqrt{AB} + 2\sqrt{AC} + 2\sqrt{BC}$$

hincque

$$x^2 - \alpha = 2\sqrt{AB} + 2\sqrt{AC} + 2\sqrt{BC}.$$

Sumendis denuo quadratis fit

$$x^4 - 2\alpha x^2 + \alpha^2 = 4AB + 4AC + 4BC + 8\sqrt{ABC}(\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}) = 4\beta + 8x\sqrt{\gamma}$$

seu

$$x^4 = 2\alpha x^2 + 8x\sqrt{\gamma} + 4\beta - \alpha^2.$$

Haec aequatio comparata cum proposita $x^4 = ax^2 + bx + c$ dabit

$$2\alpha = a, \quad 8\sqrt{\gamma} = b \quad \text{et} \quad 4\beta - \alpha^2 = c,$$

ex quibus prodit

$$\alpha = \frac{a}{2}, \quad \gamma = \frac{b^2}{64}, \quad \beta = \frac{c}{4} + \frac{a^2}{16}.$$

Aequatio ergo cubica resolutioni aequationis biquadraticae inserviens est

$$z^3 = \frac{a}{2} z^2 - \frac{4c + a^2}{16} z + \frac{b^2}{64}.$$

Huius enim radices si sint A, B et C, erit

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}.$$

At reliquae tres radices ex aequatione proposita erunt

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}, \quad \sqrt{B} - \sqrt{A} - \sqrt{C} \quad \text{et} \quad \sqrt{C} - \sqrt{A} - \sqrt{B}.$$

6. Ponatur $z = \sqrt{t}$; erit

$$\left(t + \frac{4c + a^2}{16}\right)\sqrt{t} = \frac{at}{2} + \frac{b^2}{64}$$

et sumendis quadratis habebitur

$$t^3 + \frac{4c + a^2}{8} t^2 + \frac{(4c + a^2)^2}{256} t = \frac{a^2 t^2}{4} + \frac{ab^2 t}{64} + \frac{b^4}{4096}$$

seu

$$t^3 = \left(\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2}\right) t^2 + \left(\frac{ab^2}{64} - \frac{cc}{16} - \frac{a^2 c}{32} - \frac{a^4}{256}\right) t + \frac{b^4}{4096}.$$

Haec aequatio ergo hanc habet proprietatem, ut eius radices sint quadrata[1]) radicum prioris aequationis A, B et C. Quare si huius aequationis radices ponantur E, F, G, erit

$$x = \sqrt[4]{E} + \sqrt[4]{F} + \sqrt[4]{G}.$$

Datur itaque aequatio cubica, cuius radicum radices biquadraticae simul sumtae constituant radicem aequationis biquadraticae propositae. Atque haec methodus inveniendi radices ex aequatione biquadratica, etiamsi sit priori operosior, maiorem habet affinitatem cum resolutione aequationum cubicarum, cum eiusdem potestatis radix extrahatur ex radicibus aequationis inferioris, cuius est ipsa aequatio proposita.

7. Simili ratione etiam aequatio quadratica

$$x^2 = a,$$

in qua secundus terminus deest, resolvetur ope aequationis unius dimensionis

$$z = a.$$

Huius enim radix est a atque radix aequationis propositae

$$x = \sqrt{a} \quad \text{vel} \quad x = -\sqrt{a}.$$

Huiusmodi autem aequationem ordine inferiorem, cuius ope aequatio superior secundo termino carens resolvitur, vocabo *aequationem resolventem*. Ita aequationis quadraticae

$$x^2 = a$$

aequatio resolvens erit

$$z = a;$$

---

1) Editio princeps: ... *ut eius radices sint radices quadratae radicum prioris aequationis* ...
Correxit F. R.

aequationis cubicae

$$x^3 = ax + b$$

aequatio resolvens erit

$$z^2 = bz - \frac{a^3}{27}$$

atque aequationis biquadraticae

$$x^4 = ax^2 + bx + c$$

aequatio resolvens est

$$z^3 = \left(\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2}\right) z^2 - \left(\frac{a^4}{256} + \frac{a^2 c}{32} + \frac{c^2}{16} - \frac{ab^2}{64}\right) z + \frac{b^4}{4096}.$$

Pro quadratica enim aequatione, si aequationis resolventis radix sit A, erit

$$x = \sqrt{A};$$

pro cubica vero aequatione, si resolventis radices sint A et B, erit

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

atque pro biquadratica aequatione existentibus resolventis aequationis radicibus A, B et C erit

$$x = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{C}.$$

8. Ex his etiamsi tribus tantum casibus tamen non sine sufficienti ratione mihi concludere videor superiorum quoque aequationum dari huiusmodi aequationes resolventes. Sic proposita aequatione

$$x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

coniicio dari aequationem ordinis quarti

$$z^4 = \alpha z^3 - \beta z^2 + \gamma z - \delta,$$

cuius radices si sint A, B, C et D, fore

$$x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}.$$

Et generatim aequationis

$$x^n = ax^{n-2} + bx^{n-3} + cx^{n-4} + \text{etc.}$$

aequatio resolvens, prout suspicor, erit huius formae

$$z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3} + \gamma z^{n-4} - \text{etc.},$$

cuius cognitis radicibus omnibus numero $n-1$, quae sint A, B, C, D etc., erit

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} + \text{etc.}$$

Haec igitur coniectura si esset veritati consentanea atque si aequationes resolventes possent determinari, cuiusque aequationis in promtu foret radices assignare; perpetuo enim pervenitur ad aequationem ordine inferiorem hocque modo progrediendo tandem vera aequationis propositae radix innotescet.

9. Quamquam autem, si aequatio proposita plures quam quatuor habet dimensiones, aequationem resolventem definire adhuc non possum, tamen praesto sunt non nullius momenti argumenta, quibus ista mea coniectura confirmatur. Si enim aequatio proposita ita est comparata, ut in aequatione resolvente omnes termini praeter tres primos evanescant, tum semper ipsa aequatio resolvens poterit exhiberi atque ideo aequationis propositae radices assignari. Aequationes autem, quae hoc modo resolutionem admittunt, sunt eae ipsae, quas Cl. ABR. DE MOIVRE[1]) in Transact. n. 309 pertractavit. Sit enim aequatio resolvens

$$z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3}$$

seu

$$z^2 = \alpha z - \beta$$

ex hacque aequationem resolvendam erui oporteat. Sint huius aequationis radices A et B; reliquae enim radices omnes evanescunt; erit aequationis resolvendae radix

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}.$$

Est vero

$$\alpha = A + B \quad \text{et} \quad \beta = AB$$

---

1) A. DE MOIVRE (1667—1754), *Aequationum quarundam Potestatis tertiae, quintae, septimae, nonae, et superiorum, ad infinitum usque pergendo, in terminis finitis, ad instar Regularum pro Cubicis, quae vocantur CARDANI, Resolutio Analytica*, Philosophical Transactions (London) 25, 1707, numb. 309, p. 2368. Quae dissertatio invenitur etiam in tertia editione (ed. G. I. 's GRAVESANDE) NEUTONI *Arithmeticae universalis*, p. 270 (vide notam p. 21). F. R.

ex natura aequationum. Hinc ergo erit

$$\sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2} = x^2 - 2\sqrt[n]{\beta}$$

atque porro

$$\sqrt[n]{A^3} + \sqrt[n]{B^3} = x^3 - 3x\sqrt[n]{\beta},$$

$$\sqrt[n]{A^4} + \sqrt[n]{B^4} = x^4 - 4x^2\sqrt[n]{\beta} + 2\sqrt[n]{\beta^2},$$

$$\sqrt[n]{A^5} + \sqrt[n]{B^5} = x^5 - 5x^3\sqrt[n]{\beta} + 5x\sqrt[n]{\beta^2}$$

atque tandem

$$\sqrt[n]{A^n} + \sqrt[n]{B^n} = x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\beta} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}x^{n-4}\sqrt[n]{\beta^2}$$
$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-6}\sqrt[n]{\beta^3} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-8}\sqrt[n]{\beta^4} - \text{etc.} = \alpha.$$

Quae est aequatio resolvenda, cuius resolvens est

$$z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3} \quad \text{seu} \quad z^2 = \alpha z - \beta.$$

10. Non solum autem hoc modo aequationis

$$x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\beta} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}x^{n-4}\sqrt[n]{\beta^2} - \text{etc.} = \alpha$$

unica radix invenitur

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B},$$

sed satisfacit etiam quaelibet alia

$$x = \mu\sqrt[n]{A} + \nu\sqrt[n]{B},$$

modo sit $\mu^n = \nu^n = \mu\nu = 1$, id quod n diversis modis fieri potest. Ut si sit $n = 5$, aequationis

$$x^5 - 5x^3\sqrt[5]{\beta} + 5x\sqrt[5]{\beta^2} = \alpha$$

radices quinque erunt, ut sequuntur:

I. $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B},$

II. $x = \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} + \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B},$

III. $x = \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} + \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B},$

IV. $x = \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} + \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B},$

V. $x = \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} + \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}.$

Hi enim coefficientes omnes sunt radices surdesolidae ex unitate et factum ex binis coniunctis est $= 1$.

Simili modo praeter ipsam unitatem sunt sex radices potestatis septimae ex unitate harumque tria paria multiplicatione unitatem producentia, quae sunt sex radices huius aequationis

$$y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0.$$

Ad has autem inveniendas tantum opus est resolutione aequationis cubicae; omnis enim aequatio potestatis sextae huius formae

$$y^6 + ay^5 + by^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0,$$

quae non mutatur posito $\frac{1}{y}$ loco y, resolvi potest ope aequationis cubicae. Quod quemadmodum fiat, cum ad inveniendas radices saepe utilitatem habere possit, brevi sum ostensurus.

11. Aequationes huiusmodi, quae posito $\frac{1}{y}$ loco y formam non mutant, voco *reciprocas*. Hae, si maximus ipsius y dimensionum numerus est impar, semper dividi possunt per $y + 1$ et aequatio resultans etiam erit reciproca, in qua maxima ipsius y dimensio erit par. Quamobrem sufficiet parium tantum dimensionum aequationes reciprocas considerasse atque modum earum resolvendarum exposuisse.

Sit igitur primo aequatio proposita quartae potestatis haec

$$y^4 + ay^3 + by^2 + ay + 1 = 0;$$

ponatur haec factum ex duabus quadraticis

$$y^2 + \alpha y + 1 = 0$$

et

$$y^2 + \beta y + 1 = 0.$$

Quo facto fiet

$$\alpha + \beta = a \quad \text{et} \quad \alpha\beta + 2 = b \quad \text{seu} \quad \alpha\beta = b - 2.$$

Quare α et β erunt duae radices huius aequationis

$$u^2 - au + b - 2 = 0$$

hacque ratione quatuor aequationis propositae radices ope aequationum tantum quadraticarum innotescent.

Aequatio reciproca sextae potestatis

$$y^6 + ay^5 + by^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$$

ponatur factum trium harum quadraticarum

$$y^2 + \alpha y + 1 = 0,$$

$$y^2 + \beta y + 1 = 0$$

et

$$y^2 + \gamma y + 1 = 0.$$

Hinc fiet

$$\alpha + \beta + \gamma = a,$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b - 3$$

et

$$\alpha\beta\gamma = c - 2\alpha - 2\beta - 2\gamma = c - 2a.$$

Quare α, β et γ erunt tres radices huius aequationis cubicae

$$u^3 - au^2 + (b-3)u - c + 2a = 0.$$

Similiter aequatio reciproca octavae potestatis

$$y^8 + ay^7 + by^6 + cy^5 + dy^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$$

est factum ex quatuor aequationibus quadraticis

$$y^2 + \alpha y + 1 = 0,$$

$$y^2 + \beta y + 1 = 0,$$

$$y^2 + \gamma y + 1 = 0$$

et

$$y^2 + \delta y + 1 = 0,$$

ex quo prodibit

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = a,$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = b - 4,$$

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = c - 3a$$

et

$$\alpha\beta\gamma\delta = d - 2b + 2.$$

Coefficientes ergo α, β, γ, δ sunt quatuor radices huius aequationis

$$u^4 - au^3 + (b-4)u^2 - (c-3a)u + d - 2b + 2 = 0.$$

Aequatio ordinis decimi

$$y^{10} + ay^9 + by^8 + cy^7 + dy^6 + ey^5 + dy^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$$

factum erit harum quinque

$$y^2 + \alpha y + 1 = 0,$$
$$y^2 + \beta y + 1 = 0,$$
$$y^2 + \gamma y + 1 = 0,$$
$$y^2 + \delta y + 1 = 0,$$
$$y^2 + \varepsilon y + 1 = 0,$$

in quibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sunt quinque radices huius aequationis

$$u^5 - au^4 + (b-5)u^3 - (c-4a)u^2 + (d-3b+5)u - e + 2c - 2a = 0.$$

Atque generatim aequatio reciproca

$$y^{2n} + ay^{2n-1} + by^{2n-2} + cy^{2n-3} + dy^{2n-4} + ey^{2n-5} + fy^{2n-6} + \cdots + py^n + \cdots$$
$$+ fy^6 + ey^5 + dy^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$$

resolvetur in has numero n aequationes quadraticas

$$\begin{aligned} y^2 + \alpha y + 1 &= 0, \\ y^2 + \beta y + 1 &= 0, \\ y^2 + \gamma y + 1 &= 0, \\ y^2 + \delta y + 1 &= 0 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

At coefficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. erunt radices huius aequationis n dimensionum

$$\begin{array}{llllll} u^n - au^{n-1} + bu^{n-2} & - cu^{n-3} & + du^{n-4} & - eu^{n-5} \\ \qquad\qquad\quad - n & + (n-1)a & - (n-2)b & + (n-3)c \\ & & + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} & - \frac{(n-1)(n-4)}{1 \cdot 2}a \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} + fu^{n-6} & - gu^{n-7} & + hu^{n-8} - \text{etc.} = 0. \\ - (n-4)d & + (n-5)e & - (n-6)f \\ + \frac{(n-2)(n-5)}{1 \cdot 2}b & - \frac{(n-3)(n-6)}{1 \cdot 2}c & + \frac{(n-4)(n-7)}{1 \cdot 2}d \\ - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} & + \frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a & - \frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3}b \\ & & + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \end{array}$$

12. Quia cuiuslibet aequationis quadraticae dividentis aequationem propositam terminus extremus est unitas, perspicuum est binarum radicum aequationis propositae factum esse unitatem. Huiusmodi igitur duae semper cum duobus membris $\sqrt[n]{A}$ et $\sqrt[n]{B}$ sunt coniungendae, quo aequationis § 9 propositae omnes obtineantur radices.

13. Si in aequatione reciproca omnes termini praeter extremos et medium deficiant ut in

$$y^{2n} + py^n + 1 = 0,$$

divisores eius

$$\begin{aligned} &y^2 + \alpha y + 1, \\ &y^2 + \beta y + 1, \\ &y^2 + \gamma y + 1 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

habebuntur substituendis pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. radicibus huius aequationis

$$u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}u^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}u^{n-6} + \cdots \pm p = 0,$$

ubi $+p$ accipi debet, si n est numerus par, et $-p$, si n est impar.[1]) Ex quo apparet hanc aequationem convenire cum aequatione

$$x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\beta} + \cdots = \alpha$$

§ 9 resoluta et hanc ob rem omnes divisores posse assignari.

14. Magnam isthaec in factores resolutio formulae $y^{2n} + py^n + 1$ habet utilitatem in integranda formula differentiali

$$\frac{dy}{y^{2n} + py^n + 1}$$

iam saepius a Geometris pertractata.[2]) Denominatore enim in suos factores $y^2 + \alpha y + 1$, $y^2 + \beta y + 1$ etc. resoluto tota integratio ad quadraturam circuli vel hyperbolae reducitur. Praeterea hoc plurimum iuvat, quod aequatio

$$u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}u^{n-4} - \cdots \pm p = 0,\text{[3])}$$

ex qua α, β, γ etc. determinantur, sectionem arcus circularis in n partes complectatur atque ita coefficientes α, β, γ etc. facillime inveniantur.

15. Revertamur autem ad modum ex aequationibus resolventibus ipsas aequationes resolvendas eliciendi. Sitque aequatio resolvens

$$z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma,$$

1) Hoc quidem veritati non est consentaneum. Si n est impar, ultimus aequationis terminus revera est $= -p$, at si n est par, ultimus terminus est $= p \pm 2$. F. R.

2) Vide L. EULERI Commentationes 162 et 163 (indicis ENESTROEMIANI): *Methodus integrandi formulas differentiales unicam variabilem involventes*, Comment. acad. sc. Petrop. **14** (1744/6), 1751, p. 3, et *Methodus facilior atque expeditior integrandi formulas differentiales rationales*, Comment. acad. sc. Petrop. **14** (1744/6), 1751, p. 99; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 17, p. 70, imprimis p. 141, et p. 149, imprimis p. 175 et 192. F. R.

3) Sed vide notam 1. F. R.

cuius tres radices sint A, B, C; erit ergo

$$\alpha = A + B + C, \quad \beta = AB + AC + BC \quad \text{et} \quad \gamma = ABC.$$

Radix itaque aequationis resolvendae x erit

$$= \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$$

atque ponatur

$$p = \sqrt[n]{AB} + \sqrt[n]{AC} + \sqrt[n]{BC}.$$

His factis erit

$$\sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2} + \sqrt[n]{C^2} = x^2 - 2p$$

et

$$\sqrt[n]{A^2B^2} + \sqrt[n]{A^2C^2} + \sqrt[n]{B^2C^2} = p^2 - 2x\sqrt[n]{\gamma};$$

atque porro, ut sequitur:

$$\sqrt[n]{A^3} + \sqrt[n]{B^3} + \sqrt[n]{C^3} = x^3 - 3px + 3\sqrt[n]{\gamma},$$

$$\sqrt[n]{A^3B^3} + \sqrt[n]{A^3C^3} + \sqrt[3]{B^3C^3} = p^3 - 3px\sqrt[n]{\gamma} + 3\sqrt[n]{\gamma^2};$$

$$\sqrt[n]{A^4} + \sqrt[n]{B^4} + \sqrt[n]{C^4} = x^4 - 4px^2 + 4x\sqrt[n]{\gamma} + 2p^2,$$

$$\sqrt[n]{A^4B^4} + \sqrt[n]{A^4C^4} + \sqrt[n]{B^4C^4} = p^4 - 4p^2x\sqrt[n]{\gamma} + 4p\sqrt[n]{\gamma^2} + 2x^2\sqrt[n]{\gamma^2};$$

$$\sqrt[n]{A^5} + \sqrt[n]{B^5} + \sqrt[n]{C^5} = x^5 - 5px^3 + 5x^2\sqrt[n]{\gamma} + 5p^2x - 5p\sqrt[n]{\gamma},$$

$$\sqrt[n]{A^5B^5} + \sqrt[n]{A^5C^5} + \sqrt[n]{B^5C^5} = p^5 - 5p^3x\sqrt[n]{\gamma} + 5p^2\sqrt[n]{\gamma^2} + 5px^2\sqrt[n]{\gamma^2} - 5x\sqrt[n]{\gamma^3}.$$

Quemadmodum haec tabula sit ulterius continuanda, facile perspicitur. Namque est

$$\sqrt[n]{A^m} + \sqrt[n]{B^m} + \sqrt[n]{C^m} = x(\sqrt[n]{A^{m-1}} + \sqrt[n]{B^{m-1}} + \sqrt[n]{C^{m-1}})$$
$$- p(\sqrt[n]{A^{m-2}} + \sqrt[n]{B^{m-2}} + \sqrt[n]{C^{m-2}}) + \sqrt[n]{\gamma}(\sqrt[n]{A^{m-3}} + \sqrt[n]{B^{m-3}} + \sqrt[n]{C^{m-3}})$$

atque

$$\sqrt[n]{A^mB^m} + \sqrt[n]{A^mC^m} + \sqrt[n]{B^mC^m} = p(\sqrt[n]{A^{m-1}B^{m-1}} + \sqrt[n]{A^{m-1}C^{m-1}} + \sqrt[n]{B^{m-1}C^{m-1}})$$
$$- x\sqrt[n]{\gamma}(\sqrt[n]{A^{m-2}B^{m-2}} + \sqrt[n]{A^{m-2}C^{m-2}} + \sqrt[n]{B^{m-2}C^{m-2}})$$
$$+ \sqrt[n]{\gamma^2}(\sqrt[n]{A^{m-3}B^{m-3}} + \sqrt[n]{A^{m-3}C^{m-3}} + \sqrt[n]{B^{m-3}C^{m-3}}).$$

16. Alias etiam harum progressionum non contemnendas observavi proprietates. Posito enim

$$\sqrt[n]{A^m}+\sqrt[n]{B^m}+\sqrt[n]{C^m}=R$$

et

$$\sqrt[n]{A^mB^m}+\sqrt[n]{A^mC^m}+\sqrt[n]{B^mC^m}=S$$

erit

$$\sqrt[n]{A^{2m}}+\sqrt[n]{B^{2m}}+\sqrt[n]{C^{2m}}=R^2-2S$$

et

$$\sqrt[n]{A^{2m}B^{2m}}+\sqrt[n]{A^{2m}C^{2m}}+\sqrt[n]{B^{2m}C^{2m}}=S^2-2R\sqrt[n]{\gamma^m}.$$

Simili modo est quoque

$$\sqrt[n]{A^{3m}}+\sqrt[n]{B^{3m}}+\sqrt[n]{C^{3m}}=R^3-3RS+3\sqrt[n]{\gamma^m}$$

et

$$\sqrt[n]{A^{3m}B^{3m}}+\sqrt[n]{A^{3m}C^{3m}}+\sqrt[n]{B^{3m}C^{3m}}=S^3-3RS\sqrt[n]{\gamma^m}+3\sqrt[n]{\gamma^{2m}}.$$

Atque hoc modo haec series procedit prorsus ut ipsa praecedens.

17. Si sit $n=2$, erit

$$\alpha=x^2-2p \quad \text{et} \quad \beta=p^2-2x\sqrt{\gamma}$$

hisque duabus aequationibus coniunctis habebitur

$$x=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$$

et

$$p=\sqrt{AB}+\sqrt{AC}+\sqrt{BC};$$

sunt autem A, B et C tres radices huius aequationis cubicae

$$z^3=\alpha z^2-\beta z+\gamma.$$

Eliminata ergo ex illis duabus aequationibus littera p prodibit

$$\left(\frac{x^2-\alpha}{2}\right)^2-2x\sqrt{\gamma}=\beta$$

seu

$$x^4-2\alpha x^2-8x\sqrt{\gamma}=4\beta-\alpha^2,$$

cuius aequationis itaque radix x est cognita, quippe $=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$; quae aequatio illi est consentanea, quae § 5 est resoluta.

Simili modo si quando duae huiusmodi aequationes occurrent

$$x^3 - 3px + 3\sqrt[3]{\gamma} = \alpha$$

et

$$p^3 - 3px\sqrt[3]{\gamma} + 3\sqrt[3]{\gamma^2} = \beta,$$

erit

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C}$$

et

$$p = \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{AC} + \sqrt[3]{BC}$$

existentibus A, B et C radicibus aequationis

$$z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$$

ut ante. Vel eliminata littera p prodibit aequatio inter x, α, β, γ, cuius radix x innotescet.

Eodem prorsus modo occurrentibus duabus hisce aequationibus

$$x^4 - 4px^2 + 4x\sqrt[4]{\gamma} + 2p^2 = \alpha$$

et

$$p^4 - 4p^2x\sqrt[4]{\gamma} + 4p\sqrt{\gamma} + 2x^2\sqrt{\gamma} = \beta$$

erit

$$x = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{C}$$

et

$$p = \sqrt[4]{AB} + \sqrt[4]{AC} + \sqrt[4]{BC}$$

et iterum sunt A, B et C radices huius aequationis

$$z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma.$$

Quo p facilius eliminetur, ponatur

$$x^2 - 2p = R \quad \text{et} \quad p^2 - 2x\sqrt[4]{\gamma} = S$$

eritque

$$R^2 - 2S = \alpha \quad \text{et} \quad S^2 - 2R\sqrt{\gamma} = \beta.$$

Iam ex illis duabus aequationibus exterminata p habebitur

$$x^4 = 2Rx^2 + 8x\sqrt[4]{\gamma} + 4S - R^2.$$

Comparetur haec aequatio cum ista

$$x^4 = ax^2 + bx + c;$$

erit

$$R = \frac{a}{2}, \quad \sqrt[4]{\gamma} = \frac{b}{8} \quad \text{seu} \quad \gamma = \frac{b^4}{4096} \quad \text{et} \quad S = \frac{c}{4} + \frac{a^2}{16}.$$

Hinc igitur habebitur

$$\alpha = \frac{a^2}{8} - \frac{c}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{c^2}{16} + \frac{a^2 c}{32} + \frac{a^4}{256} - \frac{a b^2}{64}.$$

Quamobrem erunt A, B et C tres radices huius aequationis

$$z^3 = \left(\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2}\right) z^2 - \left(\frac{a^4}{256} + \frac{a^2 c}{32} + \frac{c^2}{16} - \frac{ab^2}{64}\right) z + \frac{b^4}{4096},$$

id quod mire consentit cum eo, quod § 7 est inventum.

18. Quoties igitur accidit, ut calculus perducatur ad duas aequationes duas incognitas x et p continentes, quae reperiantur inter formulas § 15, utriusque valor poterit assignari, etiamsi eliminata altera aequatio prodeat maxime composita. Hanc ob rem in his casibus expediet calculum non ad unicam aequationem unicamque incognitam deducere, sed duas aequationes duas incognitas involventes retinere atque investigare, num forte inter illas formulas contineantur, id quod saepius, si calculus recte instituatur, evenire posse mihi persuasum est.

19. Quemadmodum autem aequationes resolventes

$$z^2 = \alpha z - \beta \quad \text{et} \quad z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$$

tractavimus, ita etiam ulterius est progrediendum ad aequationem

$$z^4 = \alpha z^3 - \beta z^2 + \gamma z - \delta$$

simili modo pertractandam. Scilicet si eius radices sint A, B, C et D, ponatur

$$\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} = x$$

et

$$\sqrt[n]{AB} + \sqrt[n]{AC} + \sqrt[n]{AD} + \sqrt[n]{BC} + \sqrt[n]{BD} + \sqrt[n]{CD} = p$$

atque

$$\sqrt[n]{ABC} + \sqrt[n]{ABD} + \sqrt[n]{ACD} + \sqrt[n]{BCD} = q$$

et quaerantur hinc expressiones pro

$$\sqrt[n]{A^m} + \sqrt[n]{B^m} + \text{etc.} \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{A^m B^m} + \sqrt[n]{A^m C^m} + \text{etc.} \quad \text{atque pro} \quad \sqrt[n]{A^m B^m C^m} + \text{etc.}$$

His perficiendis semper trinae invenientur aequationes x, p et q continentes pro quovis ipsius m valore. Atque simili modo occurrentibus tribus huiusmodi aequationibus tres incognitae constabunt.

20. Suspicor autem posito

$$x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}$$

aequationem rationalem[1]) posse concinnari, in qua x plures quam 5 non habeat dimensiones, etiamsi hoc fere impossibile videatur. Nam quemadmodum § 17 ex aequationibus

$$x^4 - 4px^2 + 4x\sqrt[4]{\gamma} + 2p^2 = \alpha$$

et

$$p^4 - 4p^2x\sqrt[4]{\gamma} + 4p\sqrt{\gamma} + 2x^2\sqrt{\gamma} = \beta$$

eliminanda p aequationem non plurium quam 4 dimensionum obtinuimus, quod pariter vix fieri posse videatur, ita etiam pro quinta potestate forte simile artificium usu venire potest, ut aequatio

$$x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tandem resolvi queat. Quod vero maximum in hoc perficiendo est subsidium, eo redit meo iudicio, ut α, β, γ et δ ex a, b, c et d debeant determinari, non vero vicissim; hoc enim casu aequatio ad multo altiorem eveheretur potestatem, quam opus est. Aliis autem, quos huiusmodi occupationes iuvant, hanc rem perficiendam vel mihi ad aliud tempus relinquo hoc solo nunc contentus me fortasse idoneam atque genuinam viam ostendisse.

1) Confer aequationem rationalem ab EULERO evolutam in epistola d. 16. Dec. 1752 ad CHR. GOLDBACH data, *Correspondance math. et phys. publiée par P. H. Fuss*, St.-Pétersbourg 1843, t. I, p. 595; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series III. F. R.

DEMONSTRATIO GEMINA THEOREMATIS NEUTONIANI QUO TRADITUR RELATIO INTER COEFFICIENTES CUIUSVIS AEQUATIONIS ALGEBRAICAE ET SUMMAS POTESTATUM RADICUM EIUSDEM[1]

Commentatio 153 indicis ENESTROEMIANI
Opuscula varii argumenti 2, 1750, p. 108—120

1. Postquam aequatio algebraica tam a fractionibus quam ab irrationalitate fuerit liberata atque ad huiusmodi formam reducta

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + \cdots \pm N = 0,$$

demonstrari solet in analysi huiusmodi aequationem tot semper habere radices, sive sint reales sive imaginariae, quot unitates contineantur in potestatis summae exponente n. Tum vero non minus certum est, si huius aequationis omnes radices fuerint $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots \nu$, coefficientes terminorum aequationis A, B, C, D, E etc. ex his radicibus ita conflari, ut sit

1) Confer praeter Commentationem 406 huius voluminis L. EULERI *Introductionem in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, t. I cap. X, § 166; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 8. Vide porro L. EULERI Commentationes 41 et 560 (indicis ENESTROEMIANI): *De summis serierum reciprocarum*, Comment. acad. sc. Petrop. 7 (1734/5), 1740, p. 123, et *Miscellanea analytica*, Opuscula analytica 1, 1783, p. 329, imprimis p. 337; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 14 et 4. F. R.

$A =$ summae omnium radicum $= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots + \nu,$

$B =$ summae productorum ex binis $= \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma +$ etc.,

$C =$ summae productorum ex ternis $= \alpha\beta\gamma +$ etc.,

$D =$ summae productorum ex quaternis $= \alpha\beta\gamma\delta +$ etc.,

$E =$ summae productorum ex quinis $= \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon +$ etc.

etc.,

ultimumque tandem terminum absolutum N esse productum ex omnibus radicibus $\alpha\beta\gamma\delta\cdots\nu$.

2. Quo iam theorema, cuius demonstrationem hic tradere constitui, facilius ac brevius enunciare queam, designet $\int\alpha$ summam omnium radicum, $\int\alpha^2$ summam quadratorum earumdem radicum, $\int\alpha^3$ summam cuborum radicum, $\int\alpha^4$ summam biquadratorum istarum radicum, et ita porro, ita ut sit

$$\int\alpha = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots + \nu,$$

$$\int\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \cdots + \nu^2,$$

$$\int\alpha^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3 + \cdots + \nu^3,$$

$$\int\alpha^4 = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \varepsilon^4 + \cdots + \nu^4,$$

$$\int\alpha^5 = \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \varepsilon^5 + \cdots + \nu^5$$

etc.

3. Hac signandi ratione exposita NEUTONUS[1]) affirmat istas potestatum, quae ex singulis radicibus formantur, summas per coefficientes aequationis A, B, C, D, E etc. ita definiri, ut sit

1) I. NEWTON (1643—1727), *Arithmetica universalis,* Cantabrigiae 1707, p. 251; 3. ed. (ed. G. I. 's GRAVESANDE) Lugd. Batav. 1732, p. 192. Observandum quidem est relationes sequentes inter coefficientes aequationis et summas potestatum radicum eiusdem (usque ad quartam potestatem) iam 1629 ab A. GIRARD (?—1632) expositas esse in libro, qui inscribitur *Invention nouvelle en l'algèbre*, Amsterdam 1629; Réimpression par D. BIERENS DE HAAN, Leiden 1884, fol. F 2. Vide etiam D. MAHNKE, *LEIBNIZ auf der Suche nach einer allgemeinen Primzahlgleichung*, Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/3, p. 29, imprimis p. 38, ubi exponitur eodem fere tempore quo NEUTONUS etiam LEIBNIZIUM suo ipsius ingenio, certe non post annum 1678, illas relationes invenisse, sed non publici iuris fecisse. F. R.

$$\int\alpha = A,$$
$$\int\alpha^2 = A\int\alpha - 2B,$$
$$\int\alpha^3 = A\int\alpha^2 - B\int\alpha + 3C,$$
$$\int\alpha^4 = A\int\alpha^3 - B\int\alpha^2 + C\int\alpha - 4D,$$
$$\int\alpha^5 = A\int\alpha^4 - B\int\alpha^3 + C\int\alpha^2 - D\int\alpha + 5E,$$
$$\int\alpha^6 = A\int\alpha^5 - B\int\alpha^4 + C\int\alpha^3 - D\int\alpha^2 + E\int\alpha - 6F$$
etc.

Cuius theorematis demonstrationem NEUTONUS non solum nullam tradit, sed etiam ipse videtur eius veritatem ex continua illatione conclusisse. Primum enim demonstratione non eget esse $\int\alpha = A$, et cum sit

$$A^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \text{etc.} + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\alpha\delta + 2\beta\gamma + 2\beta\delta + \text{etc.},$$

erit

$$A^2 = \int\alpha^2 + 2B$$

ideoque

$$\int\alpha^2 = A^2 - 2B = A\int\alpha - 2B;$$

similique modo veritas sequentium formularum evinci potest; sed continuo maiore opus erit labore.

4. Cum plures[1]) iam huius theorematis utilissimi veritatem ostenderint, eorum demonstrationes autem regulis combinationum plerumque innitantur, quae, etiamsi verae sint, tamen ab inductione[2]) plurimum pendeant, duplicem

1) Vide G. F. BAERMANN (1717—1769), *Programma theorematis algebraici demonstrationem exhibens*, Wittenberg 1745; A. G. KÄSTNER (1719—1800), *Philosophische Untersuchungen und Nachrichten*, herausgeg. von J. A. CRAMER, 6. St., Leipzig 1746 (confer etiam A. G. KÄSTNER, *Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen* (der mathem. Anfangsgründe 3. Theil, 1. Abth.), Göttingen 1760, p. 409). Vide porro *IOH. BERNOULLI Opera omnia*, Lausannae 1742, t. IV, p. 22, nec non epistolam a IOH. BERNOULLIO d. 2. Apr. 1737 ad EULERUM scriptam, Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, p. 251. Vide praeterea notam p. 20. F. R.

2) Exempli gratia KAESTNERUS supponit theorema NEUTONIANUM valere pro $n = k$ atque inde demonstrat etiam pro $n = k + 1$ verum esse. F. R.

hic afferam demonstrationem, in quarum utraque inductioni nihil tribuitur. Altera quidem ex analysi infinitorum est petita, quae, etsi nimis longe remota videatur, tamen totum negotium perfecte conficit; verum tamen cum contra eam iure obiici queat huius theorematis veritatem evictam esse oportere, antequam ad analysin infinitorum perveniatur, alteram demonstrationem adiungam, in qua nihil assumitur, nisi quod statim ab initio in explicatione naturae aequationum tradi solet.

DEMONSTRATIO 1

5. Ponatur

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \cdots \pm N = Z,$$

et cum aequationis $Z = 0$ radices seu valores ipsius x sint

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \nu,$$

quorum numerus est $= n$, erit ex natura aequationum

$$Z = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\cdots(x-\nu)$$

et logarithmis sumendis habebitur

$$lZ = l(x-\alpha) + l(x-\beta) + l(x-\gamma) + l(x-\delta) + \cdots + l(x-\nu).$$

Quodsi iam harum formularum differentialia capiantur, erit

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{dx}{x-\alpha} + \frac{dx}{x-\beta} + \frac{dx}{x-\gamma} + \frac{dx}{x-\delta} + \cdots + \frac{dx}{x-\nu}$$

ideoque per dx dividendo fiet

$$\frac{dZ}{Zdx} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + \frac{1}{x-\delta} + \cdots + \frac{1}{x-\nu}.$$

Convertantur nunc singulae hae fractiones more solito in series geometricas infinitas ob

$$\frac{1}{x-\alpha}=\frac{1}{x}+\frac{\alpha}{x^2}+\frac{\alpha^2}{x^3}+\frac{\alpha^3}{x^4}+\frac{\alpha^4}{x^5}+\frac{\alpha^5}{x^6}+\text{etc.},$$

$$\frac{1}{x-\beta}=\frac{1}{x}+\frac{\beta}{x^2}+\frac{\beta^2}{x^3}+\frac{\beta^3}{x^4}+\frac{\beta^4}{x^5}+\frac{\beta^5}{x^6}+\text{etc.},$$

$$\frac{1}{x-\gamma}=\frac{1}{x}+\frac{\gamma}{x^2}+\frac{\gamma^2}{x^3}+\frac{\gamma^3}{x^4}+\frac{\gamma^4}{x^5}+\frac{\gamma^5}{x^6}+\text{etc.}$$

etc.

$$\frac{1}{x-\nu}=\frac{1}{x}+\frac{\nu}{x^2}+\frac{\nu^2}{x^3}+\frac{\nu^3}{x^4}+\frac{\nu^4}{x^5}+\frac{\nu^5}{x^6}+\text{etc.}$$

His igitur seriebus colligendis signisque ante expositis $\int\alpha$, $\int\alpha^2$, $\int\alpha^3$ etc. introducendis invenietur, quia numerus harum serierum est $=n$,

$$\frac{dZ}{Zdx}=\frac{n}{x}+\frac{1}{x^2}\int\alpha+\frac{1}{x^3}\int\alpha^2+\frac{1}{x^4}\int\alpha^3+\frac{1}{x^5}\int\alpha^4+\text{etc.}$$

6. Cum autem statuerimus

$$Z=x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+Dx^{n-4}-\cdots\pm N,$$

erit similiter differentialibus sumendis

$$\frac{dZ}{dx}=nx^{n-1}-(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}-(n-3)Cx^{n-4}+(n-4)Dx^{n-5}-\text{etc.}$$

hincque colligetur superior formula $\frac{dZ}{Zdx}$ ita expressa, ut sit

$$\frac{dZ}{Zdx}=\frac{nx^{n-1}-(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}-(n-3)Cx^{n-4}+(n-4)Dx^{n-5}-\text{etc.}}{x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+Dx^{n-4}-\text{etc.}},$$

quae igitur fractio aequalis esse debet seriei supra inventae

$$\frac{n}{x}+\frac{1}{x^2}\int\alpha+\frac{1}{x^3}\int\alpha^2+\frac{1}{x^4}\int\alpha^3+\frac{1}{x^5}\int\alpha^4+\text{etc.}$$

Quare si utraque expressio pro $\frac{dZ}{Zdx}$ inventa per alterius denominatorem

$$x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+Dx^{n-4}-\text{etc.}$$

multiplicetur, resultabit haec aequatio

$$
\begin{aligned}
& nx^{n-1}-(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}-(n-3)Cx^{n-4}+(n-4)Dx^{n-5} - \text{etc.}\\
&= nx^{n-1} + x^{n-2}\int\alpha + x^{n-3}\int\alpha^2 + x^{n-4}\int\alpha^3 + x^{n-5}\int\alpha^4 + \text{etc.}\\
&\quad - nAx^{n-2} - Ax^{n-3}\int\alpha - Ax^{n-4}\int\alpha^2 - Ax^{n-5}\int\alpha^3 - \text{etc.}\\
&\quad + nBx^{n-3} + Bx^{n-4}\int\alpha + Bx^{n-5}\int\alpha^2 + \text{etc.}\\
&\quad - nCx^{n-4} - Cx^{n-5}\int\alpha - \text{etc.}\\
&\quad + nDx^{n-5} + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

7. Quemadmodum iam utrimque termini primi nx^{n-1} sunt aequales, necesse est, ut et secundi, tertii, quarti etc. inter se seorsim aequentur; unde sequentes nascentur aequationes

$$
\begin{aligned}
-(n-1)A &= \int\alpha - nA,\\
+(n-2)B &= \int\alpha^2 - A\int\alpha + nB,\\
-(n-3)C &= \int\alpha^3 - A\int\alpha^2 + B\int\alpha - nC,\\
+(n-4)D &= \int\alpha^4 - A\int\alpha^3 + B\int\alpha^2 - C\int\alpha + nD
\end{aligned}
$$

etc.

harumque aequationum lex, qua progrediuntur, sponte est manifesta. Ex iis autem obtinentur formulae illae ipsae, quibus theorema NEUTONIANUM constat, scilicet

$$
\begin{aligned}
\int\alpha &= A,\\
\int\alpha^2 &= A\int\alpha - 2B,\\
\int\alpha^3 &= A\int\alpha^2 - B\int\alpha + 3C,\\
\int\alpha^4 &= A\int\alpha^3 - B\int\alpha^2 + C\int\alpha - 4D,\\
\int\alpha^5 &= A\int\alpha^4 - B\int\alpha^3 + C\int\alpha^2 - D\int\alpha + 5E
\end{aligned}
$$

etc.

Quae est altera theorematis propositi demonstratio.

DEMONSTRATIO 2

8. Quo huius demonstrationis vis clarius perspiciatur, eam ad aequationem determinati gradus accommodabo, ita tamen, ut ea intelligatur ad quosvis gradus aeque patere. Sit ergo proposita aequatio quinti gradus

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0,$$

cuius quinque radices sint α, β, γ, δ, ε. Quia igitur quaelibet radix loco x substituta aequationi satisfacit, erit

$$\alpha^5 - A\alpha^4 + B\alpha^3 - C\alpha^2 + D\alpha - E = 0,$$
$$\beta^5 - A\beta^4 + B\beta^3 - C\beta^2 + D\beta - E = 0,$$
$$\gamma^5 - A\gamma^4 + B\gamma^3 - C\gamma^2 + D\gamma - E = 0,$$
$$\delta^5 - A\delta^4 + B\delta^3 - C\delta^2 + D\delta - E = 0,$$
$$\varepsilon^5 - A\varepsilon^4 + B\varepsilon^3 - C\varepsilon^2 + D\varepsilon - E = 0.$$

Colligentur hae aequationes in unam summam et ob signa supra recepta (§ 2) habebitur

$$\int\alpha^5 - A\int\alpha^4 + B\int\alpha^3 - C\int\alpha^2 + D\int\alpha - 5E = 0$$

seu

$$\int\alpha^5 = A\int\alpha^4 - B\int\alpha^3 + C\int\alpha^2 - D\int\alpha + 5E.$$

9. Hinc dilucide patet, si aequatio proposita fuerit gradus cuiuscumque

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \cdots \pm Mx \mp N = 0,$$

ubi in ultimis terminis signorum ambiguorum superiora valent, si exponens summus n fuerit numerus impar, inferiora, si par, fore pariter

$$\int\alpha^n = A\int\alpha^{n-1} - B\int\alpha^{n-2} + C\int\alpha^{n-3} - \cdots \mp M\int\alpha \pm nN,$$

siquidem per α indicetur radix quaelibet istius aequationis, sicque veritas Theorematis NEUTONIANI iam pro uno casu est ostensa. Superest igitur, ut eiusdem veritatem tam pro altioribus[1]) quam pro inferioribus radicum potestatibus demonstremus.

---

1) Num NEUTONUS huius casus rationem habuerit, non liquet; confer G. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/1, p. 84. F. R.

10. Pro altioribus quidem potestatibus res pari modo patet; si enim valores $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ satisfaciant aequationi

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0,$$

satisfacient quoque sequentibus aequationibus

$$x^6 - Ax^5 + Bx^4 - Cx^3 + Dx^2 - Ex = 0,$$
$$x^7 - Ax^6 + Bx^5 - Cx^4 + Dx^3 - Ex^2 = 0,$$
$$x^8 - Ax^7 + Bx^6 - Cx^5 + Dx^4 - Ex^3 = 0$$

etc.

Ac propterea si in unaquaque aequatione pro x singuli valores $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ substituantur et aggregata colligantur, erit

$$\int\alpha^6 = A\int\alpha^5 - B\int\alpha^4 + C\int\alpha^3 - D\int\alpha^2 + E\int\alpha,$$
$$\int\alpha^7 = A\int\alpha^6 - B\int\alpha^5 + C\int\alpha^4 - D\int\alpha^3 + E\int\alpha^2,$$
$$\int\alpha^8 = A\int\alpha^7 - B\int\alpha^6 + C\int\alpha^5 - D\int\alpha^4 + E\int\alpha^3$$

etc.

11. Si ergo α denotet radicem quamcumque huius aequationis

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \cdots \pm Mx \mp N = 0,$$

erit non solum, uti iam invenimus,

$$\int\alpha^n = A\int\alpha^{n-1} - B\int\alpha^{n-2} + C\int\alpha^{n-3} - D\int\alpha^{n-4} + \cdots \mp M\int\alpha \pm nN,$$

sed etiam ad altiores quoque potestates progrediendo erit

$$\int\alpha^{n+1} = A\int\alpha^n - B\int\alpha^{n-1} + C\int\alpha^{n-2} - D\int\alpha^{n-3} + \cdots \mp M\int\alpha^2 \pm N\int\alpha,$$
$$\int\alpha^{n+2} = A\int\alpha^{n+1} - B\int\alpha^n + C\int\alpha^{n-1} - D\int\alpha^{n-2} + \cdots \mp M\int\alpha^3 \pm N\int\alpha^2,$$
$$\int\alpha^{n+3} = A\int\alpha^{n+2} - B\int\alpha^{n+1} + C\int\alpha^n - D\int\alpha^{n-1} + \cdots \mp M\int\alpha^4 \pm N\int\alpha^3$$

etc.

et in genere quidem, si ad n addatur numerus quicumque m, erit

$$\int\alpha^{n+m} = A\int\alpha^{n+m-1} - B\int\alpha^{n+m-2} + C\int\alpha^{n+m-3} - \cdots \mp M\int\alpha^{m+1} \pm N\int\alpha^m.$$

Ubi quidem notandum est, si sit $m = 0$, ob singulas potestates $\alpha^0 = 1$, $\beta^0 = 1$, $\gamma^0 = 1$ etc. numerumque harum litterarum $= n$ fore $\int \alpha^0 = n$, quo casu formula primo inventa in hac expressione continetur.

12. Quamquam autem haec expressio aeque veritati est consentanea, si pro m accipiatur numerus negativus, hincque pro aequatione quinti gradus assumta

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

sequentes formulae pariter locum habent

$$\int \alpha^4 = A \int \alpha^3 - B \int \alpha^2 + C \int \alpha^1 \ - D \int \alpha^0 \ + E \int \alpha^{-1},$$
$$\int \alpha^3 = A \int \alpha^2 - B \int \alpha^1 + C \int \alpha^0 \ - D \int \alpha^{-1} + E \int \alpha^{-2},$$
$$\int \alpha^2 = A \int \alpha^1 - B \int \alpha^0 + C \int \alpha^{-1} - D \int \alpha^{-2} + E \int \alpha^{-3}$$

etc.,

tamen hae formulae sunt diversae ab iis, quas theorema continet. Demonstrandum enim est esse

$$\int \alpha^4 = A \int \alpha^3 - B \int \alpha^2 + C \int \alpha - 4D,$$
$$\int \alpha^3 = A \int \alpha^2 - B \int \alpha \ + 3C,$$
$$\int \alpha^2 = A \int \alpha \ - 2B,$$
$$\int \alpha \ = A.$$

Harum igitur formularum veritatem sequenti modo ostendo.

13. Proposita scilicet aequatione quinti gradus

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

formentur retinendis iisdem coefficientibus sequentes aequationes inferiorum graduum

I.	$x - A = 0.$	Radix sit p.
II.	$x^2 - Ax + B = 0.$	Radix quaelibet sit q.
III.	$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0.$	Sit radix quaelibet r.
IV.	$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0.$	Radix quaelibet s.

Quarum aequationum radices, etiamsi inter se maxime discrepent, tamen in his singulis aequationibus eandem constituent summam $= A$. Deinde remota prima summa productorum ex binis radicibus ubique erit eadem $= B$. Tum summa productorum ex ternis radicibus ubique erit $= C$, praeter aequationes scilicet I et II, ubi C non occurrit. Similiter in IV etc. proposita summa productorum ex quaternis radicibus erit eadem $= D$.

14. In quibus autem aequationibus non solum summa radicum est eadem, sed etiam summa productorum ex binis radicibus, ibi quoque summa quadratorum radicum est eadem. Sin autem praeterea summa productorum ex ternis radicibus fuerit eadem, tum summa quoque cuborum omnium radicum erit eadem. Atque si insuper summa productorum ex quaternis radicibus fuerit eadem, tum quoque summa biquadratorum omnium radicum erit eadem, atque ita porro. Hic scilicet assumo, quod facile concedetur, summam quadratorum per summam radicum et summam productorum ex binis determinari; summam cuborum autem praeterea requirere summam factorum ex ternis radicibus; ac summam biquadratorum praeterea summam factorum ex quaternis radicibus, et ita porro; quod quidem demonstratu non esset difficile.

15. In aequationibus ergo inferiorum graduum, quarum radices denotantur respective per litteras p, q, r, s, dum ipsius propositae quinti gradus quaelibet radix littera α indicatur, erit

$$\begin{aligned}
\textstyle\int\alpha &= \textstyle\int s = \int r = \int q = \int p,\\
\textstyle\int\alpha^2 &= \textstyle\int s^2 = \int r^2 = \int q^2,\\
\textstyle\int\alpha^3 &= \textstyle\int s^3 = \int r^3,\\
\textstyle\int\alpha^4 &= \textstyle\int s^4.
\end{aligned}$$

At per ea, quae ante § 9 demonstravimus, est

$$\begin{aligned}
\textstyle\int p &= A,\\
\textstyle\int q^2 &= A\textstyle\int q - 2B,\\
\textstyle\int r^3 &= A\textstyle\int r^2 - B\int r + 3C,\\
\textstyle\int s^4 &= A\textstyle\int s^3 - B\int s^2 + C\int s - 4D.
\end{aligned}$$

Hinc ergo nanciscimur pro aequatione quinti gradus proposita

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

has formulas

$$\begin{aligned}
\int\alpha &= A,\\
\int\alpha^2 &= A\int\alpha - 2B,\\
\int\alpha^3 &= A\int\alpha^2 - B\int\alpha + 3C,\\
\int\alpha^4 &= A\int\alpha^3 - B\int\alpha^2 + C\int\alpha - 4D.
\end{aligned}$$

16. In aequatione ergo cuiuscumque gradus proposita

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \cdots \pm N = 0$$

si quaelibet radix littera α indicetur, erit

$$\begin{aligned}
\int\alpha &= A,\\
\int\alpha^2 &= A\int\alpha - 2B,\\
\int\alpha^3 &= A\int\alpha^2 - B\int\alpha + 3C,\\
\int\alpha^4 &= A\int\alpha^3 - B\int\alpha^2 + C\int\alpha - 4D,\\
\int\alpha^5 &= A\int\alpha^4 - B\int\alpha^3 + C\int\alpha^2 - D\int\alpha + 5E
\end{aligned}$$

etc.

Hocque modo veritas Theorematis NEUTONIANI pariter habetur demonstrata.

DE EXTRACTIONE RADICUM EX QUANTITATIBUS IRRATIONALIBUS

Commentatio 157 indicis ENESTROEMIANI
Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **13** (1741/3), 1751, p. 16—60

1. Veteres Analystae ingens studium impendere sunt soliti in doctrinam quantitatum irrationalium seu surdarum; atque in hoc genere potissimum occupati fuerant, quemadmodum ex dato binomio vel residuo radicem tam cubicam altiorisve gradus quam quadraticam extrahere queant. Cum enim extractio radicum ex numeris rationalibus nulla amplius difficultate laboraret, numeri irrationales eo maiorem molestiam pepererunt, quo minus nexus patebat inter radicem irrationalem ipsam eiusque potestates cuiusvis gradus. Maxima autem difficultas in hoc versabatur, ut dignoscere possent, utrum propositum binomium admittat radicem pariter binomiam eius potestatis, quae quaeritur, an non. Quodsi enim compertum fuerit dari eiusmodi radicem, ipsa huius radicis inventio non amplius erit difficilis. Sin autem constiterit talem radicem omnino non dari, praefixione signi radicalis, uti in numeris rationalibus usu venire solet, totum negotium absolvetur.

2. In hac disquisitione potissimum considerari solent quantitates binomiae huius formae

$$A \pm B$$

denotantibus litterarum A et B altera numerum rationalem, altera irrationalem signo radicis quadratae contentum. Duplicis vero huius formae $A \pm B$ altera $A + B$ nomen binomii, altera $A - B$ nomen residui obtinuit. Inter utramque formam tam arctus intercedit nexus, ut inventa alterius formae

radice cuiusvis gradus ex ea simul radix alterius formae facillime formari queat. Si enim radix cuiusque potestatis ex binomio $A+B$ fuerit $x+y$, tum respondentis residui $A-B$ radix eiusdem potestatis erit $x-y$. Cuius nexus ratio ex formis, quas potestates quaecumque binomiorum ac residuorum induunt, facile perspicitur.

3. Utrum huiusmodi binomium $A+B$ vel residuum $A-B$ admittat radicem quadratam an secus, discerni solet ex differentia quadratorum utriusque partis, quae est $AA-BB$; quae si fuerit numerus quadratus, puta $=CC$, erit[1]) radix quadrata ex binomio $A+B$

$$=\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}},$$

residui autem $A-B$ radix quadrata erit

$$=\sqrt{\frac{A+C}{2}}-\sqrt{\frac{A-C}{2}}.$$

Haec ergo radicis quadratae extractio ex forma $A\pm B$ succedit, si quantitas A, quae maior censetur altera quantitate B, simul fuerit rationalis. Namque si A esset quantitas irrationalis, tum in radice $\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}}$ post signa radicalia adhuc numeri surdi continerentur foretque ista radicis expressio magis perplexa, quam si radix more solito hoc modo $\sqrt{(A\pm B)}$ exprimeretur.

4. Regula haec pro extrahenda radice quadrata ex binomiis et residuis data cum facilis est tum etiam eius demonstratio ex sola inspectione perspicitur. Cum enim sit

$$\sqrt{(A\pm B)}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}},$$

fiet utrimque quadratis sumendis

$$A\pm B=\frac{A+C}{2}+\frac{A-C}{2}\pm 2\sqrt{\frac{AA-CC}{4}}=A\pm\sqrt{(AA-CC)}.$$

At cum sit $CC=AA-BB$, erit $\sqrt{(AA-CC)}=B$ hincque prodit aequatio identica $A\pm B=A\pm B$.

1) I. Neutoni *Arithmetica universalis*, 3. ed. (vide notam p. 21), p. 49. F. R.

Sit exempli causa propositum sequens binomium

$$54 \pm \sqrt{980} \quad \text{seu} \quad 54 \pm 14\sqrt{5},$$

ex quo oporteat radicem quadratam extrahere. Ac primo quidem constat partem rationalem 54 maiorem esse parte irrationali $\sqrt{980}$, quod est primum requisitum. Ponatur ergo

$$A = 54 \quad \text{et} \quad B = \sqrt{980}$$

et quaeratur differentia quadratorum $AA - BB$, quae fit $= 1936$, qui numerus, cum sit quadratus, certo indicat desideratam radicis extractionem succedere debere. Posito ergo $1936 = CC$ fiet $C = 44$ hincque

$$\frac{A+C}{2} = 49 \quad \text{et} \quad \frac{A-C}{2} = 5.$$

Consequenter radix quadrata ex proposito numero $54 \pm \sqrt{980}$ erit

$$= 7 \pm \sqrt{5}.$$

Prodit hic radicis altera pars rationalis; saepenumero autem invenitur radix, quae ex duabus partibus irrationalibus constat. Quodsi autem in radice signa radicalia potestatis quartae admittantur, in multo pluribus casibus radices inveniri possunt, quibus regula hic data non commode applicari potest.

5. Regulae igitur datae aliam substituamus, quae perpetuo, quoties quidem radix quadrata ex binomio datur, hanc radicem in forma simplicissima suppeditet. Sit binomium

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b},$$

ex quo radicem quadratam extrahi oporteat, in quo vel utrumque membrum sit irrationale vel alterutrum tantum. Ex tali binomio, quod regulam praecedentem effugit, dico primo radicem extrahi posse, si fuerit $a(a-b)$ quadratum; perpetuo ergo $\sqrt{a}$ nobis partem maiorem denotabit et $\sqrt{b}$ minorem. Sit igitur $a(a-b) = cc$ ac ponatur differentia $a - b = d$. His valoribus inventis erit radix quadrata ex binomio $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ haec

$$\frac{\sqrt{\frac{c+d}{2}} \pm \sqrt{\frac{c-d}{2}}}{\sqrt[4]{d}}.$$

Sic si proponatur hoc binomium

$$\sqrt{12} \pm 3,$$

in quo pars irrationalis $\sqrt{12}$ maior sit parte rationali 3, fiet $a = 12$ et $b = 9$ eritque $a - b = 3 = d$ et $a(a - b) = 36 = cc$, unde $c = 6$. Ex his definietur radix quadrata ex binomio proposito haec

$$\frac{\sqrt{\frac{9}{2}} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{\sqrt[4]{12}}.$$

Ex quo intelligitur hanc regulam non solum praecedentem in se complecti, sed etiam in innumerabilibus casibus utilitatem afferre, in quibus praecedens frustra adhibetur.

6. Sit nunc binomium propositum hoc

$$4\sqrt{3} + 3\sqrt{5},$$

cuius utraque pars est irrationalis, ex quo radix quadrata debeat extrahi. Posita parte maiore $4\sqrt{3} = \sqrt{a}$ et minore $3\sqrt{5} = \sqrt{b}$ fiet $a = 48$ et $b = 45$, ex quo erit $a - b = 3 = d$. Nunc igitur videndum est, an sit $a(a - b)$ quadratum; quod nisi fuerit, omnis opera in radice assignanda frustra collocaretur. Fit autem $a(a - b) = 48 \cdot 3 = 144$; qui numerus quadratus si ponatur $= cc$, erit $c = 12$ atque $\frac{c + d}{2} = \frac{15}{2}$ et $\frac{c - d}{2} = \frac{9}{2}$. Quamobrem radix quadrata quaesita erit

$$= \frac{\sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{\frac{9}{2}}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{15} + 3}{\sqrt[4]{12}}.$$

Hinc porro residui $4\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$ radix quadrata erit

$$= \frac{\sqrt{15} - 3}{\sqrt[4]{12}}.$$

Quamquam autem in his radicibus radix biquadrata $\sqrt[4]{12}$ inest, tamen ea merito tolerari solet, eo quod ea numero integro est praefixa hincque facile evolvi potest. Habet autem utique ista forma $\frac{\sqrt{15} + 3}{\sqrt[4]{12}}$ magnam praerogativam prae illa forma, quae oritur, si signum radicale binomio proposito $4\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$

simpliciter praefigatur; facilius enim valor expressionis $\frac{\sqrt{15}+3}{\sqrt[4]{12}}$ intelligitur quam huius $\sqrt{(4\sqrt{3}+3\sqrt{5})}$ ob irrationalitatem post signum radicale complicatam.

7. Multo maiore difficultate laborat extractio radicis cubicae altiorisve potestatis ex huiusmodi binomiis; neque enim pro his certa criteria assignari possunt, ex quibus dignosci queat, utrum radix in tali forma binomia detur an non. Quocirca eiusmodi operatione negotium perfici conveniet, quae manuducat ad veram radicem, siquidem talis detur; contra autem radicem falsam exhibeat. Eiusmodi igitur operatione peracta dispiciendum erit, utrum expressio resultans sit vera binomii propositi radix quaesita an secus; id quod plerumque primo intuitu sese prodere solet. Quodsi enim in expressione inventa eiusmodi quantitates surdae insint, quae omnino discrepent ab iis, quae in binomio proposito continentur, id certo erit indicio radicem veram non resultasse. Sin autem forma expressionis inventae ita sit comparata, ut possit esse vera radix, tum demum examen institui oportebit ad diiudicandum, utrum ea sit vera radix an minus. Hanc ob causam plus in hoc negotio praestari non potest, nisi ut regula tradatur, quae certo praebeat veram radicem, si talis detur in forma binomia; etiamsi eadem regula in casu contrario perpetuo falsum exhibeat. Quae cum ab analyseos principiis vehementer abhorreant, quippe quae in sola veritate investiganda versantur, perspicuum est inventionem eiusmodi regulae ex alio fonte peti debere.

8. In eiusmodi regula invenienda, quae tantum radici cubicae extrahendae inserviat, veteres multum erant occupati, neque tamen quisquam talem regulam protulit, quae certo veram radicem suppeditaret, siquidem talis detur. NEUTONUS vero hoc negotium penitus confecisse videtur in *Arithmetica universali*, ubi tradit regulam pro radice cuiuscumque potestatis ex proposito binomio invenienda; eamque eius indolis esse perhibet, ut, si binomium admittat radicem istius potestatis, regula illa hanc radicem certissime sit patefactura. Regula haec NEUTONI ita se habet.[1]) Sit $A \pm B$ binomium propositum, ex quo radicem potestatis, cuius exponens sit $= c$, extrahi oporteat. Quaeratur primo minimus numerus integer n, cuius potestas exponentis c, nempe n^c, divisibilis sit per $AA - BB$, quotusque, qui oritur ex divisione potestatis n^c

1) I. NEUTONI *Arithmetica universalis*, 3. ed. (vide notam p. 21), p. 50—51. F. R.

per $AA - BB$, ponatur $= Q$. Deinde quaeratur valor huic expressioni $\sqrt[c]{(A+B)\sqrt{Q}}$ proxime conveniens in numeris integris, qui ponatur $= r$. Tertio dividatur expressio $A\sqrt{Q}$ per maximum divisorem rationalem integrum, ut supersit quotus irrationalis ulterius non reducibilis, qui ponatur $= s$. Quarto definiatur numerus integer, qui proxime accedat ad valorem huius expressionis $\frac{rr+n}{2rs}$, qui sit $= t$. His praeparatis NEUTONUS asserit radicem desideratam, siquidem binomium propositum $A \pm B$ talem admittat, fore[1])

$$= \frac{ts \pm \sqrt{(ttss+n)}}{\sqrt[2c]{Q}};$$

ubi notandum est in binomio $A \pm B$ nullas inesse debere fractiones, et si tales insint, eas prius more solito tolli oportere.

9. Bonitatem huius regulae satis complicatae et analyseos principiis admodum adversantis pluribus exemplis pro variis radicibus allatis confirmare est conatus NEUTONUS atque eius ope perpetuo in assumtis exemplis veram elicuit radicem; quod si semper usu veniret, regula eius nulla amplius correctione egeret. Incidi autem nuper in binomium hoc

$$5\sqrt{5} + 11,$$

cuius radix surdesolida mihi constabat esse

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}};$$

periculum igitur mihi facere visum est, an NEUTONI regula hanc radicem praeberet. Erit igitur

$$5\sqrt{5} = A, \quad 11 = B,$$

et quia radix potestatis quintae desideratur, fiet $c = 5$. Iam erit $AA - BB = 4$, ex quo minima potestas quinta divisibilis per $AA - BB = 4$ prodit $= 32$, unde fit $n = 2$ et

$$\frac{n^c}{AA - BB} = \frac{32}{4} = 8 = Q.$$

1) Revera NEUTONUS asserit radicem desideratam fore

$$\frac{ts \pm \sqrt{(ttss-n)}}{\sqrt[2c]{Q}}.$$

F. R.

Deinde abibit $\sqrt[c]{(A+B)\sqrt{Q}}$ in $\sqrt[5]{(5\sqrt{5}+11)\sqrt{8}}$ seu in $\sqrt[5]{(5\sqrt{40}+11\sqrt{8})}$, ad cuius valorem in numeris integris proximum inveniendum fit

$$5\sqrt{40}=31{,}622 \quad \text{et} \quad 11\sqrt{8}=31{,}112 \quad \text{ideoque} \quad 5\sqrt{40}+11\sqrt{8}=62{,}734,^{1)}$$

cuius radix surdesolida est $=2{,}288$, hincque numerus integer proxime conveniens $r=2$. Tertio fit $A\sqrt{Q}=5\sqrt{40}=10\sqrt{10}$, cuius maximus divisor rationalis est 10 et quotus $\sqrt{10}$, ex quo erit $s=\sqrt{10}$. Quarto fit

$$\frac{rr+n}{2rs}=\frac{6}{4\sqrt{10}}=\frac{3}{2\sqrt{10}},$$

ad quam fractionem proxime accedit numerus integer $t=1$, ita ut sit $ts=\sqrt{10}$ et $\sqrt{(ttss+n)}=\sqrt{12}$, unde radix quaesita, quia datur, esse deberet[2])

$$=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{12}}{\sqrt[10]{8}},$$

quae vehementer differt a vera, quae est $=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}$. Hocque adeo casu NEUTONI regula ostenderet binomium propositum $5\sqrt{5}+11$ omnino non admittere radicem surdesolidam binomialem, eo quod in radice inventa $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{12}}{\sqrt[10]{8}}$ seu $\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{3}}{\sqrt[10]{8}}$ inest $\sqrt{3}$, quae in potestatem quintam necessario ingredi deberet.

10. Regula ergo NEUTONI hoc vitio, quod in isto negotio maximum est, laborat, ut saepenumero radicem veram, etsi talis in forma binomia datur, non exhibeat; quamobrem in aliam regulam vitio hoc carentem inquirens sequentem inveni ex ipsa rei natura petitam, quae simul non solum perpetuo feliciori cum successu, sed etiam minori opera adhiberi queat. Ipsaque regula cum modo, quo eam sum nactus, ita se habet. Sit $A\pm B$ binomium seu residuum, ex quo radicem potestatis, cuius exponens sit $=n$, extrahere oporteat; in A vero et B nullae insint fractiones, ita ut sint A et B numeri

1) Accuratiores valores sunt $5\sqrt{40}=31{,}623$, $11\sqrt{8}=31{,}113$, $5\sqrt{40}+11\sqrt{8}=62{,}735$. F. R.

2) Secundum NEUTONI regulam (vide notam p. 36) radix quaesita esse deberet $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{8}}{\sqrt[10]{8}}$; sed etiam haec formula valorem exhibet, qui vehementer differt a vero. F. R.

integri sive ambo irrationales sive unus dumtaxat. Aliam vero irrationalitatem non inesse pono praeter simplicem signo radicali quadrato contentam. Ex quo utriusque binomii $A \pm B$ partis quadratum erit numerus rationalis integer, scilicet AA erit numerus rationalis integer atque etiam BB; pono autem esse $AA > BB$.

11. Quodsi iam hoc binomium vel residuum $A \pm B$ habeat radicem potestatis n binomiam, ea necesse est habeat huiusmodi formam

$$\frac{x \pm y}{\sqrt[2n]{p}}.$$

Huius enim formae potestas exponentis n talis erit $\frac{M \pm N}{\sqrt{p}}$, quae utique, si M et N sint divisibiles per $\sqrt{p}$, abire potest in formam integram $A \pm B$. In radice ergo assumta $\frac{x \pm y}{\sqrt[2n]{p}}$ debebit esse p numerus integer rationalis, atque x et y sive ambo sint numeri irrationales sive alteruter tantum, eorum quadrata xx et yy numeros rationales fieri oportet. Quare ob affinitatem binomii cum residuo emergent statim hae duae aequationes

$$\sqrt[n]{(A+B)} = \frac{x+y}{\sqrt[2n]{p}},$$

$$\sqrt[n]{(A-B)} = \frac{x-y}{\sqrt[2n]{p}}.$$

His duabus aequationibus in se mutuo ductis prodibit

$$\sqrt[n]{(AA-BB)} = \frac{xx-yy}{\sqrt[n]{p}}$$

hincque

$$xx - yy = \sqrt[n]{(AA-BB)p}.$$

Cum igitur tam $xx - yy$ quam $AA - BB$ et p sint numeri integri rationales, pro p talem numerum accipi oportet, ut productum $(AA - BB)p$ fiat potestas exponentis n. Quocirca quaeri debet eiusmodi potestas n, puta r^n, quae sit divisibilis per $AA - BB$, eaque minima, quae exhiberi queat, ut calculus ad minimos numeros redigatur. Cognoscentur ergo numeri p et r ex aequatione

$$p = \frac{r^n}{AA-BB};$$

quibus inventis erit

$$xx - yy = r$$

ideoque iam differentia quadratorum partium x et y, quibus radix constat, innotescit. Atque hucusque convenit operatio cum ea, quam NEUTONUS in sua regula instituere iubet.

12. Cognita differentia quadratorum radicis partium $xx - yy$, quae est rationalis, quaero summam quadratorum earumdem partium, quae pariter esse debet numerus rationalis integer. Fiet autem addendis quadratis binarum aequationum propositarum

$$\sqrt[n]{(A+B)^2} + \sqrt[n]{(A-B)^2} = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{\sqrt[n]{p}}$$

hincque

$$xx + yy = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{(A+B)^2 p} + \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{(A-B)^2 p}.$$

Aequatur ergo $xx + yy$ summae duarum quantitatum irrationalium; unde si radix exhiberi potest, necesse est, ut summa binarum illarum quantitatum irrationalium fiat numerus rationalis integer. Hic itaque prodibit, si numeri integri quaerantur proxime accedentes ad valores irrationales

$$\sqrt[n]{(A+B)^2 p} \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{(A-B)^2 p}$$

sumendo alterum iusto maiorem, alterum iusto minorem. Sit igitur proxime

$$\sqrt[n]{(A+B)^2 p} = s \pm \text{fractione},$$

$$\sqrt[n]{(A-B)^2 p} = t \mp \text{fractione}$$

hincque numeri integri s et t ope consuetae radicum extractionis reperientur, quibus inventis erit

$$xx + yy = \frac{s+t}{2}.$$

Ex hisque tandem resultabit

$$xx = \frac{2r+s+t}{4} \quad \text{et} \quad yy = \frac{s+t-2r}{4}$$

atque radix quaesita tandem erit haec

$$\frac{\sqrt{(2r+s+t)} \pm \sqrt{(s+t-2r)}}{2\sqrt[2n]{p}}.$$

13. Non solum regula haec minori opera quam NEUTONIANA ad calculum revocatur, sed etiam tutius operatur; nam cum secundum NEUTONI regulam aliquoties valor alicuius quantitatis irrationalis proxime in numeris integris accipi debeat neque praescribatur, utrum numeri integri iusto maiores esse debeant an minores, saepenumero ambigere debemus, utrum iusto maiores numeros an iusto minores capiamus. Nostra autem hic data regula ista ambiguitate caret; etsi enim bis radicis irrationalis cuiuspiam valor proximus accipi debet, tamen simul innuimus alterum valorem iusto maiorem esse debere, alterum iusto minorem, ita ut in binorum horum valorum summa nulla ambiguitas locum habere queat. Praeterea in hac operatione facili negotio investigari potest, utrum radix proditura vera sit an falsa. Ad hoc scilicet dignoscendum valores quantitatum

$$\sqrt[n]{(A+B)^2 p} \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{(A-B)^2 p}$$

non solum in numeris integris, sed etiam in fractionibus decimalibus ad aliquot figuras computentur atque tum facile patebit, utrum eorum valorum summa numerum integrum constituat an secus; quodsi enim sensibiliter a numero integro aberret, hoc certum erit indicium radicem penitus non dari, contrario autem casu de veritate radicis inventae certi esse poterimus. Perpetuo ergo nostra regula veram radicem, siquidem talis datur, praebebit, et si non datur, facili labore id patefaciet.

14. Ad usum huius regulae monstrandum sumam superius exemplum, cui NEUTONI regula impar est inventa, et quaeratur radix surdesolida huius binomii [§ 9]

$$5\sqrt{5}+11.$$

Erit ergo

$$A=5\sqrt{5}, \quad B=11 \quad \text{et } n=5.$$

Porro est $AA-BB=4$, et ut valor fractionis $\frac{r^5}{4}$ fiat numerus integer, capi debet $r=2$, unde fit $p=\frac{r^5}{4}=8$. Tertio habetur

$$(A+B)^2=246+110\sqrt{5}$$

atque

$$(A-B)^2=246-110\sqrt{5}.$$

Hinc radicem $\sqrt{5}$ in fractionibus decimalibus exprimendo reperietur

$$(A+B)^2p = 3935{,}7333,$$
$$(A-B)^2p = 0{,}2666.\text{[1]}$$

Iam ex utroque valore extrahatur radix surdesolida reperieturque

$$\sqrt[5]{(A+B)^2p} = 5{,}23\,\text{[1]}$$
$$\sqrt[5]{(A-B)^2p} = 0{,}76$$
$$\text{summa} \quad = 6 = s+t$$

simulque videmus 6 esse veram summam; eadem autem prodiisset, si pro $\sqrt[5]{(A+B)^2p}$ assumsissemus radicem iusto minorem 5 et pro $\sqrt[5]{(A-B)^2p}$ radicem iusto maiorem 1. Litteris ergo r, s et t inventis erit binomii propositi radix surdesolida haec

$$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2\sqrt[10]{8}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{5}+1)}{2^{\frac{13}{10}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2^{\frac{4}{5}}},$$

ita ut hoc modo vera radix prodeat, nempe $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}$, quam quidem iam a priori noveram.

15. Sit ulterioris dilucidationis gratia propositum sequens binomium

$$139\sqrt{3}+91\sqrt{7},$$

ex quo oporteat extrahi radicem potestatis septimae, fietque $n=7$ atque radix quaesita huiusmodi habebit formam

$$\frac{x+y}{\sqrt[14]{p}}.$$

1) Accuratiores valores sunt

$$(A+B)^2p = 3935{,}7398,$$
$$(A-B)^2p = 0{,}2602,$$
$$\sqrt[5]{(A+B)^2p} = 5{,}24.$$

F. R.

Cum iam sit

$$B = 139\sqrt{3} = \sqrt{57963} \quad \text{atque} \quad A = 91\sqrt{7} = \sqrt{57967},$$

erit $AA - BB = 4$ et $p = \frac{r^7}{4}$. Ex quo fiet $r = 2$ et $p = 32$ ideoque $xx - yy = 2$. Porro est

$$(A + B)^2 = 115930 + 25298\sqrt{21}$$

atque

$$(A - B)^2 = 115930 - 25298\sqrt{21}.$$

Hinc quantitatibus surdis in fractionibus decimalibus proxime exprimendis prodibit

$$(A + B)^2 p = 7419519{,}99760,$$
$$(A - B)^2 p = \quad 0{,}00240,$$ [1]

ex quibus radices septimae potestatis erunt

$$\sqrt[7]{(A + B)^2 p} = 9{,}58, \quad s = 9,$$
$$\sqrt[7]{(A - B)^2 p} = 0{,}42, \quad t = 1.$$

Quamobrem erit $xx + yy = 5$ hincque $xx = \frac{7}{2}$ et $yy = \frac{3}{2}$, ita ut radix quaesita futura sit

$$= \frac{\sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt[14]{32}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt[7]{64}},$$

quam ex ipsa operatione iam veram esse radicem affirmare possumus, eo quod vidimus valorem $s + t$ revera numero integro esse aequalem neque tantum proxime, sed revera fieri $s + t = 10$.

16. Quamvis haec methodus latissime patere videatur, ita ut perpetuo felici successu adhiberi queat, tamen uno laborat defectu, quod ea ad eiusmodi binomia, in quibus quantitates imaginariae insunt, adcommodari nequeat. Cum enim approximatione sit utendum, facile intelligitur hanc operationis

---

1) Accuratiores valores sunt

$$(A + B)^2 p = 7419519{,}99779,$$
$$(A - B)^2 p = \quad 0{,}00221.$$

F. R.

partem in imaginariis locum habere non posse. Idem hoc incommodum multo magis impedit regulam NEUTONIANAM, in qua id tolli nullo modo potest; verum in nostra methodo huic incommodo medela afferri poterit. Ope approximationis scilicet valorem huius expressionis

$$\frac{\sqrt[n]{(A+B)^2p}+\sqrt[n]{(A-B)^2p}}{2}$$

investigavimus; quare alia via erit tentanda ad hunc valorem inveniendum, si quantitates affuerint imaginariae in alterutra quantitatum A vel B. Ad hoc efficiendum pono

$$z=\sqrt[n]{(A+B)^2p}+\sqrt[n]{(A-B)^2p}$$

atque hanc quantitatem z, cuius valor indagatur, considero tamquam radicem cuiusdam aequationis algebraicae, quae habebit n dimensiones. Neque vero hanc ob rem determinatio quantitatis z resolutionem aequationis n dimensionum requirere censenda est; quia enim quaestio in hoc tantum versatur, utrum z habeat valorem in numeris integris, et si habet, quis ille sit, haec investigatio per regulas notas in aequatione quotcumque dimensionum institui poterit.

17. Ex resolutione aequationum altiorum graduum, quam Cel. MOIVREUS[1]) primus docuit, constat huius aequationis

$$\alpha=z^n-nz^{n-2}\sqrt[n]{\beta}+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}z^{n-4}\sqrt[n]{\beta^2}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}z^{n-6}\sqrt[n]{\beta^3}$$
$$+\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}z^{n-8}\sqrt[n]{\beta^4}-\text{etc.}$$

radicem esse

$$z=\sqrt[n]{\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha^2-4\beta)}}{2}}+\sqrt[n]{\frac{\alpha-\sqrt{(\alpha^2-4\beta)}}{2}}.$$

Cum iam in nostro casu sit

$$z=\sqrt[n]{((A^2+B^2)p+2pAB)}+\sqrt[n]{((A^2+B^2)p-2pAB)},$$

fiet

$$\alpha=2p(AA+BB)$$

et

$$\sqrt{(\alpha\alpha-4\beta)}=4pAB,$$

1) Vide § 9 Commentationis 30 huius voluminis atque imprimis notam ibi adiectam. F. R.

unde

$$\beta = pp(AA - BB)^2 = r^{2n}$$

ob $p(AA - BB) = r^n$. Obtinebitur ergo ista aequatio

$$z^n - nr^2 z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} r^4 z^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^6 z^{n-6} + \text{etc.} = 2p(AA + BB).$$

Ex qua si valor ipsius z innotuerit, erit

$$xx + yy = \frac{1}{2} z,$$

et cum sit

$$xx - yy = r,$$

fiet

$$x = \frac{\sqrt{(z + 2r)}}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{\sqrt{(z - 2r)}}{2};$$

adeoque radix potestatis n ex binomio $A \pm B$ erit

$$= \frac{\sqrt{(z + 2r)} \pm \sqrt{(z - 2r)}}{2 \sqrt[2n]{p}}.$$

Valores hi p et r cognoscuntur ex aequatione $p(AA - BB) = r^n$ atque valor litterae z ex aequatione supra data n dimensionum. Ad hunc autem inveniendum tantum inquiri oportet, utrum illa aequatio habeat radicem in numeris integris, et si habet, ea pro valore ipsius z capiatur.

18. Inservit hic modus non solum radicibus ex binomiis imaginariis inveniendis, sed etiam commode adhiberi potest ad radices ex binomiis realibus investigandas. Quodsi enim isto modo uti velimus, tum citra approximationem primum dignoscere poterimus, utrum radix detur in forma binomii, et si detur, quaenam ea sit; prius scilicet patebit, si aequatio n dimensionum habeat radicem realem, deinde ipsa radix invenietur, si loco z scribatur illa aequationis radix.

Ut si extrahenda sit radix potestatis quintae ex binomio

$$5\sqrt{5} + 11,$$

quod exemplum iam supra [§ 14] tractatum est, fiet

$$n = 5 \quad \text{et} \quad A = 5\sqrt{5} \quad \text{et} \quad B = 11;$$

hincque $AA - BB = 4$ et $AA + BB = 246$. Quare cum esse debeat $r^5 = 4p$, prodibit $p = 8$ et $r = 2$; aequatio vero resolvenda habebitur haec

$$z^5 - 20z^3 + 80z = 16 \cdot 246.$$

Ponatur $z = 2u$ atque aequatio orietur haec

$$u^5 - 5u^3 + 5u = 123;$$

quae si habet radicem realem, ea erit vel 3 vel 41. Erit ea autem $= 3$, unde fit $z = 6$, atque radix potestatis quintae ex binomio erit

$$= \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{2\sqrt[10]{8}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt[5]{16}},$$

omnino ut ea supra est inventa.

19. Quemadmodum hic aequatio resolvenda simplicior est reddita posito $z = 2u$, ita generaliter poni potest $z = ru$ hocque pacto aequatio illa, quae incognitam z involvebat, transmutabitur in hanc incognitam u continentem

$$u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}u^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}u^{n-6} + \text{etc.} = \frac{2(AA + BB)}{AA - BB}$$

ob $r^n = p(AA - BB)$. Plerumque autem terminus ultimus absolutus fiet numerus integer, siquidem extractio radicis succedit. Invento autem valore ipsius u erit binomii $A + B$ radix potestatis n haec

$$\frac{\sqrt{r(u+2)} + \sqrt{r(u-2)}}{2\sqrt[2n]{p}} = \frac{(AA - BB)^{\frac{1}{2n}}}{2}\left(\sqrt{(u+2)} + \sqrt{(u-2)}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{(u+2)} + \sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{2^{2n} : (AA - BB)}}.$$

Sic cum pro binomio $5\sqrt{5} + 11$, ex quo radix surdesolida extrahi debet, sit $n = 5$, $AA - BB = 4$ atque inveniatur $u = 3$, statim prodibit radix quaesita

$$= \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt[10]{\frac{2^{10}}{4}}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt[5]{16}}.$$

Atque ita huius regulae beneficio facillime eruetur radix cuiuscumque potestatis ex dato binomio, dummodo radix datur habens formam binomialem.

20. Alterum exemplum, quod supra [§ 15] attulimus, in radice potestatis septimae ex hoc binomio

$$139\sqrt{3} + 91\sqrt{7}$$

versabatur; quod ergo secundum regulam modo datam ita tractabitur. Erit nempe

$$n = 7, \quad A = 91\sqrt{7} \quad \text{et} \quad B = 139\sqrt{3}.$$

Hinc fiet

$$AA - BB = 4 \quad \text{atque} \quad AA + BB = 115930,$$

unde emergit

$$\frac{2(AA+BB)}{AA-BB} = 57965 = 5 \cdot 11593.$$

Hanc ob rem habebitur ista aequatio

$$u^7 - 7u^5 + 14u^3 - 7u = 5 \cdot 11593,$$

cuius radix, si quam habet, erit vel 5 vel 11593. Reperietur autem 5 esse vera radix istius aequationis, ex quo radix potestatis septimae ex proposito binomio erit

$$= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt[14]{\frac{2^{14}}{4}}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt[7]{64}}$$

plane ut supra.

21. Valebit igitur pariter haec methodus ad radices extrahendas ex binomiis imaginariis, eo quod aequatio resolvenda in § 19 data perpetuo fit realis propter quadrata AA et BB quantitates reales, etiamsi vel A vel B sit quantitas imaginaria. Attamen saepenumero usu veniet incommodum parvi quidem momenti, quod in hoc consistet, ut ambigere debeamus, utrum signa radicalia in radice $\sqrt{(u+2)}$ et $\sqrt{(u-2)}$, quae per se sunt ambigua, affirmative an negative assumere debeamus, quae dubitatio in quantitatibus realibus[1]) facile tollitur, non autem in imaginariis. Quare his casibus ipsa elevatio inventae radicis institui debebit, ut pateat, quaenam signa cum singulis radicalibus sint coniungenda. Ratio difficultatis in hoc potissimum est sita, quod quadrata partium radicis A et B tantum in calculum ingre-

1) Editio princeps: *in quantitatibus affirmativis* . . . Correxit F. R.

diantur, quae a negativis aeque ac affirmativis oriri possunt. Interim tamen hoc constat, quodsi fuerit

$$\sqrt[n]{(A+B)} = \frac{\sqrt{(u+2)}+\sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{2^{2n}:(AA-BB)}},$$

fore

$$\sqrt[n]{(A-B)} = \frac{\sqrt{(u+2)}-\sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{2^{2n}:(AA-BB)}}$$

hincque

$$\sqrt[n]{(-A+B)} = \frac{\sqrt{(u+2)}-\sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{2^{2n}:(AA-BB)}}\cdot\sqrt[n]{-1}$$

et

$$\sqrt[n]{(-A-B)} = \frac{\sqrt{(u+2)}+\sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{2^{2n}:(AA-BB)}}\cdot\sqrt[n]{-1},$$

ex quibus diiudicatio dubii saepe facilis reddetur. Saltem si radix ex una harum formarum $A+B$, $A-B$, $-A+B$, $-A-B$ fuerit inventa, reliquarum formarum radices in promtu erunt. Dabitur tamen postea modus, qui hac dubitatione prorsus carebit.

22. Sit nobis propositum hoc binomium imaginarium

$$+1-\sqrt{-3},$$

ex quo radicem potestatis quintae extrahi oporteat. Erit ergo

$$n=5, \quad A=1, \quad B=\sqrt{-3}$$

hincque $AA+BB=-2$ et $AA-BB=4$; habebitur ergo haec aequatio

$$u^5-5u^3+5u=-1,$$

ex qua prodit $u=-1$, ita ut radix quaesita futura sit

$$\frac{1+\sqrt{-3}}{\sqrt[10]{2^{10}:2^2}} = \frac{1+\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}},$$

quae est vera radix.

At si quaereretur radix potestatis quintae ex

$$+1+\sqrt{-3},$$

pariter reperiretur $\frac{1+\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$; verum hoc casu signum ipsius $\sqrt{-3}$ inverti debet, ut vera radix sit $\frac{1-\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$. Quamobrem erit, ut sequitur:

$$\sqrt[5]{(1+\sqrt{-3})}=\frac{1-\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}},$$

$$\sqrt[5]{(1-\sqrt{-3})}=\frac{1+\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}},$$

$$\sqrt[5]{(-1+\sqrt{-3})}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}},$$

$$\sqrt[5]{(-1-\sqrt{-3})}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}.$$

Similitudo radicum cum ipsis potestatibus hoc modo magis fiet manifesta:

$$\sqrt[5]{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}=\frac{1-\sqrt{-3}}{2},\quad \sqrt[5]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

$$\sqrt[5]{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}=\frac{1+\sqrt{-3}}{2},\quad \sqrt[5]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

23. Quaeratur radix potestatis septimae ex hoc binomio imaginario

$$13\sqrt{3}+\sqrt{-5}.$$

Erit ergo

$$n=7,\quad A=13\sqrt{3}\quad \text{et}\quad B=\sqrt{-5},$$

unde $AA+BB=502$ atque $AA-BB=512$, ex quibus conficitur

$$\frac{2(AA+BB)}{AA-BB}=\frac{251}{128}.$$

Proveniet ergo sequens aequatio

$$u^7-7u^5+14u^3-7u=\frac{251}{128}.$$

Quae si habet radicem rationalem, erit ea vel $\pm\frac{1}{2}$ vel $\pm\frac{251}{2}$. Reperitur autem radix $u=-\frac{1}{2}$, unde radix quaesita habetur

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{-\frac{5}{2}}}{\sqrt[14]{2^5}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{-5}}{\sqrt[7]{64}}.$$

Neque circa hanc radicem ullum dubium manere potest praeter signa radicalium, utrum ea debeant affirmative capi an negative; inquirenti autem patebit signa haec inventa recte se habere.

24. Haec radicum extractio, si binomium propositum fuerit imaginarium, absolvi etiam potest ope multisectionis angulorum, quippe quae in locum aequationis illius resolvendae substitui potest. Efficietur hoc autem ope sequentium lemmatum.

I. *Si fuerit* $u=\cos.\frac{1}{n}\mathrm{A}\sin.a$, *erit*

$$u=\frac{\sqrt[n]{(\sqrt{(1-aa)}+a\sqrt{-1})}+\sqrt[n]{(\sqrt{(1-aa)}-a\sqrt{-1})}}{2}.$$

II. *Si fuerit* $v=\sin.\frac{1}{n}\mathrm{A}\sin.a$, *erit*

$$v=\frac{\sqrt[n]{(\sqrt{(1-aa)}+a\sqrt{-1})}-\sqrt[n]{(\sqrt{(1-aa)}-a\sqrt{-1})}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ponatur iam

$$a\sqrt{-1}=\frac{2AB}{AA-BB};$$

fiet

$$\sqrt{(1-aa)}=\frac{AA+BB}{AA-BB}.$$

Hincque superiora lemmata sequentes praebebunt aequationes

$$\text{I. }\cos.\frac{1}{n}\mathrm{A}\sin.\frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt[n]{(A+B)^2}+\sqrt[n]{(A-B)^2}}{2\sqrt[n]{(AA-BB)}},$$

$$\text{II. }\sin.\frac{1}{n}\mathrm{A}\sin.\frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt[n]{(A+B)^2}-\sqrt[n]{(A-B)^2}}{2\sqrt{-1}\cdot\sqrt[n]{(AA-BB)}}.$$

Quodsi iam habeatur binomium $A \pm B$, ex quo radicem potestatis n extrahi oporteat, quae sit

$$= \frac{x \pm y}{\sqrt[2n]{p}},$$

atque facto

$$p = \frac{r^n}{AA - BB}$$

erit primo

$$xx - yy = r.$$

Deinde cum sit [§ 12]

$$\frac{2(xx+yy)}{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[n]{(A+B)^2} + \sqrt[n]{(A-B)^2},$$

fiet

$$xx + yy = \sqrt[n]{p}(AA - BB) \cdot \cos. \frac{1}{n} \text{A} \sin. \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}}$$

seu

$$xx + yy = r \cos. \frac{1}{n} \text{A} \sin. \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}}.$$

Porro est [§ 11]

$$\frac{4xy}{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[n]{(A+B)^2} - \sqrt[n]{(A-B)^2},$$

unde fit

$$2xy = r\sqrt{-1} \cdot \sin. \frac{1}{n} \text{A} \sin. \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}}.$$

Sit arcus, cuius sinus est $= \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}}$ vel cuius cosinus $= \frac{AA+BB}{AA-BB}$, sit, inquam, hic arcus $= \alpha$ fietque

$$x + y = \sqrt{r}\left(\cos. \frac{\alpha}{n} + \sqrt{-1} \cdot \sin. \frac{\alpha}{n}\right)$$

et

$$x - y = \sqrt{r}\left(\cos. \frac{\alpha}{n} - \sqrt{-1} \cdot \sin. \frac{\alpha}{n}\right).$$

Hinc porro reperietur

$$x + y = \frac{\sqrt{r\left(1 + \cos. \frac{\alpha}{n}\right)} + \sqrt{r\left(-1 + \cos. \frac{\alpha}{n}\right)}}{\sqrt{2}}$$

atque

$$\frac{x+y}{\sqrt[2n]{p}} = \frac{x+y}{\sqrt{r} : \sqrt[2n]{(AA-BB)}} = \frac{\sqrt{\left(1 + \cos. \frac{\alpha}{n}\right)} + \sqrt{\left(-1 + \cos. \frac{\alpha}{n}\right)}}{\sqrt[2n]{\frac{2^n}{AA-BB}}}.$$

Ex his itaque elicitur binomii $A \pm B$ radix potestatis n

$$= \frac{\sqrt{\left(1 + \cos.\frac{\alpha}{n}\right)} + \sqrt{\left(-1 + \cos.\frac{\alpha}{n}\right)}}{\sqrt[2n]{\frac{2^n}{AA - BB}}}.$$

Cum autem sit

$$\sqrt{\left(1 + \cos.\frac{\alpha}{n}\right)} = \sqrt{2} \cdot \cos.\frac{\alpha}{2n} \quad \text{et} \quad \sqrt{\left(-1 + \cos.\frac{\alpha}{n}\right)} = \sqrt{-2} \cdot \sin.\frac{\alpha}{2n},$$

tandem emerget binomii $A \pm B$ radix quaesita

$$= \left(\cos.\frac{\alpha}{2n} \pm \sin.\frac{\alpha}{2n} \cdot \sqrt{-1}\right) \sqrt[2n]{(AA - BB)}$$

existente α arcu, cuius sinus est $= \frac{2AB}{(AA - BB)\sqrt{-1}}$ vel cuius cosinus est $= \frac{AA + BB}{AA - BB}$. Hoc tantum est notandum subinde $\sqrt[2n]{(AA - BB)}$, cuius valor utique est ambiguus, negative accipi debere, qua de re facile erit quovis casu iudicare. Huius igitur modi usus erit potissimum, quando A et B eiusmodi fuerint quantitates, ut angulus assignari queat, cuius cosinus $= \frac{AA + BB}{AA - BB}$.

25. His expositis, quae spectant ad extractionem radicum ex proposito binomio, pergo ad negotium multo latius patens methodumque tradam, cuius ope non solum ex quantitatibus surdis binomii forma contentis, sed ex quantitatibus utcumque irrationalibus radices dati ordinis extrahi queant. Hactenus enim tantum huiusmodi formas $A \pm B$ ex duabus partibus constantes sumus contemplati atque irrationalitatem ita comparatam posuimus, ut partium quadrata fiant numeri rationales. Nunc igitur ipsum fontem aperiemus, quo non solum praecedens methodus universa contineatur, sed ex quo etiam modum haurire liceat ex quantitate irrationali quacumque proposita radicem dati gradus extrahendi. Quo autem vis huius methodi, quam sum expositurus, clarius pateat, sequens specimen eius usum declarare poterit. Inveni scilicet istius methodi beneficio sequentis quantitatis[1]) tam irrationalis quam imaginariae

1) In editione principe sequentis quantitatis factores $\frac{1 + \sqrt{-3}}{6}$ et $\frac{1 - \sqrt{-3}}{6}$ inter se permutati sunt (confer § 46). Correxit F. R.

$$-\frac{7}{3}+\frac{1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\frac{7}{2}(-1-3\sqrt{-3})}+\frac{1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\frac{7}{2}(-1+3\sqrt{-3})}$$

radicem quadratam esse hanc

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{-7}}{4}(-1+3\sqrt{-3})^2}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{-7}}{4}(-1-3\sqrt{-3})^2}.$$

Ex quo exemplo satis intelligere licet methodum hanc non solum esse novam, verum etiam in abbreviandis calculis saepe magnam habere utilitatem.

26. Pro quantitate igitur irrationali quacumque proposita, ex qua radicem potestatis n extrahi oporteat, scribo litteram x; eritque haec littera x radix aequationis cuiusdam algebraicae, quae ex natura quantitatis x facile assignabitur. Sit ista aequatio huius formae

$$x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+cx^{m-3}+dx^{m-4}+\text{etc.}=0.$$

Quaestio ergo huc revocatur, ut ex valore ipsius x, qui ipsi vi huius aequationis convenit, extrahatur radix potestatis n. Ponatur haec radix quaesita $=y$; erit $y=\sqrt[n]{x}$ ideoque $x=y^n$, qui valor in illa aequatione substitutus dabit hanc aequationem

$$y^{mn}+ay^{mn-n}+by^{mn-2n}+cy^{mn-3n}+\text{etc.}=0.$$

Quare si ex hac aequatione valor ipsius y assignari poterit, habebitur ipsa radix potestatis n ex quantitate proposita x, quae quaeritur. Pervenitur quidem hoc modo ad resolutionem aequationis multo plurium dimensionum, quam est ea, per quam x definitur; verum quia in utraque aequatione idem adest terminorum numerus atque omnes ipsius y exponentes per n divisibiles sunt, aequatio haec tantum m dimensionum est censenda, ex quo ea in n aequationes simpliciores resolvi poterit, quarum singulae erunt huiusmodi

$$y^m+Ay^{m-1}+By^{m-2}+Cy^{m-3}+\text{etc.}=0;$$

quibus aequationibus inventis et deinceps resolutis singuli valores ipsius y praebebunt totidem radices potestatis n ex quantitate x. Numerus igitur harum radicum seu valorum ipsius y erit $=mn$, id quod egregie convenit quaestionis indoli. Revera enim x habet ex aequatione m valores diversos,

quorum singulorum radices potestatis n hac methodo inveniri debent. Ex unoquoque autem ipsius x valore tot radices potestatis n extrahi possunt, quot exponens n habet unitates, ex quo omnino y habere debebit mn valores diversos.

27. Ponamus valorem ipsius x definiri per hanc aequationem quadraticam

$$xx + ax + b = 0,$$

ita ut sit vel

$$x = \frac{-a + \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$$

vel

$$x = \frac{-a - \sqrt{(aa - 4b)}}{2},$$

atque ex utroque horum valorum extrahi oportere radicem potestatis n. Cum igitur hic sit x binomium vel residuum, habemus hic illum ipsum casum, quem hactenus tractavimus, ut scilicet ex binomio vel residuo radix datae potestatis extrahatur. Sit igitur radix potestatis n ex $x = y$ seu $x = y^n$ atque y definietur hac aequatione

$$y^{2n} + ay^n + b = 0.$$

Quodsi iam ponamus hanc aequationem in factores simplices duarum dimensionum huius formae $yy + Ay + B = 0$ resolvi, quorum numerus erit $= n$, reperiemus omnes has aequationes partiales contineri in hac

$$yy + uy\sqrt[2n]{b} + \sqrt[n]{b} = 0$$

sortiente u tot diversos valores, quot exponens n habet unitates; qui valores definiuntur hac aequatione

$$u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} u^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^{n-6} + \text{etc.} \pm \frac{a}{\sqrt{b}} = 0,$$

ubi signorum ambiguorum superius $+$ est capiendum, si n fuerit numerus par, contra vero alterum signum $-$ valet, si sit n numerus impar. Quare si huius aequationis n dimensionum unica radix seu valor ipsius u constiterit, ex eo bini pro y invenientur valores hi

$$y = \frac{-u\sqrt[2n]{b} \pm \sqrt{(uu - 4)}\sqrt[n]{b}}{2},$$

qui erunt radices potestatis n ex binis valoribus ipsius x, qui sunt

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{(aa-4b)}}{2}.$$

Radices autem istae y etiam hoc modo possunt exprimi, ut sit

$$y = \frac{-u \pm \sqrt{(uu-4)}}{2} \sqrt[2n]{b},$$

haecque regula consentire reperietur cum ea, quae supra (§ 19) est data.

28. Sit nobis propositum hoc binomium

$$41\sqrt{5} - 7\sqrt{-7},$$

ex quo radicem potestatis septimae extrahi oporteat. Hoc comparato cum valore ipsius x fiet $a = -82\sqrt{5}$ et $b = 4 \cdot 3^7$ hincque $-\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{41\sqrt{5}}{\sqrt{3^7}}$. Quamobrem haec habebitur aequatio ordinis septimi

$$u^7 - 7u^5 + 14u^3 - 7u + \frac{41\sqrt{5}}{\sqrt{3^7}} = 0;$$

qua ad rationalitatem reducta ponendo $u = \frac{v\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ reperietur esse $v = -1$, ita ut sit

$$u = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \sqrt{(uu-4)} = \frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{3}} \quad \text{atque} \quad \sqrt[2n]{b} = \sqrt[14]{4 \cdot 3^7} = 2^{\frac{1}{7}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}.$$

Quare radix potestatis septimae quaesita y erit haec

$$y = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{-7}}{2\sqrt{3}} 2^{\frac{1}{7}} \sqrt{3} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{-7}}{\sqrt[7]{64}}.$$

Examinanti autem patebit signum $+$ valere, ita ut futura sit

$$\sqrt[7]{(41\sqrt{5} - 7\sqrt{-7})} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{-7}}{\sqrt[7]{64}}.$$

Hocque exemplum sufficiet ad usum huius regulae, quae in superioribus iam

fusius est exposita, illustrandum. Pergo ergo ad quantitates irrationales magis compositas methodumque exponam, cuius ope ex iis radices extrahi queant.

29. Denotet ergo x valorem, qui ipsi ex hac aequatione cubica convenit

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

et quaerenda sit radix quadrata ex ista quantitate x. Ponatur haec radix quadrata $= y$, ita ut sit $y = \sqrt{x}$ seu $x = yy$, atque y definietur per hanc aequationem

$$y^6 + ay^4 + by^2 + c = 0.$$

Quodsi iam y pariter sit radix ex aequatione aliqua cubica uti x, id quod pono — nam si y per aequationem cubicam exprimi nequeat, eius valor simplicius quam per $\sqrt{x}$ exhiberi non poterit. Quare videndum est, an inveniri queat aequatio cubica, puta haec

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0,$$

quae in illa aequatione sextae potestatis contineatur. Quod ut fiat, multiplicetur haec aequatio per

$$y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma$$

ac productum illi aequationi aequetur, quo facto reperietur

$$\alpha = -p,$$
$$\beta = a - q + pp,$$
$$\gamma = -r + 2pq - ap - p^3.$$

Deinde vero p, q et r determinabuntur ita:

$$b + 2pr = aq - qq - app + 3ppq - p^4,$$
$$0 = (a - 2q + pp)(r - pq),$$
$$0 = rr + c + pr(a - 2q + pp).$$

Si iam ponamus

$$a - 2q + pp = 0$$

ex secunda aequatione, fiet

$$rr = -c$$

in tertia atque ob $q = \frac{a+pp}{2}$ prima dabit hanc aequationem

$$p^4 + 2app - 8p\sqrt{-c} + aa - 4b = 0$$

ob $r = \sqrt{-c}$. Sin autem aequatio desideretur, per quam q determinetur, quia est $p = \sqrt{(2q - a)}$, aequatio prima abibit in hanc

$$qq - b = 2\sqrt{(ac - 2cq)}$$

seu

$$q^4 - 2bqq + 8cq + bb - 4ac = 0;$$

ex qua si reperiri potuerit valor pro q, erit

$$p = \frac{qq-b}{2r} \quad \text{atque} \quad r = \pm\sqrt{-c}.$$

Deinde vero fit

$$\alpha = -p, \quad \beta = q \quad \text{et} \quad \gamma = -r.$$

Inventis ergo valoribus pro p, q et r aequatio sex dimensionum

$$y^6 + ay^4 + by^2 + c = 0$$

resolvitur in binas has cubicas

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0,$$

$$y^3 - py^2 + qy - r = 0,$$

quarum radices singulae erunt radices quadratae ex radicibus huius aequationis

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Litterae autem p, q et r a coefficientibus cognitis a, b et c ita pendent, ut sit

$$a = -pp + 2q, \quad b = qq - 2pr \quad \text{et} \quad c = -rr,$$

ex quibus eliminando p et r nascitur aequatio superior

$$q^4 - 2bqq + 8cq + bb - 4ac = 0.$$

30. Ut usus huius extractionis aliquo exemplo illustretur, pono x habere valorem ex hac aequatione

$$x^3 + 3xx + 6x - 25 = 0.$$

Quare, ut forma ipsius x ob oculos ponatur, radices istius aequationis cubicae investigari oportebit; quae commodissime invenientur ope sequentis regulae in Transact. Anglicanis traditae.[1])

Si fuerit haec aequatio cubica

$$\begin{aligned} x^3 - 3\alpha xx + 3\alpha^2 x &- \alpha^3 = 0, \\ -3\beta \quad + 3\alpha\beta & \\ - 2\gamma & \end{aligned}$$

erunt eius tres radices sequentes

$$x = \alpha + \sqrt[3]{(\gamma + \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} + \sqrt[3]{(\gamma - \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})},$$

$$x = \alpha + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(\gamma + \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(\gamma - \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})},$$

$$x = \alpha + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(\gamma + \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(\gamma - \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})}.$$

Quodsi nunc hanc aequationem generalem ad nostrum exemplum

$$x^3 + 3x^2 + 6x - 25 = 0$$

accommodemus, fiet

$$-3\alpha = 3 \quad \text{seu} \quad \alpha = -1,$$

$$3 - 3\beta = 6 \quad \text{seu} \quad \beta = -1,$$

$$4 - 2\gamma = -25 \quad \text{seu} \quad \gamma = \frac{29}{2}$$

hincque

$$\sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)} = \frac{13\sqrt{5}}{2};$$

1) Vide I. Colson, *Aequationum Cubicarum et Biquadraticarum, tum Analytica, tum Geometrica et Mechanica, Resolutio Universalis*, Philosophical Transactions (London) **25**, 1707, numb. 309, p. 2353. Quae dissertatio invenitur etiam in tertia editione (ed. G. I. 's Gravesande) Neutoni *Arithmeticae universalis*, p. 258 (vide notam p. 21). F. R.

ex quibus terni ipsius x valores erunt sequentes[1])

$$x = -1 + \sqrt[3]{\frac{29+13\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}},$$

$$x = -1 + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{29+13\sqrt{5}}{2}} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}},$$

$$x = -1 + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{29+13\sqrt{5}}{2}} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}}.$$

Haec igitur nobis proposita est quaestio, ut ex singulis hisce ipsius x valoribus radices quadratas extrahamus.

31. Comparetur ergo aequatio proposita

$$x^3 + 3xx + 6x - 25 = 0$$

cum forma generali

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

fietque

$$a = 3, \quad b = 6 \quad \text{et} \quad c = -25$$

atque ex his nascetur sequens aequatio biquadratica

$$q^4 - 12q^2 - 200q + 336 = 0;$$

ad quam eo facilius resolvendam pono $q = 2u$ oriturque

$$u^4 - 3u^2 - 25u + 21 = 0,$$

ita ut valor ipsius u sit vel ± 3 vel ± 7. Reperietur autem esse $u = 3$

1) In editione principe valores sequentes atque etiam paragraphorum 31 et 32 formulae correspondentes hoc modo scribuntur:

$$x = -1 - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{29+13\sqrt{5}}{2}} - \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}} \quad \text{etc.},$$

$$y = -1 - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \quad \text{etc.}$$

EULERUS enim

$$-\frac{1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{pro} \quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

scribere solet. F. R.

ideoque $q=6$. Porro ob $r=\sqrt{-c}$ fiet $r=5$ atque $p=\frac{qq-b}{2r}=3$. Quocirca radices quadratae ex valoribus ipsius x erunt radices sequentium binarum aequationum

$$y^3+3y^2+6y+5=0,$$
$$y^3-3y^2+6y-5=0,$$

quae duae aequationes ita inter se conveniunt, ut radices unius sint simul radices alterius, sed negative sumtae; ideoque sufficiet alterius aequationis radices indagasse. Ex priori ergo fit

$$-3\alpha=3 \quad \text{seu} \quad \alpha=-1,$$
$$3-3\beta=6 \quad \text{seu} \quad \beta=-1,$$
$$4-2\gamma=5 \quad \text{seu} \quad \gamma=-\tfrac{1}{2}$$

hincque

$$\sqrt{(\gamma\gamma-\beta^3)}=\frac{\sqrt{5}}{2};$$

ex quibus sequentes valores ipsius y inveniuntur

$$y=-1+\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}},$$
$$y=-1+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}},$$
$$y=-1+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}.$$

Harum unaquaeque cum sua negativa constituet radices quadratas unius ex valoribus ipsius x.

32. Ac primi quidem ipsius x valoris, qui erat

$$-1+\sqrt[3]{\frac{29+13\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}},$$

radices binae quadratae erunt

$$-1+\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}},$$
$$+1-\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}.$$

Secundi ipsius x valoris, qui erat

$$-1+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{29+13\sqrt{5}}{2}}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}},$$

radices binae quadratae erunt

$$-1+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}},$$

$$+1-\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}.$$

Tertii denique ipsius x valoris, qui est

$$-1+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{29+13\sqrt{5}}{2}}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}},$$

binae radices quadratae sunt

$$-1+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}},$$

$$+1-\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}},$$

quae omnia, si cui volupe fuerit per calculum periculum facere, veritati consentanea reperientur.[1]) Nam quaenam ex inventis radicibus cuique ipsius x valori competant, ob summum nexum inter se nisi periculum faciendo definiri non potest.

33. Progrediamur ultra atque investigemus radicem cubicam ex valoribus ipsius x, quos obtinet vi aequationis huius cubicae

$$x^3+ax^2+bx+c=0.$$

Ponatur radix cubica ex x seu $\sqrt[3]{x}=y$; erit $x=y^3$ atque valor radicis quaesitae y definietur per hanc aequationem

$$y^9+ay^6+by^3+c=0.$$

1) Sed vide notam praecedentem. F. R.

Hanc igitur divisibilem esse pono per aequationem quandam cubicam

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0,$$

ut valor ipsius y pari expressione uti x possit exhiberi. Sit autem quotus huic divisori assumto respondens

$$y^6 + \alpha y^5 + \beta y^4 + \gamma y^3 + \delta y^2 + \varepsilon y + \zeta = 0.$$

Quodsi iam productum aequale constituatur illi aequationi novem dimensionum, superatis calculis satis prolixis[1]) tandem istae emergent determinationes

$$a = p^3 - 3pq + 3r,$$

$$b = q^3 - 3pqr + 3rr,$$

$$c = r^3.$$

Unde fit

$$r = \sqrt[3]{c}, \quad q = \frac{p^3 + 3r - a}{3p};$$

qui ipsius q valor in aequatione secunda substitutus dat hanc aequationem, ex qua valor ipsius p erui debebit,

$$p^9 - 3p^6(6r + a) + 3p^3(9rr + 3ar + aa - 9b) + (3r - a)^3 = 0.$$

Ex hac ergo aequatione si erui poterit valor ipsius p, simul valor radicis quaesitae y ex aequatione cubica poterit assignari.

34. Cum igitur aequatio dividens quaesita sit

$$y^3 + pyy + qy + r = 0$$

atque invento valore ipsius p sit $r = \sqrt[3]{c}$ et $q = \frac{p^3 + 3r - a}{3p}$, quotus ex divisione ortus seu alter factor erit

$$y^6 - py^5 + (pp - q)y^4 - (pq - 2r)y^3 + (qq - pr)y^2 - qry + rr = 0,$$

---

1) Quibus calculis primo hi valores eliciuntur $\alpha = -p$, $\beta = p^2 - q$, $\gamma = -pq + 2r$, $\delta = q^2 - pr$, $\varepsilon = -qr$, $\zeta = r^2$; vide paragraphum sequentem. F. R.

quae [aequatio] facile in binas sequentes aequationes cubicas resolvitur

$$y^3 + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}pyy + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}qy + r = 0,$$

$$y^3 + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}pyy + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}qy + r = 0.$$

Habemus ergo tres aequationes cubicas, dummodo valor ipsius p fuerit cognitus, ex quibus elicientur novem valores pro y, quarum terni erunt totidem radices cubicae ex singulis ipsius x valoribus. Omnis enim quantitas tres habet radices cubicas, uti ex qualibet quantitate duae radices quadratae extrahi possunt. Simili scilicet modo, quo est tam $\sqrt{a^2} = a$ quam $\sqrt{a^2} = -a$, tripliciter $\sqrt[3]{a^3}$ exprimi potest; erit nempe

$$\text{I.} \quad \sqrt[3]{a^3} = +a,$$

$$\text{II.} \quad \sqrt[3]{a^3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a,$$

$$\text{III.} \quad \sqrt[3]{a^3} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}a$$

atque ex hoc fonte ingressae sunt istae coefficientes imaginariae

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

in binas alteras aequationes inventas.

35. Potuissemus igitur ex hoc fonte assumto uno divisore

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0$$

aequationis

$$y^9 + ay^6 + by^3 + c = 0$$

statim reliquos binos divisores formare. Cum enim in ista aequatione novem dimensionum omnes ipsius y exponentes per 3 sint divisibiles, manifestum est, si fuerit y radix ex illa aequatione, tum etiam omnes valores in $\sqrt[3]{y^3}$ contentos esse debere eius radices. Hoc est, si y fuerit radix illius aequationis, pariter radices erunt

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}y \quad \text{et} \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}y;$$

qui si loco y in aequatione $y^3+py^2+qy+r=0$ substituantur, statim praebent binos reliquos factores. Atque hac lege animadversa poterimus facile ad radices altiorum ordinum progredi, quas ex radicibus aequationis cubicae propositae extrahi oporteat; qui labor, si eodem modo, quo pro radicibus quadratis et cubicis a nobis est institutus, susciperetur, omnino fieret insuperabilis. Quin etiam hac via procedere poterimus ad aequationes adhuc plurium dimensionum, per quas valor ipsius x determinetur.

36. Ex his scilicet, si debito modo applicentur, patebit y fore radicem potestatis n ex x, posito x dari per hanc aequationem cubicam

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

si coefficientes huius aequationis

$$y^3+py^2+qy+r=0$$

sequenti modo determinentur:

I. Casu, quo $n=1$,

$$a=p,\quad b=q,\quad c=r.$$

II. Casu, quo $n=2$,

$$a=-pp+2q,\quad b=qq-2pr,\quad c=-rr.$$

III. Casu, quo $n=3$,

$$a=p^3-3pq+3r,\quad b=q^3-3pqr+3rr,\quad c=r^3.$$

IV. Casu, quo $n=4$,

$$a=-p^4+4ppq-4pr-2qq,$$ [1]

$$b=q^4-4pqqr+4qrr+2pprr,\quad c=-r^4.$$

1) Editio princeps: $a=p^4+4pqq-4pr-2qq$. Correxit F. R.

V. Casu, quo $n=5$,

$$a = p^5 - 5p^3q + 5ppr + 5pqq - 5qr,^{1)}$$
$$b = q^5 - 5pq^3r + 5qqrr + 5p^2qr^2 - 5pr^3,$$
$$c = r^5.$$

VI. Casu, quo $n=6$,

$$a = -p^6 + 6p^4q - 6p^3r - 9ppqq + 12pqr + 2q^3 - 3rr,$$
$$b = q^6 - 6pq^4r + 6q^3rr + 9p^2q^2r^2 - 12pqr^3 - 2p^3r^3 + 3r^4,$$
$$c = -r^6.$$

37. Quodsi autem quantitas x definiatur per aequationem biquadraticam

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

atque y denotet radicem potestatis n ex x, ut sit $y = \sqrt[n]{x}$, haec radix y determinabitur pariter per aequationem biquadraticam hanc

$$y^4 + py^3 + qy^2 + ry + s = 0,$$

siquidem coefficientes p, q, r et s definiantur, ut sequitur:

I. Casu, quo $n=1$,

$$a = p,$$
$$b = q,$$
$$c = r,$$
$$d = s.$$

II. Casu, quo $n=2$,

$$a = -pp + 2q,$$
$$b = qq - 2pr + 2s,$$
$$c = -rr + 2qs,$$
$$d = ss.$$

---

1) Editio princeps: $a = p^5 - 5p^3q + 5pprr + 5pqq - 5qr$. Correxit F. R.

III. Casu, quo $n = 3$,

$$a = p^3 - 3pq + 3r,$$
$$b = q^3 - 3pqr - 3qs + 3rr + 3pps,$$
$$c = r^3 - 3qrs + 3pss,$$
$$d = s^3.$$

IV. Casu, quo $n = 4$,

$$a = -p^4 + 4ppq - 4pr - 2qq + 4s,$$
$$b = q^4 - 4pqqr - 4qqs + 4qrr + 4ppqs + 2pprr - 8prs + 6ss,$$
$$c = -r^4 + 4qrrs - 4prss - 2qqss + 4s^3,$$
$$d = s^4.$$

Atque simili modo ulterius tam ad altiores potestates radicis y quam ad aequationes magis compositas, quibus x definitur, progredi licet.

38. Quemadmodum autem supra (§ 34) vidimus pro extrahenda radice cubica plurimum iuvare formulas $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, quae praeter unitatem sunt radices cubicae ex unitate, ita ad extractionem radicum altiorum ordinum nosse oportebit radices earundem potestatum ex unitate. Quamobrem operae pretium erit radices cuiuscumque potestatis earumque indolem indagare. At manifestum est radices potestatis n ex unitate oriri debere ex resolutione huius aequationis

$$x^n - 1 = 0;$$

omnis enim valor ipsius x huic aequationi conveniens ita est comparatus, ut eius potestas exponentis n aequetur unitati. Si iam ponamus α esse eiusmodi valorem ipsius x, erit

$$\alpha^n = 1;$$

hinc vero sequitur fore etiam potestates α^{2n}, α^{3n}, α^{4n} etc. aequales unitati. Quae cum sint potestates exponentis n ipsarum α^2, α^3, α^4 etc., necesse est, ut, si fuerit α radix aequationis $x^n - 1 = 0$, sint etiam omnes ipsius α potestates, quales sunt α^2, α^3, α^4, α^5 etc., radices ipsius x. Quocirca si aequationis $x^n - 1 = 0$ radices ponantur α, β, γ, δ, ε etc., hae radices ita erunt comparatae,

ut uniuscuiusque potestates singulae in iisdem quantitatibus occurrere debeant. Atque hinc resolvetur sequens problema, quo quaeruntur n quantitates diversae huius naturae, ut singularum potestates quaecumque simul sint termini ex ea quantitatum serie.

39. Sic si sit $n = 1$, aequatio

$$x - 1 = 0$$

dat radicem 1, quae ita est comparata, ut eius omnes potestates ipsi sint aequales, qui est problematis casus primus.

Casus secundus, quo $n = 2$, dat hanc aequationem

$$x^2 - 1 = 0,$$

cuius duae sunt radices hae

$$x = +1,$$

$$x = -1,$$

quarum binarum radicum omnes potestates sunt vel $+1$ vel -1.

Casus tertius, quo $n = 3$, dat hanc aequationem

$$x^3 - 1 = 0;$$

cuius una radix cum sit $= 1$, si aequatio $x^3 - 1 = 0$ per $x - 1$ dividatur, prodibit

$$xx + x + 1 = 0,$$

quae duas reliquas radices aequationis $x^3 - 1 = 0$ praebebit, unde tres aequationis propositae $x^3 - 1 = 0$ radices erunt

$$x = +1,$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Quae eadem proprietate commemorata gaudent; nam primae radicis 1 omnes potestates ipsi sunt aequales; deinde est

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \qquad \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3=1 \qquad \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3=1$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^4=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \qquad \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^4=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^5=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \qquad \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^5=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

et ita porro.

40. Casus quartus, quo $n=4$, praebet hanc aequationem

$$x^4-1=0,$$

cuius radicum singularum biquadrata aequantur unitati. Resolvitur autem haec aequatio in has binas

$$xx-1=0 \quad \text{et} \quad xx+1=0,$$

ex quibus quatuor illae radices reperientur

$$x=+1,$$
$$x=-1,$$
$$x=+\sqrt{-1},$$
$$x=-\sqrt{-1},$$

atque uniuscuiusque potestas quaecumque aequalis est uni ex his ipsis quatuor radicibus.

Casus quintus, quo $n=5$, dat aequationem hanc

$$x^5-1=0,$$

quae divisa per $x-1$, ex quo divisore prima radix $x=1$ innotescit, dat

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$

quae in duas quadraticas discerpitur huius formae

$$xx+px+1=0,$$
$$xx+qx+1=0,$$

in quibus p et q sunt radices huius aequationis

$$uu - u - 1 = 0,$$

ita ut sit

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Hinc iam quinque radices aequationis $x^5 - 1 = 0$ oriuntur sequentes

$$x = 1,$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4} = \alpha,$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4} = \beta,$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4} = \gamma,$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4} = \delta.$$

quae ratione suarum potestatum ita sunt comparatae, ut sit

$\alpha^2 = \delta$	$\beta^2 = \gamma$	$\gamma^2 = \alpha$	$\delta^2 = \beta$
$\alpha^3 = \gamma$	$\beta^3 = \delta$	$\gamma^3 = \beta$	$\delta^3 = \alpha$
$\alpha^4 = \beta$	$\beta^4 = \alpha$	$\gamma^4 = \delta$	$\delta^4 = \gamma$
$\alpha^5 = 1$	$\beta^5 = 1$	$\gamma^5 = 1$	$\delta^5 = 1$

41. Casus sextus, quo $n = 6$, praebet hanc aequationem

$$x^6 - 1 = 0,$$

cuius sex singularum radicum potestates sextae aequales erunt unitati. Haec vero aequatio per $xx - 1$ divisa, unde iam duae radices ipsius x, nempe $+1$ et -1, prodeunt, dat hanc

$$x^4 + x^2 + 1 = 0,$$

quae ulterius resolvitur in has duas

$$xx + x + 1 = 0,$$

$$xx - x + 1 = 0,$$

unde tandem omnes sex radices quadratocubicae ex unitate proveniunt

$$x = +1,$$

$$x = -1,$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

$$x = \frac{+1+\sqrt{-3}}{2},$$

$$x = \frac{+1-\sqrt{-3}}{2},$$

quae statim inveniri potuissent ex tribus radicibus cubicis unitatis; radices enim quadratocubicae primo sunt ipsae radices cubicae ac deinde eaedem radices cubicae negative sumtae, id quod patet ex resolutione aequationis $x^6 - 1 = 0$ in has binas cubicas

$$x^3 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^3 + 1 = 0.$$

42. Resolutio casus septimi, quo $n = 7$ et

$$x^7 - 1 = 0,$$

maiori laborat difficultate, et quia in eius resolutione plura exempla occurrunt, quibus doctrina hactenus tradita illustratur, hoc negotium absolvemus. Aequatio autem $x^7 - 1 = 0$ divisa per $x - 1$, unde prima radix $x = 1$ innotescit, dat

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

quae divisores rationales non admittit; quia autem aequatio haec manet invariata ponendo $\frac{1}{x}$ loco x, ex quo constat productum ex binis radicibus esse $= 1$, haec aequatio resolvi[1]) poterit in ternas quadraticas

$$xx + px + 1 = 0,$$

$$xx + qx + 1 = 0,$$

$$xx + rx + 1 = 0,$$

1) Vide Commentationem 30 huius voluminis, imprimis § 11. F. R.

ubi p, q, r sunt tres radices ex ista aequatione cubica

$$u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0;$$

quibus inventis erit praeter $x = 1$

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{(pp-4)}}{2},$$

$$x = \frac{-q \pm \sqrt{(qq-4)}}{2},$$

$$x = \frac{-r \pm \sqrt{(rr-4)}}{2}.$$

Primo igitur valores litterarum p, q, r investigari debent ex resolutione huius aequationis cubicae $u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0$, cuius tres valores ipsi u convenientes dabunt valores litterarum p, q et r.

43. Comparetur ergo haec aequatio cum aequatione cubica generali § 30 data eritque

$$\alpha = +\frac{1}{3},$$

$$3\beta - \frac{1}{3} = 2 \quad \text{seu} \quad \beta = \frac{7}{9},$$

$$-\frac{1}{27} + \frac{7}{9} - 2\gamma = 1 \quad \text{seu} \quad \gamma = \frac{-7}{54},$$

unde

$$\sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)} = \frac{7}{18}\sqrt{-3}$$

atque

$$\sqrt[3]{(\gamma \pm \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} = \sqrt[3]{\left(\frac{-7}{54} \pm \frac{7}{18}\sqrt{-3}\right)} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{2}(-1 \pm 3\sqrt{-3})}.$$

Hinc ergo pro p, q, r sequentes prodibunt valores

$$p = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{7\,\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{7\,\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}},$$

$$q = \frac{1}{3} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{7\,\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{7\,\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}},$$

$$r = \frac{1}{3} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{7\,\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{7\,\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}}.$$

Tres hae formulae in hac una comprehendi possunt

$$\frac{1}{3}+\frac{\alpha}{3}\sqrt[3]{7\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}}+\frac{\beta}{3}\sqrt[3]{7\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}},$$

quae abit in primam, si fuerit

$$\alpha=1 \quad \text{et} \quad \beta=1,$$

in secundam, si

$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \beta=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

atque in tertiam, si

$$\alpha=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \beta=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

In omni autem casu erit

$$\alpha\beta=1 \quad \text{et} \quad \alpha^2=\beta \quad \text{atque} \quad \beta^2=\alpha.$$

Huius igitur triplicis formae in unicam redactae quadratum quaternario minutum, ut prodeant formae $pp-4$, $qq-4$ et $rr-4$, erit

$$-\frac{7}{3}+\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}}+\frac{\beta}{3}\cdot\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}}.$$

Est enim

$$\sqrt[3]{49\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}=\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}}$$

et

$$\sqrt[3]{49\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}=\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}},$$

quarum transformationum beneficio quadratum superius invenitur, a quo quaternarius ablatus est.

44. Quia nunc invenimus ternas quantitates $pp-4$, $qq-4$ et $rr-4$, possemus statim iis signum radicale $\sqrt{\ }$ praefigendo septem radices aequationis $x^7-1=0$ assignare. At si has radices in forma simplicissima exhibere velimus, indagare debemus, an ex istis quantitatibus $pp-4$, $qq-4$, $rr-4$

actu radix quadrata extrahi possit. Cum igitur sint p, q et r valores ipsius u ex hac aequatione

$$u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0,$$

ponamus

$$\sqrt{(uu - 4)} = v$$

atque hic valor v praebebit valores pro $\sqrt{(pp - 4)}$, $\sqrt{(qq - 4)}$ et $\sqrt{(rr - 4)}$. Posito autem $\sqrt{(uu - 4)} = v$ seu $uu = vv + 4$ habebimus

$$(vv + 2)\sqrt{(vv + 4)} = vv + 3$$

hincque

$$v^6 + 7v^4 + 14v^2 + 7 = 0.$$

Huius aequationis ponantur secundum § 29 factores

$$v^3 + pv^2 + qv + r = 0,$$

$$v^3 - pv^2 + qv - r = 0$$

atque ad determinandos coefficientes p, q, r prodibit aequatio

$$q^4 - 28q^2 + 56q = 0,$$

ex qua prodit

$$q = 0, \quad r = \sqrt{-7} \quad \text{et} \quad p = \sqrt{-7},$$

ita ut v definiatur per has aequationes

$$v^3 \pm v^2\sqrt{-7} \pm \sqrt{-7} = 0.$$

45. Ex hac duplici aequatione sufficiet alteram tantum resolvisse, cum alterius radices sint negativae radicum alterius aequationis atque iam supra signa radicalia $\sqrt{(pp - 4)}$, $\sqrt{(qq - 4)}$, $\sqrt{(rr - 4)}$ signum habeant ambiguum. Quaeramus ergo radices aequationis huius

$$v^3 - v^2\sqrt{-7} - \sqrt{-7} = 0,$$

quae cum forma generali § 30 comparata dat

$$\alpha = \frac{\sqrt{-7}}{3},$$

$$\beta = -\frac{7}{9},$$

$$\frac{7\sqrt{-7}}{27} - \frac{21\sqrt{-7}}{27} - 2\gamma = -\sqrt{-7} \quad \text{seu} \quad \gamma = \frac{13\sqrt{-7}}{54},$$

unde fit

$$\sqrt{(\gamma\gamma-\beta^3)}=\frac{\sqrt{21}}{18}$$

atque

$$\sqrt[3]{(\gamma\pm\sqrt{(\gamma\gamma-\beta^3)})}=\sqrt[3]{\left(\frac{13\sqrt{-7}}{54}\pm\frac{\sqrt{21}}{18}\right)}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{13\pm3\sqrt{-3}}{2}\sqrt{-7}}$$

seu

$$\sqrt[3]{(\gamma\pm\sqrt{(\gamma\gamma-\beta^3)})}=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{-1\pm3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}.$$

Atque hinc scripto $-\sqrt{-7}$ loco $\sqrt{-7}$ prodibunt pro v tres sequentes valores

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3}+\quad\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}+\quad\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}},$$

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}},$$

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}},$$

qui comprehendi possunt in hac una forma

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3}+\frac{\mu}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}+\frac{\nu}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}$$

denotantibus μ et ν vel utraque 1 vel altera $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ et altera $\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}$.

46. Ut nunc appareat, quomodo litterae μ et ν ad supra assumtas (§ 43), nempe ad α et β, comparatae esse debeant, sumamus huius valoris inventi quadratum, quod erit [§ 25]

$$-\frac{7}{3}+\frac{\mu}{3}\cdot\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7\,\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}}+\frac{\nu}{3}\cdot\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7\,\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}};$$

qui [valor] cum congruere debeat cum valore supra pro $pp-4$ seu $qq-4$ seu $rr-4$ invento, fiet

$$\alpha\,\frac{1-\sqrt{-3}}{2}=\mu\,\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$$

et

$$\beta\,\frac{1+\sqrt{-3}}{2}=\nu\,\frac{1-\sqrt{-3}}{2},$$

unde erit

$$\mu = \alpha \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

atque

$$\nu = \beta \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

His definitis pro valoribus ipsius x supra (§ 43) inventis,

si valeat p, erit $\alpha = 1$, $\beta = 1$;

si valeat q, erit $\alpha = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\beta = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$;

si valeat r, erit $\alpha = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, $\beta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

Atque ex his prodibit formularum irrationalium $\sqrt{(pp-4)}$, $\sqrt{(qq-4)}$ et $\sqrt{(rr-4)}$ valor unica expressione contentus hic

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3} + \frac{\alpha}{3}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}} + \frac{\beta}{3}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}.$$

Substitutis ergo loco α et β singulis casibus valoribus debitis reperientur sequentes septem radices aequationis

$$x^7 - 1 = 0:$$

$$\text{I.}\quad x = 1,$$

$$\text{II. et III.}\quad x = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt[3]{7\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}} - \frac{1}{6}\sqrt[3]{7\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}}$$
$$\pm\frac{\sqrt{-7}}{6} \mp \frac{-1-\sqrt{-3}}{12}\sqrt[3]{\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}} \mp \frac{-1+\sqrt{-3}}{12}\sqrt[3]{\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}},$$

$$\text{IV. et V.}\quad x = -\frac{1}{6} - \frac{-1+\sqrt{-3}}{12}\sqrt[3]{7\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}} - \frac{-1-\sqrt{-3}}{12}\sqrt[3]{7\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}}$$
$$\pm\frac{\sqrt{-7}}{6} \mp \frac{1}{6}\sqrt[3]{\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}} \mp \frac{1}{6}\sqrt[3]{\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}},$$

$$\text{VI. et VII.}\quad x = -\frac{1}{6} - \frac{-1-\sqrt{-3}}{12}\sqrt[3]{7\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}} - \frac{-1+\sqrt{-3}}{12}\sqrt[3]{7\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}}$$
$$\pm\frac{\sqrt{-7}}{6} \mp \frac{-1+\sqrt{-3}}{12}\sqrt[3]{\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}} \mp \frac{-1-\sqrt{-3}}{12}\sqrt[3]{\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}.$$

47. In unaquaque harum formarum praeter primam continentur quatuor signa radicalia cubica, at in qualibet bina eiusmodi signa in unum colligi possunt. Cum enim sit, ut supra [§ 43] ostendimus,

$$\sqrt[3]{49\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2} = \frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}}$$

et

$$\sqrt[3]{49\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2} = \frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}},$$

erit

$$\sqrt[3]{\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}} = \frac{-1-3\sqrt{-3}}{2\sqrt{-7}}\sqrt[3]{7\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}}$$

et

$$\sqrt[3]{\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}} = \frac{-1+3\sqrt{-3}}{2\sqrt{-7}}\sqrt[3]{7\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}}$$

His igitur valoribus substitutis septem illae ipsius x radices ex aequatione $x^7-1=0$ seu septem diversae expressiones, quarum singularum potestates septimae unitatem producunt, erunt sequentes:

$$\mathrm{I} = 1,$$

$$\mathrm{II\ et\ III} = \frac{-1\pm\sqrt{-7}}{6} - \frac{1}{6\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2+\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}}$$
$$-\frac{1}{6\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2-\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}},$$

$$\mathrm{IV\ et\ V} = \frac{-1\pm\sqrt{-7}}{6} - \frac{-1+\sqrt{-3}}{12\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2+\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}}$$
$$-\frac{-1-\sqrt{-3}}{12\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2-\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}},$$

$$\mathrm{VI\ et\ VII} = \frac{-1\pm\sqrt{-7}}{6} - \frac{-1-\sqrt{-3}}{12\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2+\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}}$$
$$-\frac{-1+\sqrt{-3}}{12\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2-\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}}.$$

48. Si quis porro progredi voluerit, facile definiet octo radices huius aequationis

$$x^8 - 1 = 0:$$

$$\mathrm{I} = +1,\quad \mathrm{III} = +\sqrt{-1},\quad \mathrm{V} = \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{VII} = \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

$$\mathrm{II} = -1,\quad \mathrm{IV} = -\sqrt{-1},\quad \mathrm{VI} = \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.\quad \mathrm{VIII} = \frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

Simili modo ex tribus radicibus cubicis ex unitate reperientur novem radices aequationis

$$x^9 - 1 = 0,$$

dum ex singulis radicibus cubicis denuo ternae radices cubicae extrahuntur, eruntque ideo [§ 39]:

$$\mathrm{I} = 1,$$

$$\mathrm{II} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},$$

$$\mathrm{III} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

$$\mathrm{IV} = \sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}},$$

$$\mathrm{V} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}},$$

$$\mathrm{VI} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}.$$

$$\mathrm{VII} = \sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}},$$

$$\mathrm{VIII} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}},$$

$$\mathrm{IX} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}.$$

Decem autem radices aequationis

$$x^{10} - 1 = 0$$

erunt primo quinque radices aequationis $x^5 - 1 = 0$ ipsae § 40 exhibitae atque insuper eaedem per -1 multiplicatae.

At vero radices undecim aequationis

$$x^{11} - 1 = 0$$

exhiberi non possunt nisi ope aequationis quinque dimensionum; cuius resolutio cum adhuc lateat, hic subsistere debemus.[1])

1) Radices aequationis $x^{11} - 1 = 0$ ope radicalium signorum primum exhibuit A. TH. VANDERMONDE (1735—1796) in dissertatione, quae inscribitur *Mémoire sur la résolution des équations*, Hist. de l'acad. d. sc. de Paris (1771), 1774, Mémoires, p. 365, imprimis p. 375 et 415. F. R.

RECHERCHES SUR LES RACINES IMAGINAIRES DES EQUATIONS

Commentatio 170 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [5] (1749), 1751, p. 222—288

1. Toute équation algébrique étant délivrée des fractions et des signes radicaux, se réduit toujours à cette forme générale

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \cdots + N = 0,$$

où les lettres A, B, C, D, ... N marquent des quantités constantes réelles, ou affirmatives ou négatives sans en exclure le zéro. Les racines d'une telle équation sont les valeurs qui étant mises pour x produisent une équation identique $0 = 0$. Or si $x + \alpha$ est un diviseur ou facteur de la formule proposée, l'autre facteur étant indiqué par X, de sorte que l'équation ait cette forme

$$(x + \alpha) X = 0,$$

il est clair que cela arrive, si

$$x + \alpha = 0, \quad \text{ou} \quad x = -\alpha.$$

D'où l'on voit que les racines d'une équation se trouvent en cherchant les diviseurs ou facteurs de cette même équation; et toutes les racines d'une équation se tireront de tous ses diviseurs simples de la forme $x + \alpha$.

2. Donc pour trouver toutes les racines d'une équation proposée, on n'a qu' à chercher tous les facteurs simples de la quantité

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \cdots + N;$$

et si nous posons ces facteurs

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\delta) \text{ etc.},$$

il est d'abord clair que le nombre de ces facteurs doit être égal à l'exposant n; et partant le nombre de toutes les racines, qui seront

$$x = -\alpha, \quad x = -\beta, \quad x = -\gamma, \quad x = -\delta \quad \text{etc.},$$

sera aussi égal à ce même exposant n, puisqu'un tel produit

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\delta) \text{ etc.}$$

ne sauroit devenir égal à zéro, à moins qu'un de ses facteurs n'évanouisse. Toute équation donc, de quelque degré qu'elle soit, aura toujours autant de racines, que l'exposant de sa plus haute puissance contient d'unités.

3. Or il arrive fort souvent que toutes ces racines ne sont pas des quantités réelles, et que quelques-unes, ou peut-être toutes, sont des quantités imaginaires. On nomme quantité imaginaire, celle qui n'est ni plus grande que zéro, ni plus petite que zéro, ni égale à zéro; ce sera donc quelque chose d' impossible, comme par exemple $\sqrt{-1}$, ou en général $a+b\sqrt{-1}$; puisqu'une telle quantité n'est ni positive, ni négative, ni zéro. Ainsi cette équation

$$x^3 - 3xx + 6x - 4 = 0$$

ayant ces trois racines

$$x = 1, \quad x = 1+\sqrt{-3} \quad \text{et} \quad x = 1-\sqrt{-3},$$

les deux dernières sont imaginaires, et il n'y aura qu'une racine réelle $x=1$. D'où l'on, voit, que si l'on ne vouloit comprendre sous le nom de racines que celles qui sont réelles, leur nombre seroit souvent beaucoup plus petit que le plus haut exposant de l'équation. Et partant quand nous disons que chaque équation a autant de racines, que l'exposant de son degré indique, cela se doit entendre de toutes ses racines, tant réelles qu'imaginaires.

4. Nous concevons donc, que de quelque degré que soit l'équation proposée

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \cdots + N = 0,$$

elle puisse toujours être représentée par une telle forme

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\delta)\cdots(x+\nu)=0,$$

où le nombre de ces facteurs simples soit $= n$. Et puisque ces facteurs étant multipliés actuellement ensemble doivent produire l'équation proposée, il est évident que les quantités A, B, C, D, ... N seront tellement déterminées par les quantités α, β, γ, δ, ... ν, qu'il sera

A = à la somme de ces quantités α, β, γ, δ, ... ν;

B = à la somme de tous leurs produits de deux à deux,

C = à la somme de leurs produits de trois à trois,

D = à la somme de leurs produits de quatre à quatre,

⋮

et enfin

N = au produit de toutes ensemble, $\alpha\beta\gamma\delta\ldots\nu$.

Donc puisque le nombre de ces égalités est $= n$, les valeurs des lettres α, β, γ, δ, ... ν en seront réciproquement déterminées.

5. Quoiqu'il semble que la connoissance des racines imaginaires d'une équation ne puisse avoir aucune utilité, vu qu'elles ne fournissent point de solutions de quelque problème que ce soit, néantmoins il est fort important dans toute l'analyse de se rendre familier le calcul des quantités imaginaires. Car non seulement nous en acquérons une connoissance plus parfaite de la nature des équations; mais l'Analyse des infinis en tire des secours très considérables. Car toutes les fois qu'il se présente à intégrer une fraction, il en faut résoudre le dénominateur dans tous ses facteurs simples, soit réels ou imaginaires, et de là on tire enfin l'intégrale, qui quoiqu'elle renferme des logarithmes imaginaires, on a des moyens de les réduire à des arcs de cercle réels. Outre cela il arrive souvent qu'une expression qui renferme des quantités imaginaires, soit néantmoins réelle, et dans ces cas le calcul des imaginaires est absolument nécessaire.

6. Il est démontré dans l'Algèbre, que lorsqu'une équation a des racines imaginaires, leur nombre est toujours pair, de sorte que toute équation ou n'aura point du tout des racines imaginaires, ou elle en aura deux, ou quatre,

ou six, ou huit etc., et jamais le nombre de toutes les racines imaginaires d'une équation ne sauroit être impair. Mais on soutient de plus, que les racines imaginaires vont tellement de pair en pair, que tant la somme que le produit de deux devient réel. Ou ce qui revient au même, si

$$x + y\sqrt{-1}$$

est un des facteurs imaginaires d'une équation, on soutient qu'il se trouvera toujours parmi les autres un tel facteur

$$x - y\sqrt{-1}$$

aussi imaginaire, qui étant multiplié par celui-là $x + y\sqrt{-1}$ donne un produit réel. Or le produit de $x + y\sqrt{-1}$ par $x - y\sqrt{-1}$ étant $= xx + yy$, et la somme $= 2x$, il est clair que l'un et l'autre sont des quantités réelles.

7. Pour mieux éclaircir cela, soit $2m$ le nombre des facteurs simples imaginaires d'une équation quelconque, puisqu'on sait que ce nombre est pair; et on soutient qu'on peut toujours ranger ces facteurs tellement deux à deux, que leurs produits deviennent réels. Ainsi ces facteurs imaginaires au nombre de $2m$ se réduiront à des facteurs réels au nombre de m, et ces derniers facteurs ne seront plus simples, mais de la forme

$$xx + px + q;$$

ils seront donc du second degré. On dit donc que toute équation, ne pouvant être résolue en des facteurs simples réels, a toujours des facteurs réels du second degré. Cependant personne, à ce que je sache,[1]) n'a encore démontré assez rigoureusement la vérité de ce sentiment; je tâcherai donc d'en donner une démonstration, qui ne soit assujettie à aucune exception.

8. Or d'abord il est évident, que lorsqu'une équation n'a que deux facteurs simples imaginaires, leur produit est nécessairement réel. Car le produit de ces deux facteurs multiplié par le produit de tous les autres, qu'on suppose réels, doit produire l'équation proposée, c. à d. une quantité réelle,

1) Voir cependant le mémoire de D'ALEMBERT qu' EULER cite lui-même plus tard p. 114.
F. R.

ce qui seroit impossible, si le produit des deux facteurs imaginaires n'étoit pas réel. On voit de même, que si une équation a quatre racines imaginaires, toutes les autres étant réelles, le produit de ces quatre facteurs imaginaires sera aussi réel. Et en général quel que soit le nombre des facteurs imaginaires d'une équation, leur produit doit être nécessairement une quantité réelle; donc si le nombre des facteurs imaginaires d'une équation est $=2m$, le produit de tous ces facteurs multipliés ensemble sera de cette forme

$$x^{2m} + ax^{2m-1} + bx^{2m-2} + cx^{2m-3} + \text{etc.},$$

où tous les coefficiens a, b, c etc. sont des quantités réelles.

9. Il faut donc commencer par prouver qu'une équation du quatrième degré

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

dont toutes les racines sont imaginaires, est toujours résoluble en deux facteurs réels du second degré

$$(xx + px + r)(xx + qx + s) = 0;$$

car si toutes les racines sont réelles, ou deux au moins, une telle résolution n'a aucune difficulté. Mais si toutes les quatre sont imaginaires, la chose est non seulement moins évidente, mais il y a même des cas qui ne paroissent pas admettre une telle résolution. Un très savant Géomètre[1]) me proposa autrefois cette équation

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0,$$

par laquelle il vouloit prouver, que la résolution en deux facteurs réels n'étoit pas toujours possible. Et en effet il paroit d'abord fort difficile de combiner de ces quatre facteurs simples imaginaires tellement deux à deux ensemble, que leurs produits deviennent réels.

1) Il est presque sûr qu'il s'agit de NIC. I. BERNOULLI (1687—1759). Voir ses lettres à EULER du 24 oct. 1742 et du 6 avril 1743, *Correspondance math. et phys. publiée par P. H. Fuss*, St.-Pétersbourg 1843, t. II, p. 690 et 701; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series III. Cependant il faut remarquer que BERNOULLI avait proposé à EULER une autre équation de ce genre-là, savoir

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4 = 0,$$

10. Le doute tiré de cette équation étant trop important, pour que je le puisse passer en donnant une démonstration générale de la propriété dont il s'agit, je m'en vai développer plus soigneusement ce cas, avant que d'entreprendre cette démonstration. Et d'abord puisque les coefficiens de cette équation, qui sont 1, 2, 4, 2, 1, tiennent le même ordre, en commençant par le devant ou par l'arrière, il est certain que l'équation proposée est résoluble en deux facteurs de cette forme

$$xx + px + 1, \quad xx + qx + 1,$$

dont le produit

$$x^4 + (p+q)x^3 + (pq+2)xx + (p+q)x + 1,$$

étant comparé avec la forme proposée $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ fournit ces deux égalités

$$p + q = 2 \quad \text{et} \quad pq + 2 = 4 \quad \text{ou} \quad pq = 2.$$

---

qu' EULER réduisit alors à ces deux

$$xx - (2 + \sqrt{(4 + 2\sqrt{7})})x + 1 + \sqrt{7} + \sqrt{(4 + 2\sqrt{7})} = 0,$$
$$xx - (2 - \sqrt{(4 + 2\sqrt{7})})x + 1 + \sqrt{7} - \sqrt{(4 + 2\sqrt{7})} = 0.$$

Voir les lettres d'EULER à CHR. GOLDBACH du 15 déc. 1742 et du 26 févr. 1743, *Correspondance* etc., t. I, p. 169 et 200; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series III.

Peut-être qu'. EULER avait perdu le souvenir de l'équation de BERNOULLI et en avait reconstruit, sans le vouloir, une autre du même genre. Mais il se peut aussi qu' EULER ait reçu l'équation $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$ d'autre part, car la question dont il s'agit ici, était à l'ordre du jour depuis longtemps. Voir, par exemple, la lettre de JOH. BERNOULLI à EULER du 16 avril 1740, G. ENESTRÖM, *Der Briefwechsel zwischen LEONHARD EULER und JOHANN I BERNOULLI*, Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, p. 16, en particulier p. 55, où il s'agit de la décomposition de

$$x^4 + a^4$$

dans les facteurs

$$xx + ax\sqrt{2} + aa$$

et

$$xx - ax\sqrt{2} + aa,$$

ou bien JOH. BERNOULLI, *Opera omnia*, Lausannae 1742, t. II, p. 404, où il s'agit de la même chose. Voir aussi A. DE MOIVRE, *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis,* Londini 1730, p. 69, où il s'agit de la réduction de l'équation

$$z^4 + 4z^3 + 8zz + 4z + 1 = 0$$

à ces deux

$$z^2 + (2 + \sqrt{2})z + 3 + 2\sqrt{2} = 0,$$

$$z^2 + (2 - \sqrt{2})z + 3 - 2\sqrt{2} = 0$$

F. R.

Donc il y aura

$$(p-q)^2=(p+q)^2-4pq=4-4\cdot 2=-4$$

et partant

$$p-q=\sqrt{-4}=2\sqrt{-1},$$

d'où nous tirons ces valeurs

$$p=1+\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad q=1-\sqrt{-1},$$

de sorte que l'équation proposée

$$x^4+2x^3+4x^2+2x+1=0$$

est maintenant réduite à ces deux facteurs du second degré

$$\big(xx+(1+\sqrt{-1})x+1\big)\big(xx+(1-\sqrt{-1})x+1\big)=0,$$

qui sont à la vérité imaginaires.

11. Mais pour décider, s'il est possible ou non, de réduire cette équation à deux facteurs réels du second degré, il faut chercher ses quatre facteurs simples, pour voir, si l'on en peut combiner autrement deux à deux, afin qu'on parvienne à des produits réels. Or le premier facteur double $xx+(1+\sqrt{-1})x+1$ donne ces deux facteurs simples

$$x+\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{-1})+\tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{-1}-4)}=0,$$

$$x+\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{-1})-\tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{-1}-4)}=0,$$

et l'autre facteur double $xx+(1-\sqrt{-1})x+1$ donne ces deux facteurs simples

$$x+\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{-1})+\tfrac{1}{2}\sqrt{(-2\sqrt{-1}-4)}=0,$$

$$x+\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{-1})-\tfrac{1}{2}\sqrt{(-2\sqrt{-1}-4)}=0.$$

Il s'agit donc de voir, si le premier facteur simple étant multiplié par le troisième ou le quatrième produit un facteur double réel ou non; puisque nous voyons déjà, que le produit du premier par le second est imaginaire.

12. Cependant il n'est pas si aisé de reconnoître, si les produits qu'on trouve par ces multiplications du premier facteur par le troisième ou le quatrième, sont réelles ou imaginaires, et la difficulté naît des termes imaginaires $\sqrt{(2\sqrt{-1}-4)}$ et $\sqrt{(-2\sqrt{-1}-4)}$, dont on ne peut pas comparer l'imaginaire avec celui des autres nombres $1+\sqrt{-1}$ et $1-\sqrt{-1}$. Or je remarque que la formule $\sqrt{(2\sqrt{-1}-4)}$ peut se réduire à une telle forme $u+v\sqrt{-1}$, et alors l'autre formule $\sqrt{(-2\sqrt{-1}-4)}$ deviendra égale à $u-v\sqrt{-1}$. Car faisant ces égalités

$$\sqrt{(2\sqrt{-1}-4)}=u+v\sqrt{-1}$$

et

$$\sqrt{(-2\sqrt{-1}-4)}=u-v\sqrt{-1}$$

et prenant les quarrés, on obtiendra celles-cy

$$2\sqrt{-1}-4=uu-vv+2uv\sqrt{-1}$$

et

$$-2\sqrt{-1}-4=uu-vv-2uv\sqrt{-1},$$

d'où l'on tirera

$$-4=uu-vv \quad \text{et} \quad 2\sqrt{-1}=2uv\sqrt{-1},$$

ou bien

$$vv-uu=4 \quad \text{et} \quad uv=1.$$

Et ensuite on formera

$$(vv+uu)^2=(vv-uu)^2+4uuvv=16+4=20,$$

de sorte que

$$vv+uu=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

De là on trouvera enfin

$$vv=\sqrt{5}+2, \quad uu=\sqrt{5}-2$$

et par conséquent

$$v=\sqrt{(\sqrt{5}+2)} \quad \text{et} \quad u=\sqrt{(\sqrt{5}-2)}.$$

13. Ces deux valeurs de v et u étant réelles, substituons-les dans les expressions des quatre facteurs simples trouvés cy-dessus et ces facteurs deviendront

$$\text{I.}\quad x+\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{-1})+\tfrac{1}{2}(u+v\sqrt{-1})=x+\tfrac{1}{2}(1+u)+\tfrac{1}{2}(1+v)\sqrt{-1},$$

$$\text{II.}\quad x+\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{-1})-\tfrac{1}{2}(u+v\sqrt{-1})=x+\tfrac{1}{2}(1-u)+\tfrac{1}{2}(1-v)\sqrt{-1},$$

$$\text{III.}\quad x+\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{-1})+\tfrac{1}{2}(u-v\sqrt{-1})=x+\tfrac{1}{2}(1+u)-\tfrac{1}{2}(1+v)\sqrt{-1},$$

$$\text{IV.}\quad x+\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{-1})-\tfrac{1}{2}(u-v\sqrt{-1})=x+\tfrac{1}{2}(1-u)-\tfrac{1}{2}(1-v)\sqrt{-1}.$$

Maintenant il est clair que le produit du premier par le troisième devient effectivement réel, de même que celui du second par le quatrième. Car on aura

$$\text{le produit du I par le III}=\left(x+\tfrac{1}{2}(1+u)\right)^2+\tfrac{1}{4}(1+v)^2,$$

$$\text{le produit du II par le IV}=\left(x+\tfrac{1}{2}(1-u)\right)^2+\tfrac{1}{4}(1-v)^2.$$

Voilà donc l'équation proposée

$$x^4+2x^3+4x^2+2x+1=0$$

réduite à ces deux facteurs réels du second degré

$$xx+(1+u)x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(u+v)+\tfrac{1}{4}(vv+uu)=0,$$

$$xx+(1-u)x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(u+v)+\tfrac{1}{4}(vv+uu)=0,$$

où est

$$v=\sqrt{(\sqrt{5}+2)},\quad u=\sqrt{(\sqrt{5}-2)}$$

et

$$vv+uu=2\sqrt{5}.$$

14. Cet exemple nous conduit à un problème plus général, qui ne manquera pas de nous éclaircir déjà considérablement sur le sujet en question.

Ce problème regarde cette équation du quatrième degré plus générale

$$x^4+ax^3+(b+2)xx+ax+1=0,$$

qu'il faut résoudre en deux facteurs doubles ou du second degré, qui soient réels.

Posons d'abord ces deux facteurs de la forme suivante

$$(xx+px+1)(xx+qx+1)=0$$

et on voit d'abord qu'il faut qu'il soit

$$p+q=a \quad \text{et} \quad pq=b,$$

d'où l'on tirera

$$p=\frac{a+\sqrt{(aa-4b)}}{2} \quad \text{et} \quad q=\frac{a-\sqrt{(aa-4b)}}{2}.$$

Donc toutes les fois que $aa>4b$, le problème est résolu, vu que les deux facteurs supposés deviennent réels.

15. Mais lorsque $aa<4b$, ces deux facteurs seront imaginaires, et ne satisferont pas à la question. Dans ce cas il faut considérer les facteurs simples, qui seront

$$\text{I.} \quad x+\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{(pp-4)}=0,$$

$$\text{II.} \quad x+\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}\sqrt{(pp-4)}=0,$$

$$\text{III.} \quad x+\tfrac{1}{2}q+\tfrac{1}{2}\sqrt{(qq-4)}=0,$$

$$\text{IV.} \quad x+\tfrac{1}{2}q-\tfrac{1}{2}\sqrt{(qq-4)}=0.$$

Posons $4b=aa+cc$, puisque $aa<4b$, et on aura

$$p=\frac{a+c\sqrt{-1}}{2} \quad \text{et} \quad q=\frac{a-c\sqrt{-1}}{2};$$

donc

$$\sqrt{(pp-4)}=\tfrac{1}{2}\sqrt{(aa-cc-16+2ac\sqrt{-1})}$$

et

$$\sqrt{(qq-4)}=\tfrac{1}{2}\sqrt{(aa-cc-16-2ac\sqrt{-1})}.$$

Ces deux formules étant imaginaires, soit

$$\sqrt{(aa-cc-16+2ac\sqrt{-1})}=u+v\sqrt{-1}$$

et

$$\sqrt{(aa-cc-16-2ac\sqrt{-1})}=u-v\sqrt{-1}$$

et de là nous tirerons

$$uu-vv=aa-cc-16 \quad \text{et} \quad uv=ac.$$

16. Ces égalités nous fournissent celle-cy

$$(uu+vv)^2=(aa-cc-16)^2+4aacc=(aa+cc)^2-32(aa-cc)+256,$$

donc

$$vv+uu=\sqrt{((aa+cc)^2-32(aa-cc)+256)};$$

or cette quantité irrationnelle renfermant après le signe radical la somme de deux quarrés, sera toujours réelle, et même sa valeur sera plus grande que $aa-cc-16=uu-vv$ ou que $vv-uu=16+cc-aa$. Nous aurons donc les valeurs suivantes réelles pour v et u, savoir

$$v=\sqrt{\frac{\sqrt{((aa+cc)^2-32(aa-cc)+256)}+16+cc-aa}{2}},$$

$$u=\sqrt{\frac{\sqrt{((aa+cc)^2-32(aa-cc)+256)}-16-cc+aa}{2}},$$

et remettant pour cc sa valeur $4b-aa$, on aura

$$v=\sqrt{\left(\sqrt{(4bb-16(aa-2b)+64)}+8+2b-aa\right)},$$

$$u=\sqrt{\left(\sqrt{(4bb-16(aa-2b)+64)}-8-2b+aa\right)}$$

ou bien

$$v=\sqrt{\left(2\sqrt{((b+4)^2-4aa)}+8+2b-aa\right)},$$

$$u=\sqrt{\left(2\sqrt{((b+4)^2-4aa)}-8-2b+aa\right)}.$$

17. Ayant trouvé ces valeurs réelles pour v et u dans le cas où

$$4b>aa \quad \text{ou} \quad 4b=aa+cc,$$

nos quatre facteurs simples imaginaires seront

I. $x+\frac{1}{4}(a+c\sqrt{-1})+\frac{1}{4}(u+v\sqrt{-1})=x+\frac{1}{4}(a+u)+\frac{1}{4}(c+v)\sqrt{-1},$

II. $x+\frac{1}{4}(a+c\sqrt{-1})-\frac{1}{4}(u+v\sqrt{-1})=x+\frac{1}{4}(a-u)+\frac{1}{4}(c-v)\sqrt{-1},$

III. $x+\frac{1}{4}(a-c\sqrt{-1})+\frac{1}{4}(u-v\sqrt{-1})=x+\frac{1}{4}(a+u)-\frac{1}{4}(c+v)\sqrt{-1},$

IV. $x+\frac{1}{4}(a-c\sqrt{-1})-\frac{1}{4}(u-v\sqrt{-1})=x+\frac{1}{4}(a-u)-\frac{1}{4}(c-v)\sqrt{-1},$

d'où il est clair que les produits du I facteur par le III et du II par le IV sont réels, devenant

$$xx + \tfrac{1}{2}(a+u)x + \tfrac{1}{16}(aa+cc) + \tfrac{1}{16}(uu+vv) + \tfrac{1}{8}(au+cv),$$
$$xx + \tfrac{1}{2}(a-u)x + \tfrac{1}{16}(aa+cc) + \tfrac{1}{16}(uu+vv) - \tfrac{1}{8}(au+cv),$$

où il faut remarquer que

$$aa + cc = 4b, \quad vv + uu = 4\sqrt{((b+4)^2 - 4aa)}.$$

18. Pour exprimer plus commodément la valeur de $au + cv$, cherchons en celle du quarré, $aauu + ccvv + 2acuv$:

$$aauu = 2aa\sqrt{((b+4)^2 - 4aa)} - 8aa - 2aab + a^4,$$
$$ccvv = (8b - 2aa)\sqrt{((b+4)^2 - 4aa)} + 32b + 8bb - 4aab - 8aa - 2aab + a^4,$$
$$2acuv = 2aacc = 8aab - 2a^4;$$

donc nous aurons

$$(au+cv)^2 = 8b\sqrt{((b+4)^2 - 4aa)} + 32b - 16aa + 8bb$$

et la racine quarrée se trouvera

$$au + cv = 2\sqrt{\left(2bb + 8b - 4aa + 2b\sqrt{((b+4)^2 - 4aa)}\right)}$$

et partant les deux facteurs réels cherchés seront dans le cas $4b > aa$:

$$xx + \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{2}x\sqrt{\left(2\sqrt{((b+4)^2 - 4aa)} - 8 - 2b + aa\right)}$$
$$+ \tfrac{1}{4}b + \tfrac{1}{4}\sqrt{((b+4)^2 - 4aa)} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\left(2bb + 8b - 4aa + 2b\sqrt{((b+4)^2 - 4aa)}\right)},$$

$$xx + \tfrac{1}{2}ax - \tfrac{1}{2}x\sqrt{\left(2\sqrt{((b+4)^2 - 4aa)} - 8 - 2b + aa\right)}$$
$$+ \tfrac{1}{4}b + \tfrac{1}{4}\sqrt{((b+4)^2 - 4aa)} - \tfrac{1}{4}\sqrt{\left(2bb + 8b - 4aa + 2b\sqrt{((b+4)^2 - 4aa)}\right)}.$$

19. Par ce cas particulier on comprendra plus aisément ce que je veux prouver en général, c'est que toute équation, de quelque degré qu'elle soit, est toujours résoluble en des facteurs réels ou simples ou doubles. Ou puisque

deux facteurs simples joints ensemble produisent un facteur double, il faut démontrer que toute équation d'un degré pair, comme

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \cdots + N = 0,$$

est résoluble en m facteurs réels doubles de la forme $xx + px + r$, et qu'une équation d'un degré impair, comme

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + \cdots + N = 0,$$

a premièrement un facteur simple réel, et ensuite m facteurs doubles aussi tous réels. Pour cet effet je développerai les propositions suivantes, qui conduiront à la démonstration de ce que je viens d'avancer.

THEOREME 1

20. *Toute équation d'un degré impair, dont la forme générale est*

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \cdots + N = 0,$$

a toujours une racine réelle au moins, et si elle en a plusieurs, leur nombre sera impair.

DEMONSTRATION

Qu'on pose

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + \cdots + N = y$$

et qu'on considère la ligne courbe exprimée par cette équation; et il est évident qu'à chaque abscisse x ne répond qu'une seule appliquée y, qui sera toujours réelle; et que là où l'appliquée y évanouit, la valeur de l'abscisse x sera une racine de l'équation proposée. Donc cette équation aura autant de racines réelles qu'il y a d'endroits, où l'appliquée y évanouit, ce qui arrive là où la courbe traverse l'axe des abscisses; de sorte que le nombre des racines réelles sera égal au nombre des intersections de la courbe avec l'axe sur lequel on prend les abscisses. Pour juger donc du nombre de ces intersections, posons premièrement l'abscisse x positive et infiniment grande ou $x = \infty$, et il est clair qu'il deviendra alors

$$y = \infty^{2m+1} = \infty,$$

d'où il s'ensuit que la branche de la courbe qui répond aux abscisses positives infinies, se trouve au dessus de l'axe, puisque ses appliquées y sont positives. Or posant les abscisses négatives et aussi infinies ou $x = -\infty$, il sera

$$y = (-\infty)^{2m+1} = -\infty;$$

donc les appliquées seront ici négatives, et la branche de la courbe se trouvera au dessous de l'axe. Cette branche étant continue avec l'autre située au dessus de l'axe, il faut absolument que la courbe traverse quelque part l'axe, et si elle traverse en plusieurs points, le nombre de ces points doit être impair. D'où il s'ensuit que l'équation proposée aura nécessairement une racine réelle au moins, et si elle en a plusieurs, que leur nombre sera toujours impair. C. Q. F. D.

COROLLAIRE

21. Donc puisque le nombre de toutes les racines de l'équation proposée est $= 2m + 1$ ou impair, et que le nombre des racines réelles est aussi impair, il s'ensuit que le nombre des racines imaginaires, s'il y en a, sera toujours pair.

THEOREME 2

22. *Toute équation d'un degré pair, dont la forme générale est*

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \cdots + N = 0,$$

ou n'aura aucune racine réelle, ou si elle a des racines réelles, leur nombre sera toujours pair.

DEMONSTRATION

Considérons encore la courbe exprimée par cette équation

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \cdots + N = y,$$

qui ne consistera que d'un seul trait continu, puisque à chaque abscisse x il répond toujours une seule appliquée. Posons $x = +\infty$ et il sera aussi

$$y = +\infty;$$

donc la branche de la courbe, qui répond aux abscisses positives infinies, sera située au dessus de l'axe. Or posant $x = -\infty$, on aura pareillement

$$y = (-\infty)^{2m} = +\infty,$$

de sorte que la branche de la courbe qui répond aux abscisses négatives infinies, se trouvera aussi au dessus de l'axe. Donc il sera possible que la courbe ne traverse nulle part l'axe des abscisses; et si elle passe quelque part par l'axe, pour descendre dans la région au dessous, il faut qu'elle y repasse pour retourner dans celle de dessus. Par conséquent, si la courbe traverse l'axe, il faut que le nombre de toutes les intersections soit pair. Donc puisque chaque intersection donne une racine réelle de l'équation proposée, il s'ensuit ou qu'elle n'aura point du tout de racines réelles, ou si elle en a, que leur nombre sera toujours pair. C. Q. F. D.

COROLLAIRE

23. Puisque le nombre de toutes les racines, tant réelles qu' imaginaires, de l'équation proposée est $= 2m$, et partant pair, et que le nombre des racines réelles, si elle en a, est aussi pair, il s'ensuit que le nombre des racines imaginaires, si elle en a, est aussi pair.

SCHOLIE

24. Ces deux théorèmes avec leurs démonstrations sont déjà si connus, que j'aurois pu m'y rapporter sans les détailler. Mais comme ils renferment le fondement de toute la théorie, dont il s'agit ici, que le nombre de toutes les racines imaginaires d'une équation quelconque est toujour pair, j'ai cru en devoir tirer le commencement; et cela d'autant plus que le théorème suivant, qui n'est pas si généralement connu, demande une démonstration semblable.

THEOREME 3

25. *Toute équation d'un degré pair quelconque, où le dernier terme, ou l'absolu, a une valeur négative, comme*

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \cdots - OO = 0,$$

a toujours deux racines réelles au moins, l'une positive et l'autre négative.

DEMONSTRATION

Posant

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \cdots - OO = y,$$

pour considérer la courbe exprimée par cette équation, nous venons de voir, que cette courbe s'étend des deux côtés à l'infini au dessus de l'axe. Or posant $x = 0$, nous aurons

$$y = - OO,$$

et partant le point de la courbe qui répond à $x = 0$, sera au dessous de l'axe; il faut donc que la courbe passe de ce point de l'un et l'autre côté par l'axe pour monter au dessus. Donc puisque chaque intersection donne une racine réelle de l'équation proposée, et que de ces deux intersections l'une doit répondre à une abscisse x affirmative, l'autre à une négative, il est certain que l'équation proposée aura au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative. C. Q. F. D.

COROLLAIRE

26. Cette démonstration nous fait aussi comprendre, que quand une équation semblable à la proposée aura plusieurs racines réelles positives, leur nombre sera impair, de même le nombre de toutes les racines réelles négatives sera aussi impair.

THEOREME 4

27. *Toute équation du quatrième degré, comme*

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

se peut toujours décomposer en deux facteurs réels du second degré.

DEMONSTRATION

On sait que posant $x = y - \frac{1}{4}A$, cette équation se change dans une autre du même degré, où le second terme manque; et comme cette transformation se peut toujours faire, supposons que dans l'équation proposée le second terme manque déjà, et que nous ayons cette équation

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

à résoudre en deux facteurs réels du second degré; et il est d'abord clair que ces deux facteurs seront de cette forme

$$(xx + ux + \alpha)(xx - ux + \beta) = 0,$$

dont comparant le produit avec l'équation proposée, nous aurons

$$B = \alpha + \beta - uu, \quad C = (\beta - \alpha)u, \quad D = \alpha\beta,$$

d'où nous tirerons

$$\alpha + \beta = B + uu, \quad \beta - \alpha = \frac{C}{u}$$

et partant

$$2\beta = uu + B + \frac{C}{u} \quad \text{et} \quad 2\alpha = uu + B - \frac{C}{u};$$

ayant donc $4\alpha\beta = 4D$, nous obtiendrons cette équation

$$u^4 + 2Buu + BB - \frac{CC}{uu} = 4D$$

ou bien

$$u^6 + 2Bu^4 + (BB - 4D)uu - CC = 0,$$

d'où il faut chercher la valeur de u. Or puisque le terme absolu $-CC$ est essentiellement négatif, nous venons de démontrer, que cette équation a au moins deux racines réelles; prenant donc l'une ou l'autre pour u, les valeurs α et β seront également réelles, et par conséquent les deux facteurs supposés du second degré $xx + ux + \alpha$ et $xx - ux + \beta$ seront réels. C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1

28. Toute expression donc du quatrième degré,

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

quoique tous ses quatre facteurs simples soient imaginaires, se peut toujours décomposer en deux facteurs réels du second degré; ou bien chacun des quatre facteurs simples a parmi les autres son compagnon, par lequel étant multiplié il produit un produit réel.

COROLLAIRE 2

29. Et, si une expression d'un degré quelconque n'a que quatre facteurs simples imaginaires, puisque leur produit est réel et compris dans cette forme $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, il est aussi certain, que ce produit est résoluble en deux facteurs réels du second degré, dont chacun renferme deux facteurs simples imaginaires.

COROLLAIRE 3

30. De là il est aussi évident, qu'une équation quelconque du cinquième degré est toujours résoluble en trois facteurs réels dont un est simple et deux doubles ou du second degré. Car cette équation ayant une racine réelle, aura un facteur simple réel, et l'autre facteur étant du quatrième degré, se décompose en deux facteurs doubles réels.

COROLLAIRE 4

31. La résolution des équations en facteurs réels, ou simples ou doubles, est donc prouvée pour les équations du cinquième degré et pour tous les degrés inférieurs. Mais ce théorème n'est pas suffisant à prouver cette résolution pour aucun degré supérieur, à moins que le nombre des racines imaginaires ne soit plus petit que 6. Car alors ce nombre sera ou 4, ou 2, ou 0, et dans tous ces cas la possibilité de cette résolution est évidente.

SCHOLIE 1

32. J'ai déjà prouvé cy-dessus que cette équation du quatrième degré,

$$x^4 + ax^3 + (b + 2)x^2 + ax + 1 = 0,$$

qui n'est qu'un cas particulier de la générale de ce degré, que je viens de considérer ici, est toujours résoluble en deux facteurs réels du second degré. Or cette résolution, qui a été assez embarrassante dans le cas $4b > aa$, se déduit immédiatement de la méthode employée dans ce théorème, sans avoir égard à la forme des racines imaginaires. Cet usage me paroit assez important, pour que je fasse l'application de la résolution générale à ce cas. Or pour éviter les fractions posons $a = 4c$ et $b > 4cc$, de sorte que l'équation à résoudre soit

$$x^4 + 4cx^3 + (b + 2)xx + 4cx + 1 = 0.$$

Maintenant pour ôter le second terme soit $x = y - c$ et notre équation prendra cette forme

$$y^4 + (2 + b - 6cc)y^2 + (8c^3 - 2bc)y + 1 - 2cc + bcc - 3c^4 = 0;$$

dont supposant les facteurs réels du second degré

$$(yy + uy + \alpha)(yy - uy + \beta) = 0,$$

à cause de

$$B = 2 + b - 6cc, \quad C = 8c^3 - 2bc \quad \text{et} \quad D = 1 - 2cc + bcc - 3c^4,$$

pour trouver u nous aurons cette équation à résoudre

$$u^6 + (4 + 2b - 12cc)u^4 + (bb + 4b - 16bcc - 16cc + 48c^4)u^2 - 4cc(4cc - b)^2 = 0,$$

qui étant divisée par $uu + b - 4cc$ donne

$$u^4 + (4 + b - 8cc)u^2 + 16c^4 - 4bcc = 0.$$

Or le premier facteur $uu + b - 4cc$ étant posé $= 0$, ne donne que des valeurs imaginaires pour u, à cause de $b > 4cc$; donc il faut chercher quelque valeur réelle de l'autre équation, d'où l'on tire

$$uu = -2 - \tfrac{1}{2}b + 4cc \pm \sqrt{((2 + \tfrac{1}{2}b)^2 - 16cc)},$$

et la valeur réelle de u sera

$$u = \sqrt{\left(\sqrt{((2 + \tfrac{1}{2}b)^2 - 16cc)} - 2 - \tfrac{1}{2}b + 4cc\right)}$$

ou bien remettant aa pour $16cc$

$$u = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt{((b + 4)^2 - 4aa)} - 8 - 2b + aa\right)},$$

d'où l'on trouve les mêmes facteurs qui ont été assignés cy-dessus.

SCHOLIE 2

33. La force de la démonstration de ce théorème revient à ce que l'inconnue u se détermine par une équation du 6me degré, et que le dernier terme de cette équation est essentiellement négatif. L'une et l'autre de ces deux circonstances se peut découvrir par le seul raisonnement, sans qu'on

ait besoin de chercher l'équation même qui renferme l'inconnue u. Donc puisque dans la suite, où je passerai à des équations de plus hauts degrés, il seroit trop difficile et même impossible de trouver l'équation par laquelle l'inconnue u est déterminée, il sera important de découvrir les deux circonstances mentionnées par le seul raisonnement pour l'équation proposée du quatrième degré, afin de frayer le chemin pour mettre en usage ce même raisonnement, lorsque l'équation proposée sera d'un plus haut degré.

Soit donc l'équation proposée dégagée déjà du second terme

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

et posant les quatre racines de cette équation

$$x = \mathfrak{a}, \quad x = \mathfrak{b}, \quad x = \mathfrak{c}, \quad x = \mathfrak{d},$$

il est d'abord clair que la somme de ces quatre racines

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d}$$

sera égale à zéro.

Ensuite posant en général un des facteurs doubles de cette équation $xx - ux + \beta$ ou

$$xx - ux + \beta = 0,$$

il est certain que u sera la somme de deux racines quelconques des quatre supposées $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$. Donc cette lettre u regardée comme notre inconnue peut avoir autant de valeurs différentes, qu'il y a de diverses combinaisons de deux lettres prises de ces quatre $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$. Or ce nombre de combinaisons étant, comme on sait, $= \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$, la lettre u est susceptible de 6 valeurs différentes, et non de plusieurs. Donc la lettre u sera déterminée par une équation du 6me degré, qui aura les six racines suivantes

$$\text{I. } u = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \quad \text{II. } u = \mathfrak{a} + \mathfrak{c}, \quad \text{III. } u = \mathfrak{a} + \mathfrak{d},$$
$$\text{IV. } u = \mathfrak{c} + \mathfrak{d}, \quad \text{V. } u = \mathfrak{b} + \mathfrak{d}, \quad \text{VI. } u = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}.$$

Donc puisque $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = 0$, si nous posons les trois premières de ces six racines

$$\text{I. } u = p, \quad \text{II. } u = q, \quad \text{III. } u = r,$$

les trois dernières seront

$$\text{IV. } u = -p, \quad \text{V. } u = -q, \quad \text{VI. } u = -r,$$

de sorte que le négatif de chaque valeur de u sera aussi une valeur de u.

Sachant maintenant ces six racines, l'équation qui les fournira toutes sera

$$(u-p)(u-q)(u-r)(u+p)(u+q)(u+r)=0$$

ou combinant par toutes les deux ensemble dont l'une est la négative de l'autre, nous aurons

$$(uu-pp)(uu-qq)(uu-r)=0,$$

ce qui donnera une équation du sixième degré, où toutes les puissances impaires de u manquent, tout comme nous l'avons trouvée dans la démonstration du théorème.

Mais je remarque de plus, que le dernier terme constant de cette équation sera $=-pp\cdot -qq\cdot -rr=-ppqqrr$, lequel, étant donc un quarré avec le signe —, sera essentiellement négatif. D'où il s'ensuit que cette équation aura nécessairement au moins deux racines réelles, dont l'une ou l'autre prise pour u donnera un facteur réel double de l'équation proposée. Voilà donc une autre démonstration du théorème proposé, à laquelle seront semblables celles des théorèmes suivans.

Or on m'objectera sans doute, que j'ai supposé ici, que la quantité pqr étoit une quantité réelle, et que son quarré $ppqqrr$ étoit affirmatif; ce qui étoit encore douteux, vu que les racines $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ étant imaginaires, il pourroit bien arriver, que le quarré de la quantité pqr qui en est composée, fût négatif. Or je réponds à cela, que ce cas ne sauroit jamais avoir lieu; car quelques imaginaires que soient les racines $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, on sait pourtant qu'il doit y avoir

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=0,$$

$$\mathfrak{ab}+\mathfrak{ac}+\mathfrak{ad}+\mathfrak{bc}+\mathfrak{bd}+\mathfrak{cd}=B,$$

$$\mathfrak{abc}+\mathfrak{abd}+\mathfrak{acd}+\mathfrak{bcd}=-C,\text{[1]}$$

$$\mathfrak{abcd}=D,$$

ces quantités B, C, D étant réelles. Mais puisque $p=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $q=\mathfrak{a}+\mathfrak{c}$, $r=\mathfrak{a}+\mathfrak{d}$, leur produit

$$pqr=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})(\mathfrak{a}+\mathfrak{d})$$

---

1) Editio princeps: $\mathfrak{abc}+\cdots+\mathfrak{bcd}=C$. Par conséquent on y trouve aussi plus bas: $pqr=C$ au lieu de $-C$. F. R.

est déterminable, comme on sait, par les quantités B, C, D, et sera par conséquent réel; tout comme nous avons vu, qu'il est effectivement $pqr = -C$, et $ppqqrr = CC$. On reconnoîtra aisément de même, que dans les plus hautes équations cette même circonstance doit avoir lieu, et qu'on ne sauroit me faire des objections de ce côté contre les démonstrations suivantes.

THEOREME 5

34. *Toute équation du* 8me *degré est toujours résoluble en deux facteurs réels du quatrième degré.*

DEMONSTRATION

Ayant fait évanouir le second terme, l'équation proposée du 8me degré aura cette forme

$$x^8 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H = 0,$$

dont les deux facteurs du quatrième degré en général seront

$$x^4 - ux^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,$$

$$x^4 + ux^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta = 0.$$

Si nous égalons le produit de ces deux facteurs à l'équation proposée, nous obtiendrons 7 égalités, c'est à dire précisément autant qu'il y a de coefficiens inconnus u, α, β, γ, δ, ε, ζ. De ces égalités on éliminera successivement les lettres α, β, γ, δ, ε, ζ, ce qui se pourra faire, comme on sait, sans qu'on ait besoin d'aucune extraction de racine, de sorte que les valeurs de ces lettres seront toutes exprimées réellement par les quantités connues B, C, D, E, F, G, H et l'inconnue u, et enfin on parviendra à une équation qui ne renfermera plus que l'inconnue u avec les quantités connues, de laquelle il faut chercher la valeur de u; et cette valeur étant trouvée réelle, les valeurs des lettres éliminées α, β, γ etc. seront aussi réelles, et partant les deux facteurs supposés du quatrième degré également réels.

Il s'agit donc de trouver l'équation, qui nous détermine la valeur de u. Or en général u exprimera la somme de quatre racines quelconques de l'équation proposée, dont le nombre de toutes les racines étant $= 8$, la lettre u aura autant de valeurs différentes, qu'il y a de diverses combinaisons de

4 racines prises des huit de l'équation; ainsi le nombre de toutes les valeurs de u sera $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$, et partant l'inconnue u sera déterminée par une équation du 70me degré. De plus si nous supposons que p soit une des valeurs de u, p sera la somme de quelques quatre racines de l'équation proposée, et la somme des autres quatre sera $= -p$, puisque la somme de toutes les huit racines est $= 0$. Ainsi si $u - p$ est un facteur de l'équation du 70me degré, $u + p$ en sera un aussi, et partant joignant ces deux facteurs ensemble, $uu - pp$ sera un facteur double ou du second degré de ladite équation du 70me degré. Par conséquent cette équation aura 35 facteurs de la forme $uu - pp$, ou elle sera un tel produit

$$(uu - pp)\,(uu - qq)\,(uu - rr)\,(uu - ss) \text{ etc.},$$

le nombre de ces facteurs étant $= 35$. Donc le dernier terme ou le terme absolu de cette équation sera le produit de 35 quarrés négatifs, et par conséquent aussi un quarré négatif comme $-ppqqrrss$ etc. à cause du nombre 35 impair. Or la racine de ce quarré, $pqrs$ etc. est une quantité réelle déterminable par les coefficiens B, C, D, E etc. de l'équation proposée, et partant son quarré $ppqqrrss$ etc. une quantité positive. Donc le coefficient inconnu u étant déterminé par une équation du 70me degré dont le dernier terme est essentiellement négatif, cette équation aura au moins deux valeurs réelles, dont l'une étant posée pour u fournira un facteur réel du 4me degré de l'équation proposée, qui sera par conséquent résoluble en deux facteurs réels du 4me degré. C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1

35. Or chaque facteur du 4me degré étant résoluble en deux facteurs réels du second degré, il s'ensuit que toute équation du huitième degré est toujours résoluble en quatre facteurs réels du second degré de la forme $xx + px + q$.

COROLLAIRE 2

36. On voit aussi que toute équation du neuvième degré est résoluble en un facteur simple réel et quatre facteurs doubles ou du second degré également réels.

COROLLAIRE 3

37. Cette proposition nous fait aussi voir, que la même résolution en facteurs réels, ou simples ou doubles, doit avoir lieu dans toutes les équations du 6me ou 7me degré. Car on n'a qu' à multiplier une telle équation, ou par xx ou par x, pour la réduire au huitième degré.

SCHOLIE 1

38. Ayant multiplié une équation du 6me degré par xx, pour avoir une du 8me degré, les deux facteurs du 4me degré de celle-cy renfermeront ce multiplicateur xx, qu'il en faut par conséquent retrancher, pour avoir les facteurs de l'équation proposée du 6me degré. Or il arrivera, ou que l'un des deux facteurs du 4me degré contiendra xx, ou que chacun en contienne x; dans le premier cas on aura après la division par xx un facteur réel du second degré et un du 4me; qui étant séparé en deux du second, on aura les trois facteurs doubles de l'équation proposée. Or dans l'autre cas, divisant chaque facteur par x, on obtiendra deux facteurs réels du 3me degré, dont chacun renferme un facteur simple réel; de sorte que dans l'un et l'autre cas l'équation du 6me degré se résout en facteurs réels, ou simples ou doubles. On verra de même, que les équations du 7me degré sont également résolubles en tels facteurs, puisqu'on sait que ces équations ont toujours un facteur simple réel, par lequel étant divisées, elles seront réduites à des équations du 6me degré.

SCHOLIE 2

39. Il paroît encore douteux, si après avoir trouvé une valeur réelle de u, les autres coefficiens α, β, γ, δ etc. seront aussi déterminés par des expressions réelles, vu qu'il pourroit arriver que quelques-uns renfermeroient des quantités irrationnelles, qui pourroient devenir imaginaires. Mais pour lever ce doute, on n'a qu' à regarder u comme quantité déjà connue, de sorte que le nombre des égalités auxquelles il faut satisfaire, surpasse d'une unité le nombre des inconnues α, β, γ, δ etc. qui sont à déterminer. Ainsi on éliminera l'une après l'autre de ces quantités, tant que cela se pourra faire sans extraire des racines; cela étant fait, il restera un certain nombre d'égalités, et le nombre des inconnues sera d'une unité moindre. Supposons qu'il reste encore à déterminer quelques inconnues dont chacune monte dans les équations à plusieurs dimensions. Dans ce cas on peut toujours combiner deux

égalités tellement ensemble, qu'il en résulte une, où l'inconnue à déterminer n'aura pas plus d'une dimension, et de là on tirera sa valeur par une expression rationnelle.[1]) Suivant cette méthode on parviendra enfin à deux égalités, qui contiennent la dernière quantité inconnue, et à quelque dignité qu'elle y monte, on a dans l'algèbre des moyens d'en former par la voie de combinaison d'autres équations, où les puissances de l'inconnue seront successivement abaissées, et enfin on parviendra à une équation, dans laquelle ne se trouvera que la première puissance de l'inconnue, qui en sera par conséquent déterminée par une expression rationnelle; laquelle étant substituée dans les valeurs des autres coefficiens déjà trouvées, fournira aussi pour ceux-cy des expressions rationnelles. De sorte que lorsqu'on aura trouvé pour u une valeur réelle, les valeurs de tous les autres coefficiens le deviendront aussi nécessairement.

THEOREME 6

40. *Toute équation du* 16me *degré est toujours résoluble en deux facteurs réels du* 8me *degré.*

DEMONSTRATION

Ayant fait évanouir le second terme de l'équation, elle aura cette forme

$$x^{16}+Bx^{14}+Cx^{13}+Dx^{12}+\cdots=0$$

et le nombre des coefficiens B, C, D etc. sera $=15$. Supposant donc ses deux facteurs du 8me degré

$$x^8-ux^7+\alpha x^6+\beta x^5+\gamma x^4+\delta x^3+\varepsilon x^2+\zeta x+\eta=0,$$
$$x^8+ux^7+\theta x^6+\iota x^5+\varkappa x^4+\lambda x^3+\mu x^2+\nu x+\xi=0,$$

si l'on égale le produit de ces deux facteurs à l'équation proposée, on obtiendra 15 égalités, desquelles il faut chercher les valeurs des coefficiens $u, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc., dont le nombre est aussi $=15$, de sorte que c'est un problème déterminé. Donc, si pour le commencement nous regardons le coefficient u comme connu, nous aurons une égalité de plus que [le nombre] des inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc.

1) Voir cependant les objections faites par C. F. GAUSS dans l'art. 8 de sa dissertation dont la première partie suit ci-après. F. R.

et partant on en pourra tirer leurs valeurs déterminées par u et B, C, D, E etc. sans avoir besoin d'aucune extraction de racine; ces valeurs seront donc rationnelles et par conséquent aussi réelles, pourvu qu'on ait une valeur réelle pour u. Tout revient donc à démontrer, qu'il est toujours possible de trouver une valeur réelle pour le coefficient u. Or ayant éliminé successivement toutes les lettres α, β, γ, δ etc., on parviendra enfin à une équation composée des coefficiens connus B, C, D, E etc. et de l'inconnue u, qui y montera à un certain degré de dimensions, dont l'exposant se conclura par ce raisonnement. La quantité u marquant en général la somme de 8 racines quelconques prises de 16 racines de l'équation proposée, il est clair par les règles des combinaisons, que la quantité u est susceptible d'autant de valeurs différentes, qu'il y a d'unités dans cette formule

$$\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 12870.$$

Donc, l'équation qui déterminera les valeurs de l'inconnue u, sera nécessairement du 12870me degré. Or puisque la somme de toutes les 16 racines de l'équation proposée est $=0$, si la somme de 8 quelconques, c. à. d. une valeur de u, est $=p$, la somme des 8 autres sera $=-p$, et partant $-p$ est aussi une valeur de u. Ou bien, si $u-p$ est un facteur de l'équation qui détermine u, $u+p$ en sera aussi un facteur, donc leur produit $uu-pp$ renfermant les deux racines p et $-p$ en sera aussi facteur. Par conséquent cette équation sera composée de $\frac{1}{2}\cdot 12870 = 6435$ facteurs de la forme $uu-pp$ ou elle sera le produit de tels facteurs

$$(uu-pp)(uu-qq)(uu-rr)(uu-ss) \text{ etc.} = 0,$$

le nombre de ces facteurs étant $=6435$. Or ce nombre étant impair, le dernier terme ou l'absolu de cette équation sera $=-ppqqrrss$ etc. Posant donc $pqrs$ etc. $=P$, il est certain, que P est déterminable par les coefficiens B, C, D, E etc., en sorte qu'il en est une fonction rationnelle, et partant réelle. Donc le dernier terme de notre équation, qui doit servir à déterminer u, sera $=-PP$, c. à. d. il sera essentiellement négatif. De là il s'ensuit que cette équation aura nécessairement au moins deux racines réelles, l'une affirmative et l'autre négative, qui par conséquent étant prises pour $+u$ et $-u$ fourniront deux facteurs réels du 8me degré de l'équation proposée. C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1

41. Donc puisque chacun de ces deux facteurs du 8me degré est résoluble en 4 facteurs réels du 2me degré, il est clair que toute équation du 16me degré est résoluble en 8 facteurs doubles réels; et une équation du 17me degré ayant certainement un facteur simple réel, elle aura outre cela encore 8 facteurs doubles réels.

COROLLAIRE 2

42. La même résolubilité en facteurs réels, ou simples ou doubles, aura aussi lieu en toutes les équations d'un degré inférieur que le 16me. Car multipliant une telle équation par x ou x^2 ou x^3 etc. pour l'élever au 16me degré, on en cherchera les 8 facteurs doubles réels, desquels retranchant les facteurs x, qui y ont été introduits par la multiplication, on aura les facteurs réels de la proposée, qui seront ou simples ou doubles.

COROLLAIRE 3

43. Il est donc démontré, que toutes les équations, qui ne surpassent pas le 17me degré, sont toujours résolubles en facteurs réels, ou simples ou doubles.

SCHOLIE

44. Si nous examinons la force de ces démonstrations, nous trouverons qu'elle consiste en ce que l'équation finale, qui renferme la seule inconnue u, devient d'un degré pair et que son dernier terme est un quarré négatif; ce qui est arrivé dans la résolution des équations du 4me, 8me et 16me degré. On s'apercevra de même, que la dernière circonstance du terme absolu négatif ne sauroit avoir lieu, à moins que l'exposant du degré de l'équation pour u ne soit un tel nombre pair comme $2n$, que sa moitié n est un nombre impair; car le dernier terme étant le produit de n quarrés négatifs, deviendroit positif, si n étoit un nombre pair. Et c'est la raison que notre démonstration ne sauroit être appliquée à des équations du 12me ou 20me degré; car si nous voulions opérer de la même manière sur une équation par exemple du 20me degré, en la décomposant en deux facteurs du 10me degré, comme

$$x^{10} + ux^9 + \text{etc.} \quad \text{et} \quad x^{10} - ux^9 + \text{etc.}$$

après avoir fait évanouir le second terme, on verroit que la quantité u dût être déterminée par une équation du

$$\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} = 4\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19 \text{ degré,}$$

dont la moitié, étant encore un nombre pair, produiroit le dernier terme de l'équation affirmatif, et on n'en sauroit plus tirer la conclusion dont nous avons besoin. Or pour peu que nous réfléchissons sur cette circonstance, nous trouverons, que le dernier terme ne devient nécessairement négatif, que lorsque l'équation proposée est d'un degré dont l'exposant est une puissance de 2, et partant la manière de démontrer, dont je me sers ici, n'aura lieu après, que dans les équations du 32me et 64me et 128me etc. degré. Or ces cas sont suffisans pour notre dessein, puisqu'ayant démontré la résolubilité en facteurs réels pour des équations d'un degré quelconque, elle vaut aussi pour toutes les équations d'un degré inférieur.

THEOREME 7

45. *Toute équation d'un degré dont l'exposant est une puissance du binaire comme* 2^n (*n étant un nombre entier plus grand que* 1), *est résoluble en deux facteurs réels du degré* 2^{n-1}.

DEMONSTRATION

Ayant fait évanouir le second terme, l'équation dont il s'agit, sera de cette forme

$$x^{2^n} + Bx^{2^n-2} + Cx^{2^n-3} + Dx^{2^n-4} + \cdots = 0,$$

où le nombre des coefficiens B, C, D etc. est $= 2^n - 1$. Supposons maintenant les deux facteurs cherchés

$$x^{2^{n-1}} - ux^{2^{n-1}-1} + \alpha x^{2^{n-1}-2} + \beta x^{2^{n-1}-3} + \cdots = 0,$$
$$x^{2^{n-1}} + ux^{2^{n-1}-1} + \lambda x^{2^{n-1}-2} + \mu x^{2^{n-1}-3} + \cdots = 0,$$

où le nombre des coefficiens à déterminer u, α, β etc. est aussi $= 2^n - 1$. Or la comparaison du produit de ces deux facteurs avec la proposée fournit autant

d'égalités, de sorte que toutes les lettres α, β, γ etc. se pourront déterminer par les connues B, C, D etc. et u réellement sans extraction de racines; or enfin pour déterminer l'inconnue u, on parviendra à une équation, qui aura pour exposant de son degré

$$\frac{2^n(2^n-1)(2^n-2)(2^n-3)(2^n-4)\cdots(2^{n-1}+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots2^{n-1}},$$

comme on sait par les règles des combinaisons. Soit N cet exposant de degré de l'équation pour u, et en renversant l'ordre des facteurs du dénominateur, on aura

$$N=\frac{2^n}{2^{n-1}}\cdot\frac{2^n-1}{2^{n-1}-1}\cdot\frac{2^n-2}{2^{n-1}-2}\cdot\frac{2^n-3}{2^{n-1}-3}\cdot\frac{2^n-4}{2^{n-1}-4}\cdots\frac{2^{n-1}+1}{1}$$

et abaissant chaque fraction aux plus petits termes

$$N=2\cdot\frac{2^n-1}{2^{n-1}-1}\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}-1}\cdot\frac{2^n-3}{2^{n-1}-3}\cdot\frac{2^{n-2}-1}{2^{n-3}-1}\cdots\frac{2^{n-1}+1}{1}.$$

Or il est seür que ce nombre N est entier, et puisque tant le produit des numérateurs que des dénominateurs est impair, ce nombre sera impairement pair, ou sa moitié un nombre impair; il sera donc en commençant par la dernière fraction

$$\frac{1}{2}N=\frac{2^{n-1}+1}{1}\cdot\frac{2^{n-2}+1}{1}\cdot\frac{2^{n-1}+3}{3}\cdot\frac{2^{n-3}+1}{1}\cdot\frac{2^{n-1}+5}{5}\cdots\frac{2^n-1}{2^{n-1}-1}.$$

Mais puisque le second terme de l'équation proposée manque, si p est une racine u, il en sera $-p$ aussi une racine, et partant $uu-pp$ un facteur double, et le nombre de tous les facteurs de cette forme sera $=\frac{1}{2}N$, c. à. d. un nombre impair. Par conséquent le dernier terme de l'équation pour u sera un quarré négatif, ce qui est une marque que cette équation renferme au moins deux valeurs réelles, l'une pour u et l'autre pour $-u$; d'où l'on formera deux facteurs réels du degré 2^{n-1} de l'équation proposée. C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1

46. Toute équation donc du 32me degré est résoluble en deux facteurs réels du 16me degré, et partant par le théorème précédent aussi résoluble en 16 facteurs réels du second degré. Ce qui doit s'entendre aussi de toutes les équations au dessous du 32me degré qu'on pourra par ce moyen décomposer en facteurs réels, ou simples ou doubles.

COROLLAIRE 2

47. Puisque ensuite toute équation du 64me degré est résoluble en deux facteurs réels du 32me degré, toutes les équations, qui n'excèdent pas le 64me ou 65me degré, seront aussi résolubles en facteurs réels, tous ou simples ou doubles.

COROLLAIRE 3

48. De la même manière on étendra cette résolubilité en facteurs réels, ou simples ou doubles, successivement aux équations du 128me, 256me, 512me etc. degré; de sorte qu'il est à présent certain que toute équation, de quelque haut degré qu'elle soit, est toujours résoluble en facteurs réels, ou simples ou du second degré.

SCHOLIE

49. Voilà donc une démonstration complète de la proposition, qu'on suppose communément dans l'analyse et principalement dans le calcul intégral, par laquelle on prétend, que toute fonction rationnelle d'une variable x, comme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.},$$

se peut toujours résoudre en facteurs réels, ou simples de la forme $x + p$ ou doubles de la forme $xx + px + q$. C'est de la possibilité de cette résolution, qu'on a tiré cette belle et importante conséquence, que l'intégrale d'une telle formule différentielle $\frac{Pdx}{Q}$, où P et Q marquent des fonctions rationnelles quelconques de x, se peut toujours exprimer, ou algébriquement ou par des logarithmes ou par des arcs de cercle.[1]) Or pour ce qui regarde la solidité de la démonstration, que je viens de donner de cette belle propriété des équations, je crois qu'on n'y trouvera rien à redire, après qu'on aura bien pesé les remarques que j'y ai ajoutées; cependant en cas qu'on voulût faire des difficultés de reconnoître la bonté de ces démonstrations, je m'en vai ajouter quelques propositions relatives à ce sujet, qui ne sont pas dépendantes des précédentes, et dont la vérité servira à lever tous les doutes qu'on pourroit encore avoir.

---

1) Voir le mémoire D'ALEMBERT cité p. 114. F. R.

THEOREME 8

50. *Toute équation du 6me degré a au moins un facteur réel du second degré, indépendamment des démonstrations précédentes.*

DEMONSTRATION

Soit l'équation proposée du 6me degré

$$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0,$$

dont un facteur double quelconque soit

$$xx - ux + v;$$

l'autre facteur sera donc du quatrième degré, comme

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

et on comprend, que si l'un est réel, l'autre le doit être aussi. Le produit de ces deux facteurs devant être égal à la proposée, on parviendra à 6 égalités, d'où il faut déterminer les coefficiens supposés u, v, α, β, γ, δ, et cette détermination se pourra faire, comme j'ai déjà remarqué, par des expressions rationnelles, jusques à la dernière, qui soit du coefficient u, dont il faudra tirer la valeur d'une équation d'un certain nombre de degrés; de sorte que, si l'on pourra trouver une valeur réelle de u, celles des autres coefficiens α, β, γ etc. deviendront aussi réelles, et partant aussi les facteurs supposés mêmes. Il s'agit donc de considérer l'équation qui déterminera u, pour voir, si elle contient des valeurs réelles. Or il est clair, qu'en général u est la somme de deux racines quelconques de l'équation proposée; et partant elle sera susceptible d'autant de valeurs différentes, qu'il y a d'unités dans cette formule $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$. Donc il faut absolument que l'équation pour déterminer u contienne 15 valeurs différentes, ni plus ni moins; et ainsi cette équation sera du 15me degré, c. à. d. d'un degré impair. Elle aura donc seûrement une racine réelle, qui étant posée pour u nous fournira un facteur réel du second degré $xx - ux + v$ de l'équation proposée du 6me degré. C. Q. F. D.

COROLLAIRE

51. Toute équation donc du sixième degré peut toujours se résoudre en deux facteurs réels, dont l'un est du second et l'autre du quatrième degré; et puisque celui-cy est résoluble en deux facteurs réels du second degré, on aura trois facteurs réels doubles, dont l'équation du 6me degré est composée.

SCHOLIE

52. Je suppose ici la possibilité de résoudre une équation du 4me degré en deux facteurs réels doubles, quoique mon dessein soit de rendre cette proposition et quelques suivantes indépendantes des démonstrations précédentes. Car quand même on douteroit de leur solidité, ce doute ne sauroit rouler que sur les équations du 8me, 16me etc. degré; puisque la démonstration pour les équations du 4me degré est tout à fait accomplie, ayant même déduit l'équation d'où il faut déterminer l'inconnue u, par les opérations algébriques, ce qui ne pouvoit pas s'exécuter dans les équations d'un plus haut degré, où il falloit avoir recours à quelques principes particuliers. Il est donc remarquable, que la résolution d'une équation du 6me degré est prouvée ici par celle du 4me degré, au lieu que suivant les théorèmes précédens, il n'a pas été permis de reconnoître la possibilité de cette résolution, qu'après avoir démontré celle des équations du 8me degré. Maintenant donc nous sommes convaincus, que toute équation du sixième degré est résoluble en trois facteurs doubles réels, quand même il seroit impossible de résoudre pareillement les équations du 8me degré. Or la méthode dont je me suis servi ici pour prouver la résolution des équations du 6me degré, s'étend également à toutes les équations d'un degré dont l'exposant est un nombre impairement pair, ou dont la moitié est un nombre impair; comme je ferai voir dans le théorème suivant. Au reste il est ici encore à remarquer, qu'en vertu de ce théorème aussi toute équation du 7me degré est résoluble en un facteur simple et trois doubles, tous réels.

THEOREME 6

53. *Toute équation d'un degré dont l'exposant est un nombre de cette forme* $4n+2$, *a toujours au moins un facteur réel du second degré, et cela indépendamment des démonstrations supérieures.*

DEMONSTRATION

L'équation proposée étant de cette forme

$$x^{4n+2} + Ax^{4n+1} + Bx^{4n} + Cx^{4n-1} + \cdots = 0,$$

soit un de ses facteurs doubles quelconque

$$xx - ux + v,$$

et il est certain que u sera la somme de deux racines quelconques de l'équation proposée. Or le nombre de toutes les racines étant $= 4n + 2$, si l'on en combine deux, le nombre de toutes les combinaisons possibles sera

$$= \frac{(4n+2)(4n+1)}{1 \cdot 2} = (2n+1)(4n+1)$$

et la lettre u sera susceptible d'autant de valeurs; ou bien u se déterminera par une équation d'un degré dont l'exposant $= (2n+1)(4n+1)$, qui étant impair, cette équation aura nécessairement une racine réelle, qui étant mise pour u donnera le facteur double $xx - ux + v$ réel. D'où il s'ensuit que toute équation d'un degré $4n + 2$ a toujours au moins un facteur réel du second degré. C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1

54. Donc si une équation du huitième degré est résoluble en 4 facteurs doubles réels, toute équation du 10[me] degré pourra être résolue en 5 facteurs doubles réels, et pour prouver cela, on n'a pas besoin de recourir aux équations du 16[me] degré, comme auparavant.

COROLLAIRE 2

55. Et si toute équation du degré 2^m est résoluble en 2^{m-1} facteurs doubles réels, ce théorème prouve la résolubilité en facteurs doubles réels des équations du degré $2^m + 2$. Et de plus les équations des degrés $2^m + 1$ et $2^m + 3$ permettront aussi la résolution en facteurs réels, ou simples ou doubles, puisqu' étant d'un degré impair, elles ont au moins un facteur simple réel.

THEOREME 10

56. *Toute équation d'un degré dont l'exposant est un nombre de la forme* $8n+4$, *a au moins un facteur réel du quatrième degré, et cela indépendamment des démonstrations supérieures.*

DEMONSTRATION

Si l'on pose un facteur quelconque du 4me degré

$$x^4 - ux^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

le coefficient u sera la somme de 4 racines quelconques de l'équation proposée. Or cette équation ayant $8n+4$ racines, le nombre de toutes les valeurs possibles, dont la quantité u est susceptible, est

$$= \frac{(8n+4)(8n+3)(8n+2)(8n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{(2n+1)(8n+3)(4n+1)(8n+1)}{3},$$

et partant la quantité u sera déterminée par une équation du même degré et il est clair que l'exposant de ce degré, étant un nombre entier, sera impair. Donc cette équation aura au moins une racine réelle, qui étant mise pour u, les autres coefficiens α, β, γ en seront aussi déterminés réellement, et on obtiendra un facteur réel du quatrième degré. C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1

57. Donc, puisqu'un facteur réel du 4me degré est incontestablement résoluble en deux facteurs réels du second degré, toute équation d'un degré $8n+4$ aura certainement deux facteurs doubles réels au moins, et les équations du $8n+5$me degré auront outre cela un facteur simple réel de plus.

COROLLAIRE 2

58. Les équations du 12me degré étant de ce nombre, auront donc deux facteurs doubles réels, et le troisième facteur sera du 8me degré. Donc si celui-cy est résoluble en 4 facteurs doubles réels, on aura en tout 6 facteurs doubles réels, sans qu'on ait besoin de monter aux équations du 16me degré pour prouver cela.

SCHOLIE

59. On prouvera par un semblable raisonnement, que toute équation d'un degré $16n + 8$ a un facteur réel du 8me degré au moins, et on passera de même aux équations de $32n + 16$, $64n + 32$, $128n + 64$ etc. dimensions pour prouver qu'elles ont au moins un facteur réel du 16me ou du 32me ou du 64me degré etc. De là on tirera cette conséquence, que toutes les équations depuis le 8me degré jusqu'au 16me se peuvent résoudre en facteurs réels, ou simples ou doubles, en ne supposant que la résolution des équations du 4me et 8me degré, et en général la résolution de toute équation se pourra faire, sans qu'on ait besoin de la réduire à un degré plus haut, comme nous avons été obligé de faire, en n'employant que la résolution des équations dont l'exposant du degré est une puissance du binaire. Combinant donc ces deux manières de démontrer ensemble, on ne balancera plus d'accorder ce théorème général, que toute équation algébrique, de quelque degré qu'elle soit, est toujours résoluble en facteurs réels, ou simples ou doubles. Cependant il faut avouer, qu'il est pour la plupart impossible d'exécuter cette résolution, ou d'assigner actuellement ces facteurs réels; puisque dès qu'une équation passe le quatrième degré, les règles de l'algèbre ne sont plus suffisantes à nous découvrir les racines. Mais pour le but qu'on a en vue en établissant ce théorème général, il suffit qu'on soit asseüré, qu'une telle résolution est toujours possible, quoiqu'on ne la puisse jamais exécuter.

THEOREME 11

60. *Si une équation algébrique, de quelque degré qu'elle soit, a des racines imaginaires, chacune sera comprise dans cette formule générale* $M + N\sqrt{-1}$, *les lettres* M *et* N *marquant des quantités réelles.*

DEMONSTRATION

Soit l'équation proposée quelconque du degré n

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \cdots = 0,$$

de sorte que le nombre de toutes ses racines soit $= n$. Qu'on décompose cette équation dans tous ses facteurs réels, qui seront ou simples de la forme

$x - p = 0$ ou du second degré de la forme $xx - 2px + q = 0$; et toutes les racines se trouveront par la résolution des égalités que ces facteurs, étant posés $= 0$, fournissent. Or chaque facteur simple ou l'équation $x - p = 0$ donne une racine réelle $x = p$; et chaque facteur double ou l'équation $xx - 2px + q = 0$ renferme deux racines

$$x = p + \sqrt{(pp - q)} \quad \text{et} \quad x = p - \sqrt{(pp - q)},$$

qui seront aussi réelles, si $pp > q$. Mais si $pp < q$, soit $q = pp + rr$, et il sera $\sqrt{(pp - q)} = \sqrt{-rr} = r\sqrt{-1}$; donc ces deux racines seront imaginaires, savoir

$$x = p + r\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad x = p - r\sqrt{-1}.$$

Ayant donc démontré, qu'il est toujours possible de résoudre toute équation en facteurs, ou simples ou doubles, réels, toutes les racines seront aussi, ou réelles ou imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$, où M et N sont des quantités réelles, de sorte que l'imaginaire qui y entre, n'est contenu que dans la forme $\sqrt{-1}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1

61. Si donc parmi les racines imaginaires d'une équation quelconque se trouve une $x = p + r\sqrt{-1}$, il s'y trouvera aussi certainement celle-cy $x = p - r\sqrt{-1}$; ce qui est évident tant de la démonstration de ce théorème, que de la nature du signe radical $\sqrt{-1}$, qui renferme essentiellement aussi bien le signe $+$ que le signe $-$; de sorte que connoissant une racine imaginaire d'une équation quelconque, l'autre se découvre d'elle-même.

COROLLAIRE 2

62. Ayant déjà fait voir que le nombre de toutes les racines imaginaires, qu'une équation quelconque contient, est pair, chaque racine imaginaire $x = p + r\sqrt{-1}$ aura parmi les autres son compagnon $x = p - r\sqrt{-1}$, qui lui appartient plus que toutes les autres, vu que tant la somme de ces deux racines $2p$, que leur produit $pp + rr$, sont des quantités réelles.

COROLLAIRE 3

63. De là il est aussi clair, que si $x - p - r\sqrt{-1}$ est un facteur imaginaire d'une équation quelconque, la formule $x - p + r\sqrt{-1}$ en sera aussi un

facteur. Et ces deux facteurs joints ensemble donneront un facteur double réel de la même équation, lequel sera

$$xx - 2px + pp + rr.$$

SCHOLIE

64. On comprend de là réciproquement, que si l'on pouvoit démontrer que toutes les racines imaginaires d'une équation quelconque eussent nécessairement la forme $M + N\sqrt{-1}$, il seroit aisé d'en démontrer que toute équation fût aussi résoluble en facteurs réels, ou simples ou du second degré. Car les racines réelles fourniroient toujours autant de facteurs simples réels, et chaque racine imaginaire $x = p + r\sqrt{-1}$ étant jointe avec sa compagne $x = p - r\sqrt{-1}$ produiroit un facteur double réel

$$xx - 2px + pp + rr;$$

de sorte, que si une équation du degré $n = \alpha + 2\beta$ avoit α racines réelles et 2β racines imaginaires, dont chacune fût de la forme $M + N\sqrt{-1}$, il seroit démontré que cette équation eût α facteurs simples réels et β facteurs doubles réels. Or il paroît très vraisemblable que toute racine imaginaire, quelque compliquée qu'elle soit, est toujours réductible à la forme $M + N\sqrt{-1}$, et Mr. D'ALEMBERT[1]) a prouvé cela dans son excellente pièce sur le Calcul intégral, qui se trouve dans le II. Volume de nos Mémoires, d'une telle manière, qu'il n'y reste plus le moindre doute. Cependant comme il a emploié dans sa démonstration des quantités infiniment petites, quoique cette considération n'en puisse pas diminuer la force, je tâcherai de tirer aussi de cette source une démonstration rigoureuse du théorème général, auquel cette pièce est destinée, sans avoir recours à des quantités infiniment petites. Or pour cet effet j'aurai besoin de quelques théorèmes préliminaires.

THEOREME 12

65. *Toute fonction qui est formée, ou par addition, ou par soustraction, ou par multiplication, ou par division d'autant de formules imaginaires de cette forme* $M + N\sqrt{-1}$ *que ce soit, sera toujours comprise dans la même forme* $M + N\sqrt{-1}$, *les lettres* M *et* N *marquant des quantités réelles.*

---

1) J. D'ALEMBERT (1717—1783), *Recherches sur le calcul intégral*, Histoire de l'acad. d. sc. de Berlin 2 (1746), 1748, Mémoires, p. 182. F. R.

DEMONSTRATION

Qu'on s'imagine plusieurs formules imaginaires de la forme indiquée, lesquelles soient

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \gamma+\delta\sqrt{-1},\quad \varepsilon+\zeta\sqrt{-1},\quad \eta+\theta\sqrt{-1}\quad \text{etc.},$$

et il est d'abord clair, qu'en ajoutant ces formules ensemble, ou en retranchant quelques-unes, l'expression qui en résulte sera toujours comprise dans cette forme $M+N\sqrt{-1}$. Il est aussi clair, que si l'on multiplie deux ou plusieurs de ces formules ensemble, le produit sera toujours contenu dans la formule $M+N\sqrt{-1}$; car le produit de deux

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}\quad \text{et}\quad \gamma+\delta\sqrt{-1}$$

étant

$$\alpha\gamma-\beta\delta+(\alpha\delta+\beta\gamma)\sqrt{-1},$$

a la forme $M+N\sqrt{-1}$, laquelle étant outre cela multipliée par $\varepsilon+\zeta\sqrt{-1}$ donnera encore cette forme, et ainsi de suite. Il ne s'agit donc plus que de la division. Or il est clair que ce cas se réduit toujours à une telle fraction

$$\frac{A+B\sqrt{-1}}{C+D\sqrt{-1}},$$

où tant le numérateur que le dénominateur est déjà composé par les trois premières opérations, l'addition, la soustraction et la multiplication, d'autant de formules imaginaires de la forme $M+N\sqrt{-1}$ qu'on voudra. Or cette fraction se réduira à une autre, dont le dénominateur sera réel, en multipliant en haut et en bas par $C-D\sqrt{-1}$; car alors on aura

$$\frac{AC+BD+(BC-AD)\sqrt{-1}}{CC+DD},$$

de sorte que posant M pour $\frac{AC+BD}{CC+DD}$ et N pour $\frac{BC-AD}{CC+DD}$, on aura cette forme $M+N\sqrt{-1}$.

Par conséquent cette forme demeure inaltérée, par quelques opérations qu'on joigne ensemble autant de formules imaginaires de la forme $M+N\sqrt{-1}$ qu'on voudra. C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1

66. De là il est aussi évident que toutes les puissances dont l'exposant est un nombre entier positif, d'une formule imaginaire $A + B\sqrt{-1}$, auront toujours la même forme $M + N\sqrt{-1}$; puisque ces puissances se forment par la multiplication.

COROLLAIRE 2

67. Ensuite, puisque la puissance $(A + B\sqrt{-1})^n$ est contenue dans la forme $M + N\sqrt{-1}$, si n est un nombre entier positif, la même forme aura lieu, si n est un nombre entier négatif. Car ayant

$$(A + B\sqrt{-1})^{-n} = \frac{1}{(A + B\sqrt{-1})^n} = \frac{1}{M + N\sqrt{-1}},$$

cette forme se réduit à

$$\frac{M - N\sqrt{-1}}{MM + NN}.$$

COROLLAIRE 3

68. La forme générale $M + N\sqrt{-1}$ comprend aussi toutes les quantités réelles, lorsqu'on pose $N = 0$. Donc joignant ensemble par les quatre opérations mentionnées, non seulement des formules imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$, mais aussi des réelles, le produit sera toujours compris dans la forme $M + N\sqrt{-1}$.

COROLLAIRE 4

69. Il peut aussi arriver que ce produit, quoiqu'il soit formé des formules imaginaires, devient réel, les imaginaires se détruisant mutuellement, ou rendant $N = 0$. Ainsi le produit de $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ par $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ est réel; et on sait que $(-1 + \sqrt{-3})^3 = 8$.

THEOREME 13

70. *De quelque puissance qu'on extraye la racine, ou d'une quantité réelle, ou d'une imaginaire de la forme* $M + N\sqrt{-1}$, *les racines seront toujours, ou réelles ou imaginaires de la même forme* $M + N\sqrt{-1}$.

DEMONSTRATION

Soit n l'exposant de la puissance dont il faut extraire la racine, de sorte qu'on ait à considérer les valeurs, ou de $\sqrt[n]{a}$ ou de $\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})}$. Or puisque celle-cy se change en celle-là, si $b=0$, il suffit de prouver que

$$\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})} \quad \text{ou} \quad (a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$$

est contenu dans la forme $M+N\sqrt{-1}$, quelque grand que soit le nombre n. Pour prouver cela, qu'on cherche un angle φ tel que sa tangente soit $=\frac{b}{a}$, ou posant $\sqrt{(aa+bb)}=c$, qu'on prenne l'angle φ tel que son sinus soit $=\frac{b}{c}$ et le cosinus $=\frac{a}{c}$; on aura donc

$$a+b\sqrt{-1}=c\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi),$$

puisque $\cos\varphi=\frac{a}{c}$ et $\sin\varphi=\frac{b}{c}$. Or il est démontré qu'une puissance quelconque d'une telle forme, comme

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)^m,$$

est

$$=\cos m\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi,$$

quelque nombre qu'on signifie par la lettre m, soit qu'il soit affirmatif ou négatif ou entier ou rompu ou même irrationnel.[1]) Cela posé on aura

$$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})}=c^{\frac{1}{n}}\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)^{\frac{1}{n}}$$
$$=\left(\cos\frac{1}{n}\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\frac{1}{n}\varphi\right)\sqrt[n]{c}.$$

Donc puisque $c=\sqrt{(aa+bb)}$ est une quantité réelle et positive, et l'angle φ et partant aussi sa partie $\frac{1}{n}\varphi$ avec son sinus et cosinus [sont] aussi des quantités réelles, il est évident que

$$\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})}$$

ou

$$\left(\cos\frac{1}{n}\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\frac{1}{n}\varphi\right)\sqrt[n]{c}$$

appartient à la forme $M+N\sqrt{-1}$.

1) Voir A. DE MOIVRE, *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, Londini 1730, p. 1. F. R.

Donc toutes les racines d'une quantité réelle ou imaginaire de cette forme $M + N\sqrt{-1}$ sont toujours comprises dans la formule générale $M + N\sqrt{-1}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1

71. Comme on sait que toute quantité a deux racines quarrées, trois racines cubiques, quatre racines quarré-quarrées, et ainsi de suite, on trouve par cette méthode toutes les racines, dont le nombre est $= n$, puisque $\frac{1}{n}\varphi$ a autant de valeurs différentes.

COROLLAIRE 2

72. Car puisque φ est l'angle dont le sinus est $= \frac{b}{c}$ et le cosinus $= \frac{a}{c}$, au lieu de φ on peut aussi prendre les angles

$$4\varrho + \varphi, \quad 8\varrho + \varphi, \quad 12\varrho + \varphi \quad \text{etc.},$$

ϱ marquant l'angle droit, puisque tous ces angles ont le même sinus et cosinus. Mettant donc dans la racine trouvée

$$\left(\cos\frac{1}{n}\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{1}{n}\varphi\right)\sqrt[n]{c}$$

pour φ ces angles φ, $4\varrho + \varphi$, $8\varrho + \varphi$, $12\varrho + \varphi$ etc., on trouvera autant d'expressions différentes qu'il y a d'unités dans l'exposant n.

COROLLAIRE 3

73. Puisque n peut marquer un nombre quelconque, il s'ensuit de notre démonstration, que non seulement $\sqrt[n]{(a + b\sqrt{-1})}$, où n est un nombre entier positif, mais en général que cette expression $(a + b\sqrt{-1})^m$, quelque nombre que soit marqué par m, ou positif ou négatif ou entier ou rompu ou même irrationnel, est toujours comprise dans la forme générale $M + N\sqrt{-1}$.

COROLLAIRE 4

74. Par conséquent non seulement les quatre opérations de l'arithmétique, mais aussi l'extraction des racines, de quelque degré qu'elles soient, ne changent point la forme $M + N\sqrt{-1}$ des quantités imaginaires, auxquelles on les applique d'une manière quelconque.

SCHOLIE

75. Si la quantité dont on cherche toutes les racines d'un certain degré, est réelle ou $b = 0$, il sera $c = \sqrt{aa}$, d'où l'on aura pour c une valeur positive, quand même a auroit une négative; et l'angle φ sera ou $= 0$ ou $= 180^0$, selon que le cosinus $\frac{a}{c}$ sera ou $= +1$ ou $= -1$. Dans le premier cas, où a est positif et $c = a$, les valeurs de φ seront donc 0, 4ϱ, 8ϱ, 12ϱ etc. et les racines du degré n du nombre a seront, posant ϱ pour la marque d'un angle droit,

$$\sqrt[n]{a}, \quad \left(\cos\frac{4\varrho}{n} + \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{4\varrho}{n}\right)\sqrt[n]{a}, \quad \left(\cos\frac{8\varrho}{n} + \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{8\varrho}{n}\right)\sqrt[n]{a} \quad \text{etc.}$$

Or si a est un nombre négatif, on aura les expressions suivantes, ou bien les valeurs de $\sqrt[n]{-a}$ seront

$$\left(\cos\frac{2\varrho}{n} + \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2\varrho}{n}\right)\sqrt[n]{a}, \quad \left(\cos\frac{6\varrho}{n} + \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{6\varrho}{n}\right)\sqrt[n]{a} \quad \text{etc.}$$

mettant pour φ successivement 2ϱ, 6ϱ, 10ϱ, 14ϱ etc. Mais cette matière étant déjà suffisamment développée, je me borne ici à cette unique conséquence, que l'extraction des racines, tant des quantités réelles qu'imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$, produit toujours ou des quantités réelles ou des imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$.

THEOREME 14

76. *De quelque degré que soit une équation algébrique, toutes les racines imaginaires qu'elle peut avoir, sont toujours comprises dans cette forme générale* $M + N\sqrt{-1}$, *de sorte que* M *et* N *sont des quantités réelles.*

DEMONSTRATION

Soit en général l'équation proposée

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \cdots = 0,$$

et quoique nous ne soyons pas en état d'assigner la formule générale, qui en contient les racines, comme nous le sommes pour les équations du second,

troisième et quatrième degré, il est pourtant certain[1]) que cette formule sera composée de plusieurs signes radicaux, dont les quantités connues A, B, C, D, E etc. seront compliquées. On peut aussi remarquer que cette expression analytique d'une racine quelconque renfermera plusieurs membres, dont chacun sera la racine d'un certain degré d'une quantité, qui renferme encore des signes radicaux, et que ceux-cy auront après eux encore d'autres, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne en chaque membre au dernier signe radical, qui n'affecte plus que des quantités réelles. Remontons de ces derniers signes successivement, et il est évident que la quantité marquée par le dernier signe sera, ou réelle ou imaginaire de la forme $M + N\sqrt{-1}$. Ensuite devant cette quantité, jointe avec quelque valeur, ou réelle ou imaginaire aussi de la forme $M + N\sqrt{-1}$, se trouvera un nouveau signe radical, qui se réduira donc à $\sqrt[n]{(M + N\sqrt{-1})}$, dont la valeur est encore de la forme $M + N\sqrt{-1}$; et si nous remontons de cette manière jusqu'aux premiers signes radicaux, qui distinguent les membres, nous verrons qu'aucune opération ne nous sauroit écarter de cette forme, et que par conséquent chaque membre aura enfin la même forme, quelque grand que soit le nombre des signes radicaux, qui y sont enveloppés. D'où il s'ensuit que l'expression générale, qui renferme toutes les racines de l'équation proposée, se réduira nécessairement à la forme $M + N\sqrt{-1}$, de sorte que toutes les racines imaginaires ne sauroient avoir d'autre forme que celle-cy. C. Q. F. D.

SCHOLIE 1

77. Voilà donc une nouvelle démonstration du théorème général, que je me suis proposé de prouver ici, et contre laquelle on ne sauroit rien objecter, si ce n'est, que nous ne savons pas, comment les racines des équations des plus hauts degrés après le 4[me] sont compliquées. Or cette objection n'aura aucune force, pourvu qu'on m'accorde que les expressions pour les racines ne contiennent point d'autres opérations que l'extraction des racines, outre les quatre opérations vulgaires, et l'on ne sauroit soutenir que des opérations transcendantes s'y mêlassent. Mais si la conjecture, que j'ai autrefois[2]) avancée sur la forme des racines des équations d'un ordre quelconque, est fondée, la démonstration que je viens de donner ici, aura toute la force

1) C'est à dire d'après la conjecture avancée par EULER dans le mémoire 30 de ce volume. F. R.

2) Voir le mémoire 30 de ce volume. F. R.

qu'on peut souhaiter. Car ayant une équation quelconque du degré n, je dis qu'il y aura toujours une équation du degré $n-1$, dont les racines étant $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ etc. au nombre de $n-1$, une racine quelconque de l'autre équation du degré n sera

$$= a + \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \sqrt[n]{\delta} + \text{etc.},$$

où a est une quantité réelle. Donc, si les racines de l'équation du degré $n-1$ sont, ou réelles ou de la forme $M + N\sqrt{-1}$, les racines de l'équation du degré n auront aussi cette forme. Par conséquent, puisque les racines des équations du second degré sont, ou réelles ou de la forme $M + N\sqrt{-1}$, les racines des équations du troisième degré se réduiront aussi à la même forme, et partant aussi les racines des équations du 4me, 5me, 6me etc. à l'infini.

SCHOLIE 2

78. De là on tirera encore cette importante conséquence, que toute quantité imaginaire, quelque compliquée qu'elle soit, est toujours réductible à cette formule $M + N\sqrt{-1}$; de sorte que toute quantité imaginaire est toujours composée de deux membres, dont l'un est une quantité réelle indiquée par M, et l'autre est le produit d'une quantité aussi réelle comme N, multipliée par $\sqrt{-1}$; de manière que $\sqrt{-1}$ est la seule source de toutes les expressions imaginaires. Car si nous regardons l'origine des quantités imaginaires, qui est l'extraction des racines ou la résolution des équations, il est démontré, que toutes les quantités imaginaires qui en découlent, sont toujours comprises dans cette forme $M + N\sqrt{-1}$, et de plus j'ai fait voir, que de quelque manière qu'on traite une ou plusieurs quantités imaginaires de cette forme par les opérations de l'analyse, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines, toutes les expressions qui en résultent, se réduisent toujours à la même forme $M + N\sqrt{-1}$. On sera donc obligé d'accorder cette vérité, en tant que ce ne sont que les opérations algébriques, par lesquelles les formules imaginaires sont compliquées; mais on doutera peut-être, si les quantités imaginaires qui dérivent des opérations transcendantes, comme sont celles qui impliquent la nature des logarithmes ou des angles, sont encore réductibles à la même forme. Or pour lever ce doute, je ferai voir que toutes les opérations transcendantes qui sont connues, n'écartent point les quantités imaginaires qu'elles produisent, de la forme

marquée, et quoiqu'il soit impossible d'appliquer le même raisonnement à toutes les opérations transcendantes, les propositions suivantes ôteront tout sujet de douter davantage de la vérité de cette propriété générale de toutes les quantités imaginaires, de quelque source qu'elles puissent tirer leur origine.

PROBLEME 1

79. *Une quantité imaginaire étant élevée à une puissance dont l'exposant est une quantité réelle quelconque, déterminer la forme imaginaire qui en résulte.*

SOLUTION

Soit $a + b\sqrt{-1}$ la quantité imaginaire, et m l'exposant réel de la puissance, de sorte qu'il s'agit de déterminer M et N pour qu'il soit

$$(a + b\sqrt{-1})^m = M + N\sqrt{-1}.$$

Posons

$$\sqrt{(aa + bb)} = c$$

et c sera toujours une quantité réelle et positive, car nous ne regardons pas ici l'ambiguïté du signe $\sqrt{\ }$. Ensuite cherchons l'angle φ tel que son sinus soit $= \frac{b}{c}$ et le cosinus $= \frac{a}{c}$, ayant ici égard à la nature des quantités a et b, si elles sont affirmatives ou négatives; et il est certain, qu'on pourra toujours assigner cet angle φ, quelles que soient les quantités a, b, pourvu qu'elles soient réelles, comme nous le supposons. Or ayant trouvé cet angle φ, qui sera toujours réel, on aura en même tems tous les autres angles dont le sinus $\frac{b}{c}$ et le cosinus $\frac{a}{c}$ sont les mêmes; car posant π pour l'angle de 180°, tous ces angles seront

$$\varphi,\quad 2\pi + \varphi,\quad 4\pi + \varphi,\quad 6\pi + \varphi,\quad 8\pi + \varphi \quad \text{etc.},$$

auxquels on peut ajouter ceux-cy

$$-2\pi + \varphi,\quad -4\pi + \varphi,\quad -6\pi + \varphi,\quad -8\pi + \varphi \quad \text{etc.}$$

Cela posé il sera

$$a + b\sqrt{-1} = c\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi),$$

et la puissance proposée

$$(a + b\sqrt{-1})^m = c^m (\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)^m,$$

où c^m aura toujours une valeur réelle positive, qu'il faut lui donner préférablement à toutes les autres valeurs, qu'il pourroit avoir. Ensuite il est démontré que

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi;$$

où il faut remarquer, que puisque m est une quantité réelle, l'angle $m\varphi$ sera aussi réel, et partant aussi son sinus et son cosinus. Donc nous aurons

$$(a + b\sqrt{-1})^m = c^m (\cos m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi),$$

ou bien la puissance $(a + b\sqrt{-1})^m$ est contenue dans la forme $M + N\sqrt{-1}$, en prenant

$$M = c^m \cos m\varphi \quad \text{et} \quad N = c^m \sin m\varphi,$$

où il y a

$$c = \sqrt{(aa + bb)} \quad \text{et} \quad \cos\varphi = \frac{a}{c} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{b}{c}\cdot$$

C. Q. F. T.

COROLLAIRE 1

80. De même manière qu'il est

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi,$$

il sera aussi

$$(\cos\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)^m = \cos m\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi,$$

et partant on aura

$$(a - b\sqrt{-1})^m = c^m (\cos m\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi),$$

où φ marque le même angle que dans le cas précédent.

COROLLAIRE 2

81. Si l'exposant m est négatif, puisque

$$\sin - m\varphi = -\sin m\varphi \quad \text{et} \quad \cos - m\varphi = \cos m\varphi,$$

il sera donc

$$(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)^{-m} = \cos m\varphi \mp \sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi$$

et

$$(a \pm b\sqrt{-1})^{-m} = c^{-m}(\cos m\varphi \mp \sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi).$$

COROLLAIRE 3

82. Si m est un nombre entier, soit affirmatif, soit négatif, la formule $(a + b\sqrt{-1})^m$ n'aura qu'une seule valeur; car quoiqu'on substitue pour φ tous les angles φ, $\pm 2\pi + \varphi$, $\pm 4\pi + \varphi$, $\pm 6\pi + \varphi$ etc., on trouvera toujours pour $\sin m\varphi$ et $\cos m\varphi$ les mêmes valeurs.

COROLLAIRE 4

83. Mais si l'exposant m est un nombre rompu $\frac{\mu}{\nu}$, l'expression $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{\mu}{\nu}}$ aura autant de valeurs différentes, qu'il y a d'unités en ν; car en substituant pour φ les angles marqués, on obtiendra autant de valeurs différentes pour $\sin m\varphi$ et $\cos m\varphi$, que le nombre ν contient d'unités.

COROLLAIRE 5

84. D'où il est clair, que si m est un nombre irrationnel ou incommensurable à l'unité, l'expression $(a + b\sqrt{-1})^m$ aura aussi une infinité de valeurs différentes, car tous les angles φ, $\pm 2\pi + \varphi$, $\pm 4\pi + \varphi$, $\pm 6\pi + \varphi$ etc. fourniront de diverses valeurs pour $\sin m\varphi$ et $\cos m\varphi$.

SCHOLIE 1

85. Le fondement de la solution de ce problème est, que

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi,$$

dont la vérité se prouve par les théorèmes connus sur la multiplication des angles. Car ayant deux angles quelconques φ et θ, il sera

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)(\cos\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin\theta) = \cos(\varphi+\theta) + \sqrt{-1}\cdot\sin(\varphi+\theta),$$

ce qui est clair par la multiplication actuelle, qui donne

$$\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta + (\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta)\sqrt{-1}.$$

Or on sait qu'il y a

$$\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta = \cos(\varphi+\theta)$$

et

$$\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta = \sin(\varphi+\theta).$$

D'où l'on tire aisément la conséquence, qu'il est

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi,$$

lorsque l'exposant m est un nombre entier. Mais que la même formule a lieu aussi, quand m est un nombre quelconque, la différentiation après avoir pris les logarithmes le mettra hors de doute. Car, prenant les logarithmes, on aura

$$ml(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi) = l(\cos m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi).$$

Maintenant, traitant l'angle φ comme une quantité variable, on aura

$$\frac{-md\varphi\sin\varphi + md\varphi\sqrt{-1}\cdot\cos\varphi}{\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi} = \frac{-md\varphi\sin m\varphi + md\varphi\sqrt{-1}\cdot\cos m\varphi}{\cos m\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi},$$

et multipliant les numérateurs par $-\sqrt{-1}$, on obtiendra

$$\frac{md\varphi(\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)}{\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi} = \frac{md\varphi(\cos m\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi)}{\cos m\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin m\varphi} = md\varphi,$$

ce qui est une équation identique.

SCHOLIE 2

86. Mais on demandera, comment on auroit pu parvenir à la transformation de la formule $(a+b\sqrt{-1})^m$ à la forme $M+N\sqrt{-1}$, si l'on n'avoit pas sçu la propriété mentionnée des angles multiples, qui paroît d'abord tout à fait étrangère à ce dessein. Pour cet effet je joindrai ici une autre solution du problème, sans employer cette propriété; et la méthode dont je me servirai, conduira aussi à la solution des problèmes suivans. Comme il s'agit donc de convertir la forme $(a+b\sqrt{-1})^m$ en celle-cy $x+y\sqrt{-1}$, je pose

$$(a+b\sqrt{-1})^m = x+y\sqrt{-1}$$

et, prenant les logarithmes, on aura

$$ml(a+b\sqrt{-1}) = l(x+y\sqrt{-1});$$

maintenant, regardant a, b, x, y comme variables, je prend les différentiels [1])

$$\frac{mda + mdb\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}} = \frac{dx + dy\sqrt{-1}}{x + y\sqrt{-1}},$$

qui se réduisent à cette équation

$$\frac{mada - mbda\sqrt{-1} + madb\sqrt{-1} + mbdb}{aa + bb} = \frac{xdx + xdy\sqrt{-1} - ydx\sqrt{-1} + ydy}{xx + yy},$$

où il faut que les membres réels et imaginaires soient séparément égaux entr'eux, puisqu'il est impossible d'égaler une quantité réelle à une imaginaire. De là nous tirerons deux équations

$$\frac{mada + mbdb}{aa + bb} = \frac{xdx + ydy}{xx + yy}$$

et

$$\frac{m(adb - bda)}{aa + bb} = \frac{xdy - ydx}{xx + yy}.$$

L'intégrale de la première est

$$ml\sqrt{(aa + bb)} = l\sqrt{(xx + yy)} + lC.$$

Soit donc $\sqrt{(aa + bb)} = c$, et il sera

$$c^m = C\sqrt{(xx + yy)}.$$

Pour déterminer cette constante C, on n'a qu'à remarquer, que si $b = 0$ et $a = 1$, il faut qu'il y ait $y = 0$ et $x = 1$, d'où nous voyons, qu'il doit être $C = 1$. Donc posant $\sqrt{(aa + bb)} = c$, nous aurons

$$\sqrt{(xx + yy)} = c^m.$$

Ensuite l'intégrale de l'autre équation est

$$m \text{ A tang } \frac{b}{a} = \text{A tang } \frac{y}{x} + C;$$

---

1) Il est surprenant qu' EULER ne cite pas ici le mémoire de D'ALEMBERT *Réflexions sur la cause générale des vents.* Prix de Berlin pour l'année 1746 (Paris 1747), art. 79, p. 141. En effet, c'est D'ALEMBERT qui, le premier, a employé la méthode de regarder ces quantités imaginaires $x + iy$ comme variables pour en prendre les différentiels. Voir P. STÄCKEL, *Integration durch imaginäres Gebiet. Ein Beitrag zur Geschichte der Funktionentheorie.* Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 112. F. R.

où l'on voit que la constante C doit être $=0$, puisque, si $b=0$, il faut qu'il soit aussi $y=0$. Par conséquent nous aurons

$$m \operatorname{A tang} \frac{b}{a} = \operatorname{A tang} \frac{y}{x}.$$

Soit φ l'angle dont la tangente $=\frac{b}{a}$, ou bien soit $\sin\varphi = \frac{b}{c}$ et $\cos\varphi = \frac{a}{c}$, et ayant $m\varphi = \operatorname{A tang} \frac{y}{x}$, il sera

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} m\varphi,$$

ou

$$\frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}} = \sin m\varphi \quad \text{et} \quad \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}} = \cos m\varphi.$$

Donc puisque $\sqrt{(xx+yy)} = c^m$, nous aurons pour la solution du problème

$$x = c^m \cos m\varphi \quad \text{et} \quad y = c^m \sin m\varphi,$$

prenant $c = \sqrt{(aa+bb)}$, et l'angle φ étant tel qu'il soit $\sin\varphi = \frac{b}{c}$ et $\cos\varphi = \frac{a}{c}$; d'où l'on voit que l'angle φ a une infinité de valeurs, comme j'ai déjà remarqué, qui sont φ, $\pm 2\pi+\varphi$, $\pm 4\pi+\varphi$, $\pm 6\pi+\varphi$ etc.

PROBLEME 2

87. *Une quantité réelle positive étant élevée à une puissance dont l'exposant est une quantité imaginaire, trouver la valeur imaginaire de cette puissance.*

SOLUTION

Soit a la quantité réelle positive et $m+n\sqrt{-1}$ l'exposant de la puissance, de sorte qu'il faut chercher la valeur imaginaire de

$$a^{m+n\sqrt{-1}}.$$

Soit donc

$$a^{m+n\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1},$$

et il sera

$$(m+n\sqrt{-1})\,la = l(x+y\sqrt{-1}),$$

dont prenant les différentiels en posant a, x et y variables, nous aurons

$$\frac{mda}{a}+\frac{nda\sqrt{-1}}{a}=\frac{dx+dy\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}}=\frac{xdx+ydy}{xx+yy}+\frac{xdy-ydx}{xx+yy}\sqrt{-1}.$$

Egalant donc séparément ensemble les membres réels et imaginaires, nous aurons ces deux équations

$$\frac{mda}{a}=\frac{xdx+ydy}{xx+yy} \quad \text{et} \quad \frac{nda}{a}=\frac{xdy-ydx}{xx+yy},$$

dont les intégrales prises, comme il faut, seront

$$\sqrt{(xx+yy)}=a^m \quad \text{et} \quad \text{A tang}\,\frac{y}{x}=nla \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x}=\text{tang}\,nla,$$

où la marque le logarithme hyperbolique de la quantité réelle positive a, lequel aura par conséquent aussi une valeur réelle. Prenant donc dans un cercle dont le rayon $=1$, un arc $=nla$, à cause de $\sqrt{(xx+yy)}=a^m$, nous obtiendrons

$$x=a^m\cos nla \quad \text{et} \quad y=a^m\sin nla,$$

et ces valeurs étant posées pour x et y, on aura

$$a^{m+n\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1}.$$

C. Q. F. T.

COROLLAIRE 1

88. La quantité imaginaire $a^{m+n\sqrt{-1}}$ sera donc aussi comprise dans la forme générale $M+N\sqrt{-1}$, puisque nous venons de trouver

$$a^{m+n\sqrt{-1}}=a^m\cos nla+a^m\sqrt{-1}\cdot\sin nla,$$

lorsque a est une quantité réelle positive; car si a étoit une quantité négative quoique réelle, son logarithme seroit imaginaire, et partant aussi $\cos nla$ et $\sin nla$ imaginaires.

COROLLAIRE 2

89. Puisque $a^{m+n\sqrt{-1}}=a^m\cdot a^{n\sqrt{-1}}$, il sera

$$a^{n\sqrt{-1}}=\cos nla+\sqrt{-1}\cdot\sin nla,$$

et prenant n négatif, il sera aussi

$$a^{-n\sqrt{-1}}=\cos nla-\sqrt{-1}\cdot\sin nla.$$

COROLLAIRE 3[1]

90. De là il s'ensuit que les formules suivantes sont réelles

$$\frac{a^{n\sqrt{-1}}+a^{-n\sqrt{-1}}}{2}=\cos nla$$

et

$$\frac{a^{n\sqrt{-1}}-a^{-n\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\sin nla.$$

Or si $a=1$, il sera tant $1^{n\sqrt{-1}}=1$, que $1^{-n\sqrt{-1}}=1$, à cause de $l1=0$.

COROLLAIRE 4

91. Donc si l'on met $n=1$ et $a=2$, il sera

$$\frac{2^{\sqrt{-1}}+2^{-\sqrt{-1}}}{2}=\cos l2$$

et

$$\frac{2^{\sqrt{-1}}-2^{-\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\sin l2.$$

Or puisqu'il y a

$$l2=0{,}69314\,71805\,599,$$

on en tirera

$$\cos l2=0{,}76923\,89013\,540\,^{2)}=\frac{2^{\sqrt{-1}}+2^{-\sqrt{-1}}}{2}.$$

Mais l'arc même dont le cosinus $=l2$, se trouve $39^0\,42^{I}\,51^{II}\,52^{III}\,9^{IV}$.[3]

---

1) Voir pour les formules des corollaires 3 et 4 les lettres d'EULER à CHR. GOLDBACH du 9 déc. 1741, 6 mars 1742, 8 mai 1742, 30 juin 1742, *Correspondance math. et phys. publiée par P. H. Fuss*, St.-Pétersbourg 1843, t. I, p. 110, 114, 123, 130; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series III. F. R.

2) Valeur plus exacte:

$$\cos l2=0{,}76923\,89013\,63972\,126\ldots$$

On trouve de même:

$$\sin l2=0{,}63896\,12763\,13634\,801\ldots,$$

valeur qui permet de contrôler le calcul. F. R.

3) Valeur plus exacte: $39^0\,42^{I}\,51^{II}\,52^{III}\,8^{IV}\,2^{V}\,9^{VI}\,58^{VII}\ldots$ F. R.

SCHOLIE

92. Le cas où a est un nombre négatif, qui n'est pas compris dans cette solution, quoique a soit une quantité réelle, se résoudra par le problème suivant, où je prendrai pour la quantité qui doit être élevée à un exposant imaginaire, une quantité imaginaire quelconque de la forme $a + b\sqrt{-1}$, qui comprend sous elle, en posant $b = 0$, toutes les quantités réelles, tant négatives que positives.

PROBLEME 3

93. *Une quantité imaginaire étant élevée à une puissance dont l'exposant est aussi imaginaire, trouver la valeur imaginaire de cette puissance.*

SOLUTION

Soit $a + b\sqrt{-1}$ la quantité imaginaire et $m + n\sqrt{-1}$ l'exposant de la puissance, de sorte qu'il faille trouver la valeur de cette formule

$$(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}.$$

Posons donc pour cet effet

$$(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1},$$

et, prenant les logarithmes, on aura

$$(m + n\sqrt{-1})\, l(a + b\sqrt{-1}) = l(x + y\sqrt{-1}).$$

Passons aux différentiels, et puisque, comme nous avons déjà vu,

$$d.\, l(x + y\sqrt{-1}) = \frac{xdx + ydy}{xx + yy} + \frac{xdy - ydx}{xx + yy}\sqrt{-1},$$

nous aurons

$$\frac{m(ada + bdb)}{aa + bb} + \frac{n(ada + bdb)\sqrt{-1}}{aa + bb} + \frac{m(adb - bda)\sqrt{-1}}{aa + bb} - \frac{n(adb - bda)}{aa + bb}$$
$$= \frac{xdx + ydy}{xx + yy} + \frac{(xdy - ydx)\sqrt{-1}}{xx + yy}.$$

Egalant maintenant séparément les membres réels et imaginaires, nous aurons ces deux égalités

$$\frac{m(ada+bdb)}{aa+bb}-\frac{n(adb-bda)}{aa+bb}=\frac{xdx+ydy}{xx+yy},$$

$$\frac{m(adb-bda)}{aa+bb}+\frac{n(ada+bdb)}{aa+bb}=\frac{xdy-ydx}{xx+yy}.$$

Pour en prendre les intégrales soit

$$\sqrt{(aa+bb)}=c \quad \text{et} \quad \text{A tang}\,\frac{b}{a}=\varphi \quad \text{ou bien} \quad \sin\varphi=\frac{b}{c} \quad \text{et} \quad \cos\varphi=\frac{a}{c},$$

d'où l'on peut toujours trouver l'angle φ; or je suppose ici, que c est une quantité positive $=\sqrt{(aa+bb)}$. Cela remarqué, nos intégrales seront

$$mlc-n\varphi=l\sqrt{(xx+yy)},$$

$$m\varphi+nlc=\text{A tang}\,\frac{y}{x}.$$

De là il s'ensuit, qu'il sera

$$\sqrt{(xx+yy)}=c^m e^{-n\varphi},$$

mettant e pour le nombre dont le logarithme hyperbolique est $=1$. Ainsi pour trouver les valeurs x et y de cette équation

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1},$$

ayant posé $c=\sqrt{(aa+bb)}$ et pris l'angle φ tel qu'il soit $\cos\varphi=\frac{a}{c}$ et $\sin\varphi=\frac{b}{c}$, on aura

$$x=c^m e^{-n\varphi}\cos(m\varphi+nlc),$$

$$y=c^m e^{-n\varphi}\sin(m\varphi+nlc).$$

C. Q. F. T.

COROLLAIRE 1

94. Si $b=0$ et a une quantité positive, on aura $c=a$ et l'angle $\varphi=0$ ou $\pm 2\pi$ ou $\pm 4\pi$ ou en général $\varphi=2\lambda\pi$, prenant λ pour un nombre entier quelconque; donc il sera

$$a^{m+n\sqrt{-1}}=a^m e^{-2\lambda n\pi}\left(\cos(2\lambda m\pi+nla)+\sqrt{-1}\cdot\sin(2\lambda m\pi+nla)\right),$$

qui convient avec la forme précédente, si $\lambda=0$; de sorte que cette transformation est plus générale.

COROLLAIRE 2

95. Si $b=0$ et a une quantité négative $-a$, il sera encore $c=+a$ et, à cause de $\cos\varphi=\frac{-a}{c}=-1$, l'angle φ sera $\pm\pi$ ou $\pm 3\pi$ ou $\pm 5\pi$ etc. ou en général $\varphi=(2\lambda-1)\pi$, prenant pour λ un nombre quelconque entier, ou positif ou négatif. Il sera donc

$$(-a)^{m+n\sqrt{-1}}=a^m e^{-(2\lambda-1)n\pi}\left(\cos((2\lambda-1)m\pi+nla)+\sqrt{-1}\cdot\sin((2\lambda-1)m\pi+nla)\right).$$

COROLLAIRE 3

96. En général donc, quelques quantités que soient a et b, donnant à c la valeur positive de $\sqrt{(aa+bb)}$, et prenant pour φ un tel angle que $\sin\varphi=\frac{b}{c}$ et $\cos\varphi=\frac{a}{c}$, puisque pour φ on peut également prendre en général l'angle $2\lambda\pi+\varphi$, où λ marque un nombre entier quelconque affirmatif ou négatif, on aura

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$$
$$=c^m e^{-2\lambda n\pi-n\varphi}\left(\cos(2\lambda m\pi+m\varphi+nlc)+\sqrt{-1}\cdot\sin(2\lambda m\pi+m\varphi+nlc)\right),$$

d'où l'on trouvera toutes les valeurs possibles, que cette formule

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$$

renferme, en donnant à λ successivement toutes les valeurs 0, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4 etc., où il suffit de prendre pour c^m la seule valeur réelle et positive, qui y est renfermée.

COROLLAIRE 4

97. Si $a=0$, $m=0$ et $b=1$, il sera $c=1$ et $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, d'où l'on tirera cette transformation

$$(\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}}=e^{-2\lambda n\pi-\frac{1}{2}n\pi}$$

ou bien

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}=e^{-2\lambda\pi-\frac{1}{2}\pi},$$

qui est d'autant plus remarquable, qu'elle est réelle, et qu'elle renferme

même une infinité de valeurs réelles différentes. Car posant $\lambda = 0$, on aura en nombres

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = 0{,}20787\,95763\,507.$$ [1])

COROLLAIRE 5

98. Si l'on pose $a = \cos\varphi$ et $b = \sin\varphi$, prenant $c = 1$, de sorte que $lc = 0$, on aura cette transformation remarquable

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)^{m+n\sqrt{-1}}$$
$$= e^{-2\lambda n\pi - n\varphi}\big(\cos m(2\lambda\pi + \varphi) + \sqrt{-1}\cdot\sin m(2\lambda\pi + \varphi)\big);$$

et si $m = 0$, cette formule sera réelle

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)^{n\sqrt{-1}} = e^{-2\lambda n\pi - n\varphi}.$$

SCHOLIE

99. Nous voyons donc par là, que toutes les quantités imaginaires qui tirent leur origine non seulement des opérations algébriques, mais aussi celles qui naissent de l'élévation à des exposans quelconques, et même imaginaires, sont toujours réductibles à la forme générale

$$M + N\sqrt{-1}.$$

Et on comprend de là aussi, que si les exposans étoient eux-mêmes de telles puissances à exposans imaginaires, la valeur de toute la formule seroit néantmoins comprise dans la forme $M + N\sqrt{-1}$. Car il est clair, si α, β, γ marquent des quantités imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$, la quantité dérivée $\alpha^{\beta^{\gamma}}$ y seroit aussi toujours comprise, puisque l'exposant β^{γ} est réductible à cette forme.

---

1) Valeur plus exacte:

$$0{,}20787\,95763\,508.$$

En effet, on trouve:

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}20787\,95763\,50761\,90854\,69555\ldots$$

De même (pour contrôler):

$$(\sqrt{-1})^{-\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{2}} = 4{,}81047\,73809\,65351\,65547\,30345\ldots$$

F. R.

PROBLEME 4

100. *Un nombre imaginaire quelconque étant proposé, trouver son logarithme hyperbolique.*

SOLUTION

Soit $a + b\sqrt{-1}$ la quantité imaginaire dont il faut chercher le logarithme, qui soit $= x + y\sqrt{-1}$, de sorte qu'il y ait

$$l(a + b\sqrt{-1}) = x + y\sqrt{-1}.$$

Prenant les différentiels, on aura

$$\frac{ada + bdb}{aa + bb} + \frac{(adb - bda)\sqrt{-1}}{aa + bb} = dx + dy\sqrt{-1}.$$

Soit encore $\sqrt{(aa + bb)} = c$, et l'angle φ tel qu'il soit $\cos\varphi = \frac{a}{c}$ et $\sin\varphi = \frac{b}{c}$; et par l'intégration on trouvera

$$x = l\sqrt{(aa + bb)} = lc \quad \text{et} \quad y = \text{A tang}\,\frac{b}{a} = \varphi.$$

Donc nous aurons

$$l(a + b\sqrt{-1}) = l\sqrt{(aa + bb)} + \sqrt{-1}\cdot \text{A cos}\,\frac{a}{\sqrt{(aa + bb)}}$$

ou

$$l(a + b\sqrt{-1}) = l\sqrt{(aa + bb)} + \sqrt{-1}\cdot \text{A sin}\,\frac{b}{\sqrt{(aa + bb)}}.$$

C. Q. F. T.

COROLLAIRE 1

101. Puisqu'il y a une infinité d'angles auxquels répond le même sinus $\frac{b}{\sqrt{(aa + bb)}}$ et cosinus $\frac{a}{\sqrt{(aa + bb)}}$, chaque nombre, tant réel qu'imaginaire, a une infinité des logarithmes, dont tous sont imaginaires à l'exception d'un seul, lorsque $b = 0$ et a un nombre positif.

COROLLAIRE 2

102. Si nous posons $\sqrt{(aa + bb)} = c$, et l'angle trouvé $= \varphi$, à cause de $a = c\cos\varphi$ et $b = c\sin\varphi$, il sera

$$lc(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi) = lc + \varphi\sqrt{-1};$$

où au lieu de φ il est permis de mettre $\pm 2\pi + \varphi$, $\pm 4\pi + \varphi$, $\pm 6\pi + \varphi$ etc., le charactère π marquant la somme de deux angles droits. On aura donc

$$l(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi) = \varphi\sqrt{-1}.$$

PROBLEME 5

103. *Un logarithme imaginaire étant donné, trouver le nombre qui lui convient.*

SOLUTION

Soit $a + b\sqrt{-1}$ le logarithme imaginaire proposé, et $x + y\sqrt{-1}$ le nombre qui lui convient, de sorte que

$$l(x + y\sqrt{-1}) = a + b\sqrt{-1}.$$

Comparant cette équation avec celle, que nous venons de déduire dans l'article précédent

$$lc(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi) = lc + \varphi\sqrt{-1},$$

nous aurons $\varphi = b$ et $lc = a$, donc $c = e^a$, supposant $le = 1$. D'où nous tirerons

$$x = e^a\cos b \quad \text{et} \quad y = e^a\sin b.$$

Par conséquent le nombre qui répond au logarithme $a + b\sqrt{-1}$, sera

$$= e^a(\cos b + \sqrt{-1}\cdot\sin b).$$

C. Q. F. T.

COROLLAIRE 1

104. Toutes les fois donc que b est ou zéro ou égale à $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$ etc. ou bien en général $b = \pm\lambda\pi$, le nombre qui répond au logarithme $a + b\sqrt{-1}$, sera réel et $= \pm e^a$. Il sera positif, si λ est un nombre pair, et négatif, si λ est impair.

COROLLAIRE 2

105. On voit aussi, qu'il n'y a qu'un seul nombre qui convienne à un logarithme proposé; et que toutes les fois que le logarithme est réel, le

nombre sera aussi réel. Mais qu'il y a aussi des cas, où quoique le logarithme soit imaginaire, le nombre est pourtant réel. Mais ayant déjà suffisamment exposé cette matière ailleurs[1]), je passe aux quantités imaginaires, qui renferment des angles, ou leurs sinus, cosinus et tangentes.

PROBLEME 6

106. *Un angle ou arc de cercle imaginaire quelconque étant proposé, trouver son sinus et cosinus et tangente.*

SOLUTION

Soit $a + b\sqrt{-1}$ l'angle proposé, qui étant composé de deux parties, l'une réelle a, et l'autre imaginaire $b\sqrt{-1}$, nous n'avons qu'à chercher le sinus et le cosinus de cet arc imaginaire. Or les séries connues[2]) nous donnent

$$\cos b\sqrt{-1} = 1 + \frac{bb}{1\cdot 2} + \frac{b^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.} = \frac{e^b + e^{-b}}{2},$$

$$\sin b\sqrt{-1} = b\sqrt{-1} + \frac{b^3\sqrt{-1}}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{b^5\sqrt{-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \text{etc.} = \frac{e^b - e^{-b}}{2}\sqrt{-1},$$

et de là nous tirerons

$$\sin(a + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}(e^b + e^{-b})\sin a + \frac{\sqrt{-1}}{2}(e^b - e^{-b})\cos a,$$

$$\cos(a + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}(e^b + e^{-b})\cos a - \frac{\sqrt{-1}}{2}(e^b - e^{-b})\sin a;$$

---

1) Voir le mémoire 168 (suivant l'Index d'ENESTRÖM): *De la controverse entre Mrs. LEIBNIZ et BERNOULLI sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*, Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin [5] (1749), 1751, p. 139; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 17, p. 195.
F. R.

2) L. EULERI *Introductio in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, t. I cap. VIII; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 8. Voir aussi le mémoire 61 (suivant l'Index d'ENESTRÖM): *De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera, in qua eaedem summationes ex fonte maxime diverso derivantur*, Miscellanea Berolin. 7, 1743, p. 172; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 14. F. R.

donc la tangente sera

$$\operatorname{tang}(a+b\sqrt{-1})=\frac{(e^b+e^{-b})\operatorname{tang} a+(e^b-e^{-b})\sqrt{-1}}{(e^b+e^{-b})-(e^b-e^{-b})\operatorname{tang} a\cdot\sqrt{-1}}$$

ou bien

$$\operatorname{tang}(a+b\sqrt{-1})=\frac{(e^{2b}+1)\operatorname{tang} a+(e^{2b}-1)\sqrt{-1}}{e^{2b}+1-(e^{2b}-1)\operatorname{tang} a\cdot\sqrt{-1}}.$$

C. Q. F. T.

COROLLAIRE 1

107. Puisque dans l'expression de la tangente, tant le numérateur que le dénominateur sont imaginaires, si l'on en délivre le dénominateur, on aura

$$\operatorname{tang}(a+b\sqrt{-1})=\frac{2e^{2b}\sin 2a+(e^{4b}-1)\sqrt{-1}}{e^{4b}+2e^{2b}\cos 2a+1}.$$

COROLLAIRE 2

108. Le sinus de l'angle $a+b\sqrt{-1}$ devient réel non seulement dans le cas $b=0$, où l'angle même est réel, mais aussi dans les cas, où $\cos a=0$, ce qui arrive, lorsque, posant ϱ pour la marque d'un angle droit, il est $a=(2\lambda-1)\varrho$, où λ signifie un nombre entier [positif] ou négatif. Car alors il sera

$$\sin((2\lambda-1)\varrho+b\sqrt{-1})=\pm\tfrac{1}{2}(e^b+e^{-b}),$$

où le signe $+$ a lieu, si λ est un nombre impair, et le signe $-$, si λ est un nombre pair.

COROLLAIRE 3

109. De même le cosinus de l'angle $a+b\sqrt{-1}$ sera réel non seulement lorsque $b=0$, mais aussi lorsque $\sin a=0$, ce qui arrive, si $a=2\lambda\varrho$, et alors on aura

$$\cos(2\lambda\varrho+b\sqrt{-1})=\pm\tfrac{1}{2}(e^b+e^{-b}),$$

où le signe supérieur $+$ a lieu, si λ est un nombre pair, et l'inférieur $-$, si λ est un nombre impair.

COROLLAIRE 4

110. Pour la tangente de l'angle $a+b\sqrt{-1}$, elle ne sauroit jamais devenir réelle, à moins qu'il ne fût $b=0$, ou l'angle même réel.

COROLLAIRE 5

111. Les formules trouvées fournissent encore, en donnant à $\sqrt{-1}$ ses deux signes $+$ et $-$, qui lui conviennent également, les formules suivantes, qu'il sera à propos de remarquer:

$$\sin(a + b\sqrt{-1}) + \sin(a - b\sqrt{-1}) = (e^b + e^{-b}) \sin a,$$

$$\sin(a + b\sqrt{-1}) - \sin(a - b\sqrt{-1}) = (e^b - e^{-b})\sqrt{-1} \cdot \cos a,$$

$$\cos(a + b\sqrt{-1}) + \cos(a - b\sqrt{-1}) = (e^b + e^{-b}) \cos a,$$

$$\cos(a + b\sqrt{-1}) - \cos(a - b\sqrt{-1}) = -(e^b - e^{-b})\sqrt{-1} \cdot \sin a.$$

PROBLEME 7

112. *Le sinus d'un angle étant réel, mais plus grand que le sinus total, de sorte que l'angle soit imaginaire, trouver la valeur de cet angle.*

SOLUTION

Il y a ici deux cas, selon que ce sinus donné est positif ou négatif.

I. Soit donc premièrement le sinus positif $= p$ et $p > 1$, prenant toujours l'unité pour le sinus total, et soit l'angle imaginaire qui répond à ce sinus, $= a + b\sqrt{-1}$, et pour que le sinus soit réel, il faut qu'il soit $a = (2\lambda - 1)\varrho$, prenant ϱ pour la marque d'un angle droit, et puisque selon le § 108

$$\sin((2\lambda - 1)\varrho + b\sqrt{-1}) = \pm\tfrac{1}{2}(e^b + e^{-b}) = p,$$

il faut qu'il soit λ un nombre impair. Soit donc $\lambda = 2\mu + 1$, et nous aurons

$$\sin((4\mu + 1)\varrho + b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}(e^b + e^{-b}) = p;$$

cette équation étant toujours possible, on en tirera

$$e^b = p \pm \sqrt{(pp - 1)} \quad \text{et} \quad b = l(p \pm \sqrt{(pp - 1)}).$$

Donc l'angle cherché, qui répond au sinus p, sera

$$(4\mu + 1)\varrho + \sqrt{-1} \cdot l(p \pm \sqrt{(pp - 1)}).$$

II. Soit le sinus proposé négatif $=-p$ et $p>1$, et il faut que λ soit un nombre pair. Soit donc $\lambda=2\mu$, et il sera

$$\sin((4\mu-1)\varrho+b\sqrt{-1})=-\tfrac{1}{2}(e^b+e^{-b})=-p.$$

D'où l'on tire comme dans le cas précédent

$$e^b=p\pm\sqrt{(pp-1)} \quad \text{et} \quad b=l(p\pm\sqrt{(pp-1)}).$$

Donc l'angle qui répond au sinus négatif $-p$, sera

$$(4\mu-1)\varrho+\sqrt{-1}\cdot l(p\pm\sqrt{(pp-1)}).$$

C. Q. F. T.

PROBLEME 8

113. *Le cosinus d'un angle étant réel, mais plus grand que le sinus total* $=1$, *trouver l'angle imaginaire qui répond à ce cosinus.*

SOLUTION

Soit $p>1$, et que le cosinus proposé soit $=+p$. L'angle répondant soit $=a+b\sqrt{-1}$, et par § 109 il est clair qu'il doit être $a=2\lambda\varrho$, pour qu'il soit

$$\cos(2\lambda\varrho+b\sqrt{-1})=\pm\tfrac{1}{2}(e^b+e^{-b})=p;$$

donc il faut qu'il soit λ un nombre pair. Soit donc $\lambda=2\mu$, et nous aurons

$$\cos(4\mu\varrho+b\sqrt{-1})=\tfrac{1}{2}(e^b+e^{-b})=p,$$

d'où l'on tire

$$e^b=p\pm\sqrt{(pp-1)} \quad \text{et} \quad b=l(p\pm\sqrt{(pp-1)}),$$

et partant au cosinus positif p répond l'angle

$$4\mu\varrho+\sqrt{-1}\cdot l(p\pm\sqrt{(pp-1)}).$$

Si le cosinus donné est négatif $=-p$, de sorte que $p>1$, il faut prendre pour λ un nombre impair; soit donc $\lambda=2\mu+1$, et l'angle ou l'arc qui répond au cosinus négatif $-p$, sera

$$(4\mu+2)\varrho+\sqrt{-1}\cdot l(p\pm\sqrt{(pp-1)}).$$

C. Q. F. T.

COROLLAIRE

114. Il est indifférent de prendre $p+\sqrt{(pp-1)}$ ou $p-\sqrt{(pp-1)}$, l'un et l'autre étant une quantité positive. On n'a qu'à remarquer que

$$l(p+\sqrt{(pp-1)})=-l(p-\sqrt{(pp-1)}),$$

de sorte que cette ambiguïté rejaillit sur celle qui est essentielle à $\sqrt{-1}$.

PROBLEME 9

114[a][1]). *Le sinus d'un angle étant imaginaire, trouver la valeur de l'angle ou l'arc imaginaire qui lui répond.*

SOLUTION

Soit $p+q\sqrt{-1}$ le sinus imaginaire proposé, et que l'angle cherché soit $=a+b\sqrt{-1}$, de sorte qu'il doit être

$$\sin(a+b\sqrt{-1})=p+q\sqrt{-1}.$$

Maintenant comparons cette forme $p+q\sqrt{-1}$ avec celle qui a été trouvée dans le problème 6, et on aura

$$p=\tfrac{1}{2}(e^b+e^{-b})\sin a \quad \text{et} \quad q=\tfrac{1}{2}(e^b-e^{-b})\cos a,$$

et de là on tirera

$$p\cos a+q\sin a=e^b\sin a\cos a$$

ou bien

$$e^b=\frac{p}{\sin a}+\frac{q}{\cos a}$$

et

$$e^{-b}=\frac{p}{\sin a}-\frac{q}{\cos a}.$$

Or puisque $e^b e^{-b}=1$, nous obtiendrons

$$pp\cos a^2-qq\sin a^2=\sin a^2\cos a^2$$

ou bien

$$pp-(pp+qq)\sin a^2=\sin a^2-\sin a^4,$$

1) Dans l'édition originale, le numéro 114 a été répété par erreur. F. R.

d'où nous tirons

$$\sin a^2 = \tfrac{1}{2}(1 + pp + qq) \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}(1 + pp + qq)^2 - pp\right)}$$

et[1])

$$\sin a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + 2p + pp + qq)} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - 2p + pp + qq)}$$

et

$$\cos a^2 = \tfrac{1}{2}(1 - pp - qq) \mp \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}(1 + pp + qq)^2 - pp\right)}.$$

Mais puisque $\cos 2a = 2\cos a^2 - 1$, il sera

$$\cos 2a = -pp - qq + \sqrt{(1 - 2pp + 2qq + (pp + qq)^2)};$$

cette expression étant toujours réelle et moindre que l'unité, l'angle $2a$ et partant aussi a sera réel, et on en trouvera

$$\sin a = \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}} \quad \text{et} \quad \cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}.$$

Or ces quantités étant trouvées avec l'angle a, on aura

$$b = l\left(\frac{p}{\sin a} + \frac{q}{\cos a}\right),$$

et l'angle qui répond au sinus $p + q\sqrt{-1}$, sera

$$a + b\sqrt{-1}.$$

C. Q. F. T.

COROLLAIRE

115. Si le sinus proposé est simplement imaginaire ou $= q\sqrt{-1}$, de sorte que $p = 0$, il est clair qu'il doit être $\sin a = 0$, et partant $a = 2\lambda\varrho$, où ϱ marque l'angle droit et λ un nombre entier quelconque; donc il sera

$$q = \pm \tfrac{1}{2}(e^b - e^{-b}),$$

selon que λ est un nombre pair ou impair. Il sera donc

$$e^b = \pm q \pm \sqrt{(qq + 1)},$$

et partant on pourra toujours rendre cette quantité positive, d'où l'on aura

$$b = l(\sqrt{(qq + 1)} \pm q),$$

1) Voir le mémoire précédent, § 3 et 4. F. R.

où le signe $+$ a lieu, si λ est un nombre pair, et le $-$, si λ est impair. Ainsi l'arc qui répond au sinus $q\sqrt{-1}$, sera ou

$$4\mu\varrho + \sqrt{-1}\cdot l\,(\sqrt{(qq+1)}+q)$$

ou

$$(4\mu+2)\varrho + \sqrt{-1}\cdot l\,(\sqrt{(qq+1)}-q).$$

PROBLEME 10

116. *Le cosinus d'un angle étant imaginaire, trouver la valeur imaginaire de l'arc ou l'angle qui lui répond.*

SOLUTION

Soit $p+q\sqrt{-1}$ le cosinus imaginaire proposé, et $a+b\sqrt{-1}$ l'arc cherché, qui lui répond, de sorte que

$$\cos(a+b\sqrt{-1}) = p+q\sqrt{-1}.$$

Or si nous rapportons cette égalité avec l'article 106, nous aurons

$$p = \tfrac{1}{2}(e^b+e^{-b})\cos a \quad \text{et} \quad q = -\tfrac{1}{2}(e^b-e^{-b})\sin a,$$

d'où nous obtiendrons

$$e^b = \frac{p}{\cos a} - \frac{q}{\sin a}$$

et

$$e^{-b} = \frac{p}{\cos a} + \frac{q}{\sin a}$$

et

$$\cos a^2 = \tfrac{1}{2}(1+pp+qq) \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}(1+pp+qq)^2 - pp\right)},$$

donc

$$\cos 2a = pp+qq-\sqrt{(1-2pp+2qq+(pp+qq)^2)},$$

qui est aussi toujours réelle et moindre que le sinus total; de là on aura

$$\sin a = \sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}} \quad \text{et} \quad \cos a = \sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}},$$

et ayant déterminé l'angle a même, à cause de

$$b = l\left(\frac{p}{\cos a} - \frac{q}{\sin a}\right)$$

l'angle ou l'arc qui répond au cosinus imaginaire $p + q\sqrt{-1}$, sera

$$a + b\sqrt{-1}.$$

C. Q. F. T.

COROLLAIRE

117. Si $p = 0$, de sorte que le cosinus proposé est $= q\sqrt{-1}$, on aura $\cos a = 0$, et partant $a = (2\lambda - 1)\varrho$, d'où l'on tire

$$q = -\tfrac{1}{2}(e^b - e^{-b}) \cdot \pm 1,$$

où le signe supérieur vaut, si λ est un nombre impair, et l'inférieur, si pair. On aura donc

$$e^{2b} = \mp 2e^b q + 1, \quad \text{et} \quad e^b = \mp q + \sqrt{(qq + 1)},$$

et

$$b = l(\sqrt{(qq + 1)} \mp q),$$

et l'arc qui répond au cosinus $q\sqrt{-1}$, sera ou

$$(4\mu + 1)\varrho + \sqrt{-1} \cdot l\,(\sqrt{(1 + qq)} - q)$$

ou

$$(4\mu + 3)\varrho + \sqrt{-1} \cdot l\,(\sqrt{(1 + qq)} + q).$$

SCHOLIE

118. Ayant trouvé la valeur de $\cos 2a$, si l'on en cherche les valeurs

$$\sin a = \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}} \quad \text{et} \quad \cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}},$$

on les peut prendre, ou affirmatives ou négatives. Pour faire le choix, il faut regarder aux quantités p et q, si elles sont positives ou négatives, et donner ensuite aux $\sin a$ et $\cos a$ les signes qui rendent les valeurs de e^b et de e^{-b} positives, tant dans ce problème que dans le précédent; or dans chaque cas ce choix est aisé à faire, de sorte qu'on est toujours le maître de trouver des valeurs réelles pour les lettres a et b.

PROBLEME 11

119. *Une tangente imaginaire étant donnée, trouver la valeur imaginaire de l'angle ou de l'arc qui lui répond.*

SOLUTION

Soit $p + q\sqrt{-1}$ la tangente imaginaire donnée, et $a + b\sqrt{-1}$ l'arc qui convient à cette tangente, de sorte que

$$\operatorname{tang}(a + b\sqrt{-1}) = p + q\sqrt{-1}.$$

Or nous avons trouvé cy-dessus § 107

$$\operatorname{tang}(a + b\sqrt{-1}) = \frac{2e^{2b}\sin 2a + (e^{4b}-1)\sqrt{-1}}{e^{4b} + 2e^{2b}\cos 2a + 1};$$

donc il faut qu'il soit

$$p = \frac{2e^{2b}\sin 2a}{e^{4b} + 2e^{2b}\cos 2a + 1} \quad \text{et} \quad q = \frac{e^{4b}-1}{e^{4b} + 2e^{2b}\cos 2a + 1};$$

de là nous tirons ces deux équations

$$e^{4b}p + 2e^{2b}(p\cos 2a - \sin 2a) + p = 0,$$

$$e^{4b}(q-1) + 2e^{2b}q\cos 2a + q + 1 = 0$$

et par élimination

$$e^{2b} = \frac{-p}{p\cos 2a + (q-1)\sin 2a} = \frac{-p\cos 2a + (q+1)\sin 2a}{p}.$$

Donc nous aurons

$$0 = pp(1 - \cos 2a^2) + 2p\sin 2a\cos 2a + (qq-1)\sin 2a^2$$

ou bien

$$0 = pp\sin 2a + 2p\cos 2a + (qq-1)\sin 2a.$$

Par conséquent on aura

$$\operatorname{tang} 2a = \frac{2p}{1 - pp - qq}$$

et partant

$$\sin 2a = \frac{2p}{\sqrt{(4pp + (1-pp-qq)^2)}} \quad \text{et} \quad \cos 2a = \frac{1-pp-qq}{\sqrt{(4pp + (1-pp-qq)^2)}};$$

donc

$$e^{2b} = \frac{pp + (1+q)^2}{\sqrt{(4pp + (1 - pp - qq)^2)}}$$

et

$$b = \frac{1}{2} l (pp + (1+q)^2) - \frac{1}{4} l (4pp + (1 - pp - qq)^2).$$

Ayant donc trouvé par ces formules tant la valeur de b que celle de l'angle $2a$ ou a, l'angle ou l'arc qui répond à la tangente imaginaire $p + q\sqrt{-1}$, sera

$$a + b\sqrt{-1}.$$

C. Q. F. T.

COROLLAIRE 1

120. Puisque

$$4pp + (1 - pp - qq)^2 = (pp + (q+1)^2)(pp + (q-1)^2),$$

il sera

$$e^{4b} = \frac{pp + (q+1)^2}{pp + (q-1)^2}$$

et partant

$$b = \frac{1}{4} l \frac{pp + (q+1)^2}{pp + (q-1)^2}.$$

Or l'angle a se détermine le plus commodément de la formule de la tangente

$$\operatorname{tang} 2a = \frac{2p}{1 - pp - qq},$$

d'où l'on voit que les valeurs de a et b seront toujours réelles.

COROLLAIRE 2

121. Si $p = 0$, ou qu'on veuille chercher l'angle dont la tangente $= q\sqrt{-1}$, il sera $\operatorname{tang} 2a = 0$, donc

$$2a = 2\lambda\varrho \quad \text{et} \quad a = \lambda\varrho,$$

et

$$b = \frac{1}{4} l \frac{(q+1)^2}{(q-1)^2}.$$

Par conséquent à la tangente $q\sqrt{-1}$ répondent les arcs

$$\lambda\varrho + \frac{\sqrt{-1}}{4}\, l\frac{(q+1)^2}{(q-1)^2},$$

où $\lambda\varrho$ marque un multiple quelconque de l'angle droit.

COROLLAIRE 3

122. Ici les cas, où $q+1=0$ ou $q-1=0$, exigent une réduction particulière, qu'il faut faire, avant que de poser $p=0$. Soit donc $qq-1=0$, ou la tangente proposée $=p\pm\sqrt{-1}$, et on aura

$$\text{tang}\, 2a = \frac{-2}{p},$$

et

$$e^{4b} = \frac{pp+2\pm 2}{pp+2\mp 2};$$

c'est à dire pour le signe supérieur

$$e^{4b} = \frac{pp+4}{pp}$$

et pour l'inférieur

$$e^{4b} = \frac{pp}{pp+4}.$$

Maintenant si $p=0$, il sera

$$2a = (2\lambda+1)\varrho$$

à cause de $\text{tang}\, 2a = \infty$, et

$$b = \pm\infty.$$

Donc à la tangente $\pm\sqrt{-1}$ répond l'angle

$$\left(\lambda+\tfrac{1}{2}\right)\varrho \pm \infty\sqrt{-1}.$$

COROLLAIRE 4

123. Lorsque $pp = 1-qq$ ou $p=\sqrt{(1-qq)}$, il sera

$$\text{tang}\, 2a = \infty \quad \text{et} \quad 2a = (2\lambda+1)\varrho \quad \text{ou} \quad a = \left(\lambda+\tfrac{1}{2}\right)\varrho.$$

Ensuite il sera

$$b = \frac{1}{4} l \frac{1+q}{1-q}.$$

De sorte qu' à la tangente $\sqrt{(1-qq)} + q\sqrt{-1}$ répond l'arc

$$\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\varrho + \frac{\sqrt{-1}}{4} l \frac{1+q}{1-q}.$$

SCHOLIE

124. Puisque donc toutes ces quantités imaginaires, qui sont formées par des opérations transcendantes, sont aussi comprises dans la forme générale $M + N\sqrt{-1}$, nous pourrons soutenir sans balancer, que généralement toutes les quantités imaginaires, quelques compliquées qu'elles puissent être, sont toujours réductibles à la forme

$$M + N\sqrt{-1};$$

ou qu'elles sont toujours composées de deux membres, dont l'un est réel, et l'autre une quantité réelle multipliée par $\sqrt{-1}$.

DEMONSTRATIO NOVA
THEOREMATIS
OMNEM FVNCTIONEM ALGEBRAICAM RATIONALEM INTEGRAM
VNIVS VARIABILIS
IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECVNDI GRADVS
RESOLVI POSSE

QVAM
PRO
OBTINENDIS SVMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBVS
INCLITO PHILOSOPHORVM ORDINI
ACADEMIAE IVLIAE CAROLINAE

EXHIBVIT
CAROLVS FRIDERICVS GAVSS.

HELMSTADII
APVD C. G. FLECKEISEN. 1799.

DEMONSTRATIO NOVA THEOREMATIS OMNEM FUNCTIONEM ALGEBRAICAM RATIONALEM INTEGRAM UNIUS VARIABILIS IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECUNDI GRADUS RESOLVI POSSE[1]

CARL FRIEDRICH GAUSS Werke, dritter Band, p. 1—30
Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1866

1.

Quaelibet aequatio algebraica determinata reduci potest ad formam

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + M = 0,$$

ita ut m sit numerus integer positivus. Si partem primam huius aequationis per X denotamus aequationique $X = 0$ per plures valores inaequales ipsius x satisfieri supponimus, puta ponendo $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$ etc., functio X per productum e factoribus $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$ etc. divisibilis erit. Vice versa, si productum e pluribus factoribus simplicibus $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$ etc. functionem X metitur: aequationi $X = 0$ satisfiet, aequando ipsam x cuicunque quantitatum α, β, γ etc. Denique si X producto ex m factoribus talibus simplicibus aequalis est (sive omnes diversi sint, sive quidam ex ipsis identici): alii factores simplices praeter hos functionem X metiri non poterunt. Quamobrem aequatio m^{ti} gradus plures quam m radices habere nequit; simul vero patet, aequationem m^{ti} gradus *pauciores* radices habere posse, etsi X in

1) Vide commentationem praecedentem. F. R.

m factores simplices resolubilis sit: si enim inter hos factores aliqui sunt identici, multitudo modorum diversorum aequationi satisfaciendi necessario minor erit quam m. Attamen concinnitatis caussa geometrae dicere maluerunt, aequationem in hoc quoque casu m radices habere, et tantummodo quasdam ex ipsis aequales inter se evadere: quod utique sibi permittere potuerunt.

2.

Quae hucusque sunt enarrata, in libris algebraicis sufficienter demonstrantur neque rigorem geometricum uspiam offendunt. Sed nimis praepropere et sine praevia demonstratione solida adoptavisse videntur analystae theorema, cui tota fere doctrina aequationum superstructa est: *Quamvis functionem talem ut X semper in m factores simplices resolvi posse*, sive hoc quod cum illo prorsus conspirat, *quamvis aequationem m^{ti} gradus revera habere m radices.* Quum iam in aequationibus secundi gradus saepissime ad tales casus perveniatur, qui theoremati huic repugnant: algebraistae, ut hos illi subiicerent, coacti fuerunt, fingere quantitatem quandam imaginariam, cuius quadratum sit -1, et tum agnoverunt, si quantitates formae $a+b\sqrt{-1}$ perinde concedantur ut reales, theorema non modo pro aequationibus secundi gradus verum esse, sed etiam pro cubicis et biquadraticis. Hinc vero neutiquam inferre licuit, admissis quantitatibus formae $a+b\sqrt{-1}$ cuivis aequationi quinti superiorisve gradus satisfieri posse, aut uti plerumque exprimitur (quamquam phrasin lubricam minus probarem) radices cuiusvis aequationis ad formam $a+b\sqrt{-1}$ reduci posse. Hoc theorema ab eo, quod in titulo huius scripti enunciatum est, nihil differt, si ad rem ipsam spectas, huiusque demonstrationem novam rigorosam tradere, constituit propositum praesentis dissertationis.

Ceterum ex eo tempore, quo analystae comperti sunt, infinite multas aequationes esse, quae nullam omnino radicem haberent, nisi quantitates formae $a+b\sqrt{-1}$ admittantur, tales quantitates fictitiae tamquam peculiare quantitatum genus, quas *imaginarias* dixerunt, ut a *realibus* distinguerentur, consideratae et in totam analysin introductae sunt; quonam iure? hoc loco non disputo. — Demonstrationem meam absque omni quantitatum imaginariarum subsidio absolvam, etsi eadem libertate, qua omnes recentiores analystae usi sunt, etiam mihi uti liceret.

3.

Quamvis ea, quae in plerisque libris elementaribus tamquam demonstratio theorematis nostri afferuntur, tam levia sint, tantumque a rigore geometrico abhorreant, ut vix mentione sint digna: tamen, ne quid deesse videatur, paucis illa attingam. „Ut demonstrent, quamvis aequationem

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + M = 0$$

sive $X = 0$, revera habere m radices, suscipiunt probare, X in m factores simplices resolvi posse. Ad hunc finem assumunt m factores simplices $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$ etc. ubi α, β, γ etc. adhuc sunt incognitae, productumque ex illis aequale ponunt functioni X. Tum ex comparatione coëfficientium deducunt m aequationes, ex quibus incognitas α, β, γ etc. determinari posse aiunt, quippe quarum multitudo etiam sit m. Scilicet $m-1$ incognitas eliminari posse, unde emergere aequationem, quae, quam placuerit, incognitam solam contineat.“ Ut de reliquis, quae in tali argumentatione reprehendi possent, taceam, quaeram tantummodo, unde certi esse possimus, ultimam aequationem revera ullam radicem habere? Quidni fieri posset, ut neque huic ultimae aequationi neque propositae, ulla magnitudo in toto quantitatum realium atque imaginariarum ambitu satisfaciat? — Ceterum periti facile perspicient, hanc ultimam aequationem necessario cum proposita *omnino identicam* fore, siquidem calculus rite fuerit institutus; scilicet eliminatis incognitis β, γ etc. aequationem

$$\alpha^m + A\alpha^{m-1} + B\alpha^{m-2} + \text{etc.} + M = 0$$

prodire debere. Plura de isto ratiocinio exponere necesse non est.

Quidam auctores, qui debilitatem huius methodi percepisse videntur, tamquam *axioma* assumunt, quamvis aequationem revera habere radices, si non possibiles, impossibiles. Quid sub quantitatibus possibilibus et impossibilibus intelligi velint, haud satis distincte exposuisse videntur. Si quantitates possibiles idem denotare debent ut reales, impossibiles idem ut imaginariae: axioma illud neutiquam admitti potest, sed necessario demonstratione opus habet. Attamen in illo sensu expressiones accipiendae non videntur, sed axiomatis mens haec potius videtur esse: „Quamquam nondum sumus certi, necessario dari m quantitates reales vel imaginarias, quae alicui aequationi datae m^{ti} gradus satisfaciant, tamen aliquantisper hoc supponemus; nam si forte contingeret, ut tot quantitates reales et imaginariae inveniri nequeant,

certe effugium patebit, ut dicamus reliquas esse impossibiles." Si quis hac phrasi uti mavult quam simpliciter dicere, aequationem in hoc casu tot radices non habituram, a me nihil obstat: at si tum his radicibus impossibilibus ita utitur tamquam aliquid veri sint, et e. g. dicit, summam omnium radicum aequationis $x^m + Ax^{m-1} +$ etc. $= 0$ esse $= -A$, etiamsi impossibiles inter illas sint (quae expressio proprie significat, *etiamsi aliquae deficiant*): hoc neutiquam probare possum. Nam radices impossibiles, in tali sensu acceptae, tamen sunt radices, et tum axioma illud nullo modo sine demonstratione admitti potest, neque inepte dubitares, annon aequationes exstare possint, quae ne impossibiles quidem radices habeant?*)

4.

Antequam aliorum geometrarum demonstrationes theorematis nostri recenseam, et quae in singulis reprehendenda mihi videantur, exponam: observo

*) Sub quantitate imaginaria hic semper intelligo quantitatem in forma $a + b\sqrt{-1}$ contentam, quamdiu b non est $= 0$. In hoc sensu expressio illa semper ab omnibus geometris primae notae accepta est, neque audiendos censeo, qui quantitatem $a + b\sqrt{-1}$ in eo solo casu imaginariam vocare voluerunt ubi $a = 0$, impossibilem vero quando non sit $a = 0$, quum haec distinctio neque necessaria sit neque ullius utilitatis. — Si quantitates imaginariae omnino in analysi retineri debent (quod pluribus rationibus consultius videtur, quam ipsas abolere, modo satis solide stabiliantur): necessario tamquam aeque possibiles ac reales spectandae sunt; quamobrem reales et imaginarias sub denominatione communi *quantitatum possibilium* complecti mallem: contra, *impossibilem* dicerem quantitatem, quae conditionibus satisfacere debeat, quibus ne imaginariis quidem concessis satisfieri potest, attamen ita, ut *phrasis* haec idem significet ac si dicas, talem quantitatem in toto magnitudinum ambitu non dari. Hinc vero genus peculiare quantitatum formare, neutiquam concederem. Quodsi quis dicat, triangulum rectilineum aequilaterum rectangulum impossibile esse, nemo erit qui neget. At si tale triangulum impossibile tamquam novum triangulorum genus contemplari, aliasque triangulorum proprietates ad illud applicare voluerit, ecquis risum teneat? Hoc esset verbis ludere seu potius abuti. — Quamvis vero etiam summi mathematici saepius veritates, quae quantitatum ad quas spectant possibilitatem manifesto supponunt, ad tales quoque applicaverint, quarum possibilitas adhuc dubia erat; neque abnuerim, huiusmodi licentias plerumque ad solam formam et quasi velamen ratiociniorum pertinere, quod veri geometrae acies mox penetrare possit: tamen consultius, scientiaeque, quae tamquam perfectissimum claritatis et certitudinis exemplar merito celebratur, sublimitate magis dignum videtur, tales libertates aut omnino proscribere, aut saltem parcius neque alias ipsis uti, nisi ubi etiam minus exercitati perspicere valeant, rem etiam absque illarum subsidio etsi forsan minus breviter tamen aeque rigorose absolvi potuisse. — Ceterum haud negaverim, ea quae hic contra impossibilium abusum dixi, quodam respectu etiam contra imaginarias obiici posse: sed harum vindicationem nec non totius huius rei expositionem uberiorem ad aliam occasionem mihi reservo.

sufficere, si tantummodo ostendatur, omni aequationi quantivis gradus

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + M = 0$$

sive $X = 0$ (ubi coëfficientes A, B etc. reales esse supponuntur) ad minimum uno modo satisfieri posse per valorem ipsius x sub forma $a + b\sqrt{-1}$ contentum. Constat enim, X tunc divisibilem fore per factorem realem secundi gradus $xx - 2ax + aa + bb$, si b non fuerit $= 0$, et per factorem realem simplicem $x - a$, si $b = 0$. In utroque casu quotiens erit realis, et inferioris gradus quam X; et quum hic eadem ratione factorem realem primi secundive gradus habere debeat, patet, per continuationem huius operationis functionem X tandem in factores reales simplices vel duplices resolutum iri, aut, si pro singulis factoribus realibus duplicibus binos imaginarios simplices adhibere mavis, in m factores simplices.

5.

Prima theorematis demonstratio illustri geometrae D'ALEMBERT debetur, *Recherches sur le calcul intégral,* Histoire de l'Acad. de Berlin, Année 1746, p. 182 sqq. Eadem extat in BOUGAINVILLE[1]), *Traité du calcul intégral,* à Paris 1754, p. 47 sqq. Methodi huius praecipua momenta haec sunt.

Primo ostendit, si functio quaecunque X quantitatis variabilis x fiat $= 0$ aut pro $x = 0$ aut pro $x = \infty$, atque valorem infinite parvum realem positivum nancisci possit tribuendo ipsi x valorem realem: hanc functionem etiam valorem infinite parvum realem negativum obtinere posse per valorem ipsius x vel realem vel sub forma imaginaria $p + q\sqrt{-1}$ contentum. Scilicet designante Ω valorem infinite parvum ipsius X, et ω valorem respondentem ipsius x, asserit ω per seriem valde convergentem $a\Omega^\alpha + b\Omega^\beta + c\Omega^\gamma$ etc. exprimi posse, ubi exponentes α, β, γ etc. sint quantitates rationales continuo crescentes, et quae adeo ad minimum in distantia certa ab initio positivae evadant, terminosque, in quibus adsint, infinite parvos reddant. Iam si inter omnes hos exponentes nullus occurrat, qui sit fractio denominatoris paris, omnes terminos seriei reales fieri tum pro positivo tum pro negativo valore ipsius Ω; si vero quaedam fractiones denominatoris paris inter illos exponentes reperiantur, constare, pro valore negativo ipsius Ω terminos respondentes in forma $p + q\sqrt{-1}$ contentos esse. Sed propter infinitam seriei convergentiam in casu priori sufficere, si terminus primus (i. e. maximus)

1) L. A. DE BOUGAINVILLE (1729—1811). F. R.

solus retineatur, in posteriori ultra eum terminum, qui partem imaginariam primus producat, progredi opus non esse.

Per similia ratiocinia ostendi posse, si X valorem negativum infinite parvum ex valore reali ipsius x assequi possit: functionem illam valorem realem positivum infinite parvum ex valore reali ipsius x vel ex imaginario sub forma $p+q\sqrt{-1}$ contento adipisci posse.

Hinc secundo concludit, etiam valorem aliquem realem finitum ipsius X dari, in casu priori negativum, in posteriori positivum, qui ex valore imaginario ipsius x sub forma $p+q\sqrt{-1}$ contento produci possit.

Hinc sequitur, si X sit talis functio ipsius x, quae valorem realem V ex valore ipsius x reali v obtineat, atque etiam valorem realem quantitate infinite parva vel maiorem vel minorem ex valore reali ipsius x assequatur, eandem etiam valorem realem quantitate infinite parva atque adeo finita vel minorem vel maiorem quam V (resp.) recipere posse, tribuendo ipsi x valorem sub forma $p+q\sqrt{-1}$ contentum. Hoc nullo negotio ex praecc. derivatur, si pro X substitui concipitur $V+Y$, et pro x, $v+y$.

Tandem affirmat ill. D'ALEMBERT, si X totum intervallum aliquod inter duos valores reales R, S percurrere posse supponatur (i. e. tum ipsi R, tum ipsi S, tum omnibus valoribus realibus intermediis aequalis fieri), tribuendo ipsi x valores semper in forma $p+q\sqrt{-1}$ contentos; functionem X quavis quantitate finita reali adhuc augeri vel diminui posse (prout $S>R$ vel $S<R$), manente x semper sub forma $p+q\sqrt{-1}$. Si enim quantitas realis U daretur (inter quam et R supponitur S iacere), cui X per talem valorem ipsius x aequalis fieri non posset, necessario valorem *maximum* ipsius X dari (scilicet quando $S>R$; minimum vero, quando $S<R$), puta T, quem ex valore ipsius x, $p+q\sqrt{-1}$, consequeretur, ita ut ipsi x nullus valor sub simili forma contentus tribui posset, qui functionem X vel minimo excessu propius versus U promoveret. Iam si in aequatione inter X et x pro x ubique substituatur $p+q\sqrt{-1}$, atque tum pars realis, tum pars, quae factorem $\sqrt{-1}$ implicet, hoc omisso, cifrae aequentur: ex duabus aequationibus hinc prodeuntibus (in quibus p, q et X cum constantibus permixtae occurrent) per eliminationem duas alias elici posse, in quarum altera p, X et constantes reperiantur, altera a p libera solas q, X et constantes involvat. Quamobrem quum X per valores reales ipsarum p, q omnes valores ab R usque ad T percurrerit, per praecc. X versus valorem U adhuc propius accedere posse tribuendo ipsius p, q valores tales $\alpha+\gamma\sqrt{-1}$, $\beta+\delta\sqrt{-1}$ resp. Hinc vero fieri $x=\alpha-\delta+(\gamma+\beta)\sqrt{-1}$, i. e. adhuc sub forma $p+q\sqrt{-1}$ esse contra hyp.

Iam si X functionem talem ut $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} +$ etc. $+ M$ denotare supponitur, nullo negotio perspicitur, ipsi x tales valores reales tribui posse, ut X totum aliquod intervallum inter duos valores reales percurrat. Quare x valorem aliquem sub forma $p + q\sqrt{-1}$ contentum talem etiam nancisci poterit, unde X fiat $= 0$. Q. E. D.*)

6.

Quae contra demonstrationem D'ALEMBERTianam obiici posse videntur, ad haec fere redeunt.

1. Ill. D'A. nullum dubium movet de *existentia* valorum ipsius x, quibus valores dati ipsius X respondeant, sed illam supponit, solamque *formam* istorum valorum investigat.

Quamvis vero haec obiectio per se gravissima sit, tamen hic ad solam dictionis formam pertinet, quae facile ita corrigi potest, ut illa penitus destruatur.

2. Assertio, ω per talem seriem qualem ponit semper exprimi posse, certo est falsa, si X etiam functionem quamlibet transscendentem designare debet (uti D'A. pluribus locis innuit). Hoc e. g. manifestum est, si ponitur $X = e^{\frac{1}{x}}$, sive $x = \frac{1}{\log X}$. Attamen si demonstrationem ad eum casum restringimus, ubi X est functio algebraica ipsius x (quod in praesenti negotio sufficit), propositio utique est vera. — Ceterum D'A. nihil pro confirmatione suppositionis suae attulit; cel. BOUGAINVILLE supponit, X esse functionem algebraicam ipsius x, et ad inventionem seriei parallelogrammum NEWTONianum commendat.

3. Quantitatibus infinite parvis liberius utitur, quam cum geometrico rigore consistere potest aut saltem nostra aetate (ubi illae merito male audiunt) ab analysta scrupuloso concederetur, neque etiam saltum a valore

*) Observare convenit, ill. D'ALEMBERT in sua huius demonstrationis expositione considerationes geometricas adhibuisse, atque X tamquam abscissam, x tamquam ordinatam curvae spectavisse (secundum morem omnium geometrarum primae huius saeculi partis, apud quos notio functionum minus usitata erat). Quia vero omnia ipsius ratiocinia, si ad ipsorum essentiam solam respicis, nullis principiis geometricis, sed pure analyticis innituntur, et curva imaginaria, ordinataeque imaginariae expressiones duriores esse lectoremque hodiernum facilius offendere posse videntur, formam repraesentationis mere analyticam hic adhibere malui. Hanc annotationem ideo adieci, ne quis demonstrationem D'ALEMBERTianam ipsam cum hac succincta expositione comparans aliquid essentiale immutatum esse suspicetur.

infinite parvo ipsius Ω ad finitum satis luculenter explicavit. Propositionem suam, Ω etiam valorem aliquem finitum consequi posse, non tam ex possibilitate valoris infinite parvi ipsius Ω concludere videtur quam inde potius, quod denotante Ω quantitatem valde parvam, propter magnam seriei convergentiam, quo plures termini seriei accipiantur, eo propius ad valorem verum ipsius ω accedatur, aut, quo plurium partium summa pro ω accipiatur, eo exactius aequationi, quae relationem inter ω et Ω sive x et X exhibeat, satisfactum iri. Praeterea quod tota haec argumentatio nimis vaga videtur, quam ut ulla conclusio rigorosa inde colligi possit: observo, utique dari series, quae quantumvis parvus valor quantitati, secundum cuius potestates progrediuntur, tribuatur, nihilominus semper divergant, ita ut si modo satis longe continuentur, ad terminos quavis quantitate data maiores pervenire possis.*) Hoc evenit, quando coëfficientes seriei progressionem hypergeometricam constituunt. Quamobrem necessario demonstrari debuisset, talem seriem hypergeometricam in casu praesenti provenire non posse.

Ceterum mihi videtur, ill. D'A. hic non recte ad series infinitas confugisse, hasque ad stabiliendum theorema hoc fundamentale doctrinae aequationum haud idoneas esse.

4. Ex suppositione, X obtinere posse valorem S neque vero valorem U, nondum sequitur, inter S et U necessario valorem T iacere, quem X attingere sed non superare possit. Superest adhuc alius casus: scilicet fieri posset, ut inter S et U limes situs sit, ad quem accedere quidem quam prope velis possit X, ipsum vero nihilominus numquam attingere. Ex argumentis ab ill. D'A. allatis tantummodo sequitur, X omnem valorem, quem attigerit, adhuc quantitate finita superare posse, puta quando evaserit $= S$, adhuc quantitate aliqua finita Ω augeri posse; quo facto, novum incrementum Ω' accedere, tunc iterum augmentum Ω'' etc., ita ut quotcunque incrementa iam

*) Hacce occasione obiter adnoto, ex harum serierum numero plurimas esse, quae primo aspectu maxime convergentes videantur, e. g. ad maximam partem eas, quibus ill. EULER in parte poster. *Inst. Calc. Diff.* Cap. VI.[1]) ad summam aliarum serierum quam proxime assignandam utitur p. 441—474 (reliquae enim series p. 475—478 revera convergere possunt), quod, quantum scio, a nemine hucusque observatum est. Quocirca magnopere optandum esset, ut dilucide et rigorose ostenderetur, cur huiusmodi series, quae primo citissime, dein paullatim lentius lentiusque convergunt, tandemque magis magisque divergunt, nihilominus summam proxime veram suppeditent, si modo non nimis multi termini capiantur, et quousque talis summa pro exacta tuto haberi possit?

1) LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 10, p. 337—367. F. R.

adiecta sint, nullum pro ultimo haberi debeat, sed semper aliquod novum accedere possit. At quamvis *multitudo* incrementorum possibilium nullis limitibus sit circumscripta: tamen utique fieri posset, ut si incrementa Ω, Ω', Ω'' etc. continuo decrescerent, nihilominus summa $S + \Omega + \Omega' + \Omega''$ etc. limitem aliquem numquam attingeret, quotcunque termini considerentur.

Quamquam hic casus occurrere non potest, quando X designat functionem algebraicam integram ipsius x: tamen sine demonstratione, hoc fieri non posse, methodus necessario pro incompleta habenda est. Quando vero X est functio transscendens, sive etiam algebraica fracta, casus ille utique locum habere potest, e. g. semper quando valori cuidam ipsius X valor infinite magnus ipsius x respondet. Tum methodus D'ALEMBERTiana non sine multis ambagibus, et in quibusdam casibus nullo forsan modo, ad principia indubitata reduci posse videtur.

Propter has rationes demonstrationem D'ALEMBERTianam pro satisfaciente habere nequeo. Attamen hoc non obstante verus demonstrationis nervus probandi per omnes obiectiones neutiquam infringi mihi videtur, credoque eidem fundamento (quamvis longe diversa ratione, et saltem maiori circumspicientia) non solum demonstrationem rigorosam theorematis nostri superstrui, sed ibinde omnia peti posse, quae circa aequationum *transscendentium* theoriam desiderari queant. De qua re gravissima alia occasione fusius agam; conf. interim infra art. 24.

7.

Post D'ALEMBERTUM ill. EULER disquisitiones suas de eodem argumento promulgavit, *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, Hist. de l'Acad. de Berlin A. 1749, p. 222 sqq. Methodum duplicem hic tradidit: prioris summa continetur in sequentibus.

Primo ill. E. suscipit demonstrare, si m denotet quamcunque dignitatem numeri 2, functionem $x^{2m} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} +$ etc. $+ M = X$ (in qua coëfficiens termini secundi est $= 0$) semper in duos factores reales resolvi posse, in quibus x usque ad m dimensiones ascendat. Ad hunc finem duos factores assumit

$$x^m - ux^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \beta x^{m-3} + \text{etc.},$$

et

$$x^m + ux^{m-1} + \lambda x^{m-2} + \mu x^{m-3} + \text{etc.}$$

ubi coëfficientes u, α, β etc. λ, μ etc. adhuc incogniti sunt, horumque productum aequale ponit functioni X. Tum coëfficientium comparatio suppeditat

$2m-1$ aequationes, manifestoque demonstrari tantummodo debet, incognitis u, α, β etc. λ, μ etc. (quarum multitudo etiam est $2m-1$) tales valores reales tribui posse, qui aequationibus illis satisfaciant. Iam E. affirmat, si primo u tamquam cognita consideretur, ita ut multitudo incognitarum unitate minor sit quam multitudo aequationum, his secundum methodos algebraicas notas rite combinatis omnes α, β etc. λ, μ etc. rationaliter et sine ulla radicum extractione per u et coëfficientes B, C etc. determinari posse, adeoque valores reales nancisci, simulac u realis fiat. Praeterea vero omnes α, β etc. λ, μ etc. eliminari poterunt, ita ut prodeat aequatio $U=0$, ubi U erit functio integra solius u et coëfficientium cognitorum. Hanc aequationem ipsam per methodum eliminationis vulgarem evolvere, opus immensum foret, quando aequatio proposita $X=0$ est gradus aliquantum alti; et pro gradu indeterminato, plane impossibile (iudice ipso E. p. 239[1])). Attamen hic sufficit, unam illius aequationis proprietatem novisse, scilicet quod terminus ultimus in U (qui incognitam u non implicat) necessario est negativus, unde sequi constat, aequationem ad minimum unam radicem realem habere, sive u et proin etiam α, β etc. λ, μ etc. ad minimum uno modo realiter determinari posse: illam vero proprietatem per sequentes reflexiones confirmare licet. Quum $x^m - ux^{m-1} + \alpha x^{m-2} +$ etc. supponatur esse factor functionis X: necessario u erit summa m radicum aequationis $X=0$, adeoque totidem valores habere debebit, quot modis diversis ex $2m$ radicibus m excerpi possunt, sive per principia calculi combinationum $\frac{2m\cdot 2m-1\cdot 2m-2\cdots m+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}$ valores. Hic numerus semper erit impariter par (demonstrationem haud difficilem supprimo): si itaque ponitur $=2k$, ipsius semissis k impar erit; aequatio $U=0$ vero erit gradus $2k^{\text{ti}}$. Iam quoniam in aequatione $X=0$ terminus secundus deest: summa omnium $2m$ radicum erit 0; unde patet, si summa quarumcunque m radicum fuerit $+p$, reliquarum summam fore $-p$, i. e. si $+p$ est inter valores ipsius u, etiam $-p$ inter eosdem erit. Hinc E. concludit, U esse productum ex k factoribus duplicibus talibus $uu-pp$, $uu-qq$, $uu-rr$ etc., denotantibus $+p$, $-p$, $+q$, $-q$ etc. omnes $2k$ radices aequationis $U=0$, unde, propter multitudinem imparem horum factorum, terminus ultimus in U erit quadratum producti pqr etc. signo negativo affectum. Productum autem pqr etc. semper ex coëfficientibus B, C etc. rationaliter determinari potest, adeoque necessario erit quantitas realis. Huius itaque quadratum signo negativo affectum certo erit quantitas negativa. Q. E. D.

1) Vide p. 97 huius voluminis. F. R.

Quum hi duo factores reales ipsius X sint gradus m^{ti} atque m potestas numeri 2: eadem ratione uterque rursus in duos factores reales $\frac{1}{2}m$ dimensionum resolvi poterit. Quoniam vero per repetitam dimidiationem numeri m necessario tandem ad binarium pervenitur, manifestum est, per continuationem operationis functionem X tandem in factores reales secundi gradus resolutam haberi.

Quodsi vero functio talis proponitur, in qua terminus secundus non deest, puta $x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \text{etc.} + M$, designante etiamnum $2m$ potestatem binariam, haec per substitutionem $x = y - \frac{A}{2m}$ transibit in similem functionem termino secundo carentem. Unde facile concluditur, etiam illam functionem in factores reales secundi gradus resolubilem esse.

Denique proposita functione gradus n^{ti}, designante n numerum, qui non est potestas binaria: ponatur potestas binaria proxime maior quam n, $= 2m$, multipliceturque functio proposita per $2m - n$ factores simplices reales quoscunque. Ex resolubilitate producti in factores reales secundi gradus, nullo negotio derivatur, etiam functionem propositam in factores reales secundi vel primi gradus resolubilem esse debere.

8.

Contra hanc demonstrationem obiici potest

1. Regulam, secundum quam E. concludit, ex $2m - 1$ aequationibus $2m - 2$ incognitas α, β etc. λ, μ etc. omnes rationaliter determinari posse, neutiquam esse generalem, sed saepissime exceptionem pati. Si quis e. g. in art. 3. aliqua incognitarum tamquam cognita spectata, reliquas per hanc et coëfficientes datos rationaliter exprimere tentat, facile inveniet, hoc esse impossibile, nullamque quantitatum incognitarum aliter quam per aequationem $m - 1^{ti}$ gradus determinari posse. Quamquam vero hic statim a priori perspici potest, illud necessario ita evenire debuisse: tamen merito dubitari posset, annon etiam in casu praesenti pro quibusdam valoribus m res eodem modo se habeat, ut incognitae α, β etc. λ, μ etc. ex u, B, C etc. aliter quam per aequationem gradus forsan maioris quam $2m$ determinari nequeant. Pro eo casu, ubi aequatio $X = 0$ est quarti gradus, E. valores rationales coëfficientium per u et coëfficientes datos eruit; idem vero etiam in omnibus aequationibus altioribus fieri posse, utique explicatione ampliori egebat. — Ceterum operae pretium esse videtur, in formulas illas, quae α, β etc. ratio-

naliter per u, B, C etc. exprimant, profundius et generalissime inquirere; de qua re aliisque ad eliminationis theoriam (argumentum haudquaquam exhaustum) pertinentibus alia occasione fusius agere suscipiam.

2. Etiamsi autem demonstratum fuerit, cuiusvis gradus sit aequatio $X=0$, semper formulas inveniri posse, quae ipsas α, β etc. λ, μ etc. rationaliter per u, B, C etc. exhibeant: tamen certum est, pro valoribus quibusdam determinatis coëfficientium B, C etc. formulas illas *indeterminatas* evadere posse, ita ut non solum impossibile sit, incognitas illas rationaliter ex u, B, C etc. definire, sed adeo revera quibusdam in casibus valori alicui reali ipsius u nulli valores reales ipsarum α, β etc. λ, μ etc. respondeant. Ad confirmationem huius rei brevitatis gratia ablego lectorem ad diss. ipsam E., ubi p. 236[1]) aequatio quarti gradus fusius explicata est. Statim quisque videbit, formulas pro coëfficientibus α, β indeterminatas fieri, si $C=0$ et pro u assumatur valor 0, illorumque valores non solum sine extractione radicum assignari non posse, sed adeo ne reales quidem esse, si fuerit $BB-4D$ quantitas negativa. Quamquam vero in hoc casu u adhuc alios valores reales habere, quibus valores reales ipsarum α, β respondeant, facile perspici potest: tamen vereri aliquis posset, ne huius difficultatis enodatio (quam E. omnino non attigit) in aequationibus altioribus multo maiorem operam facessat. Certe haec res in demonstratione exacta neutiquam silentio praeteriri debet.

3. Ill. E. supponit tacite, aequationem $X=0$ habere $2m$ radices, harumque summam statuit $=0$, ideo quod terminus secundus in X abest. Quomodo de hac licentia (qua omnes auctores de hoc argumento utuntur) sentiam, iam supra art. 3 declaravi. Propositio, summam omnium radicum aequationis alicuius coëfficienti primo, mutato signo, aequalem esse, ad alias aequationes applicanda non videtur, nisi quae radices habent: iam quum per hanc ipsam demonstrationem evinci debeat, aequationem $X=0$ revera radices habere, haud permissum videtur, harum existentiam supponere. Sine dubio ii, qui huius paralogismi fallaciam nondum penetraverunt, respondebunt, *hic non demonstrari, aequationi* $X=0$ *satisfieri posse* (nam hoc dicere vult expressio, eam habere radices), *sed tantummodo, ipsi per valores ipsius* x *sub forma* $a+b\sqrt{-1}$ *contentos satisfieri posse; illud vero tamquam axioma supponi.* At quum aliae quantitatum formae, praeter realem et imaginariam $a+b\sqrt{-1}$ concipi nequeant, non satis luculentum videtur, quomodo id, quod demonstrari debet, ab eo, quod tamquam axioma supponitur, differat; quin adeo si

1) Vide p. 93—94 huius voluminis. F. R.

possibile esset adhuc alias formas quantitatum excogitare, puta formam F, F', F'' etc.: tamen sine demonstratione admitti non deberet, cuivis aequationi per aliquem valorem ipsius x aut realem, aut sub forma $a+b\sqrt{-1}$, aut sub forma F, aut sub F' etc. contentum satisfieri posse. Quamobrem axioma illud alium sensum habere nequit quam hunc: Cuivis aequationi satisfieri potest *aut* per valorem realem incognitae, *aut* per valorem imaginarium sub forma $a+b\sqrt{-1}$ contentum, *aut* forsan per valorem sub forma alia hucusque ignota contentum, *aut* per valorem, qui sub nulla omnino forma continetur. Sed quomodo huiusmodi quantitates, de quibus ne ideam quidem fingere potes — vera umbrae umbra — summari aut multiplicari possint, hoc ea perspicuitate, quae in mathesi semper postulatur, certo non intelligitur. *)

Ceterum conclusiones, quas E. ex suppositione sua elicuit, per has obiectiones haudquaquam suspectas reddere volo; quin potius certus sum, illas per methodum neque difficilem neque ab EULERiana multum diversam ita comprobari posse, ut nemini vel minimus scrupulus superesse debeat. Solam *formam* reprehendo, quae quamvis in *inveniendis* novis veritatibus magnae utilitatis esse possit, tamen in *demonstrando*, coram publico, minime probanda videtur.

4. Pro demonstratione assertionis, productum pqr etc. ex coëfficientibus in X *rationaliter* determinari posse, ill. E. nihil omnino attulit. Omnia, quae hac de re in aequationibus *quarti gradus* explicat, haec[1]) sunt (ubi $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ sunt radices aequationis propositae $x^4+Bxx+Cx+D=0$):

„On m'objectera sans doute, que j'ai supposé ici, que la quantité pqr étoit une quantité réelle, et que son quarré $ppqqrr$ étoit affirmatif; ce qui étoit encore douteux, vu que les racines $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ étant imaginaires, il pourroit bien arriver, que le quarré de la quantité pqr qui en est composée, fût négatif. Or je réponds à cela, que ce cas ne sauroit jamais avoir lieu; car quelques imaginaires que soient les racines $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, on sait pourtant, qu'il doit y avoir

*) Tota haec res multum illustrabitur per aliam disquisitionem sub prelo iam sudantem, ubi in argumento longe quidem diverso, nihilominus tamen analogo, licentiam similem prorsus eodem iure usurpare potuissem, ut hic in aequationibus ab omnibus analystis factum est. Quamquam vero plurium veritatum demonstrationes adiumento talium fictionum paucis verbis absolvere licuisset, quae absque his perquam difficiles evadunt et subtilissima artificia requirunt, tamen illis omnino abstinere malui, speroque, paucis me satisfacturum fuisse, si analystarum methodum imitatus essem.

1) Vide p. 98 huius voluminis. F. R.

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=0;\quad \mathfrak{ab}+\mathfrak{ac}+\mathfrak{ad}+\mathfrak{bc}+\mathfrak{bd}+\mathfrak{cd}=B;$$
$$\mathfrak{abc}+\mathfrak{abd}+\mathfrak{acd}+\mathfrak{bcd}=C^{*});\quad \mathfrak{abcd}=D,$$

ces quantités B, C, D étant réelles. Mais puisque $p=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $q=\mathfrak{a}+\mathfrak{c}$, $r=\mathfrak{a}+\mathfrak{d}$, leur produit $pqr=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})(\mathfrak{a}+\mathfrak{d})$ est déterminable, *comme on sait*, par les quantités B, C, D, et sera par conséquent réel; tout comme nous avons vu, qu'il est effectivement $pqr=-C$ et $ppqqrr=CC$. On reconnoîtra aisément de même, que dans les plus hautes équations cette même circonstance doit avoir lieu, et qu'on ne sauroit me faire des objections de ce côté.“

Conditionem, productum pqr etc. *rationaliter* per B, C etc. determinari posse, E. nullibi adiecit, attamen semper subintellexisse videtur, quum absque illa demonstratio nullam vim habere possit. Iam verum quidem est in aequationibus quarti gradus, si productum $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})(\mathfrak{a}+\mathfrak{d})$ evolvatur, obtineri $\mathfrak{aa}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d})+\mathfrak{abc}+\mathfrak{abd}+\mathfrak{acd}+\mathfrak{bcd}=-C$, attamen non satis perspicuum videtur, quomodo in omnibus aequationibus superioribus productum rationaliter per coëfficientes determinari possit. Clar. DE FONCENEX[1]), qui primus hoc observavit (Miscell. phil. math. soc. Taurin. T. I. p. 117), recte contendit, sine demonstratione rigorosa huius propositionis methodum omnem vim perdere, illam vero satis difficilem sibi videri confitetur, et quam viam frustra tentaverit, enarrat.**) Attamen haec res haud difficulter per methodum sequentem (cuius summam addigitare tantummodo hic possum) absolvitur: Quamquam in aequationibus quarti gradus non satis clarum est, productum $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})(\mathfrak{a}+\mathfrak{d})$ per coëfficientes B, C, D determinabile esse, tamen facile perspici potest, idem productum etiam esse $=(\mathfrak{b}+\mathfrak{a})(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\mathfrak{b}+\mathfrak{d})$, nec non $=(\mathfrak{c}+\mathfrak{a})(\mathfrak{c}+\mathfrak{b})(\mathfrak{c}+\mathfrak{d})$, denique etiam $=(\mathfrak{d}+\mathfrak{a})(\mathfrak{d}+\mathfrak{b})(\mathfrak{d}+\mathfrak{c})$. Quare productum pqr erit quadrans summae

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})(\mathfrak{a}+\mathfrak{d})+(\mathfrak{b}+\mathfrak{a})(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\mathfrak{b}+\mathfrak{d})+(\mathfrak{c}+\mathfrak{a})(\mathfrak{c}+\mathfrak{b})(\mathfrak{c}+\mathfrak{d})$$
$$+(\mathfrak{d}+\mathfrak{a})(\mathfrak{d}+\mathfrak{b})(\mathfrak{d}+\mathfrak{c}),$$

*) E. per errorem habet C, unde etiam postea perperam statuit $pqr=C$.

**) In hanc expositionem error irrepsisse videtur, scilicet p. 118. l. 5. loco characteris p (on choisissait seulement celles où entrait p etc.), necessario legere oportet, *une même racine quelconque de l'équation proposée,* aut simile quid, quum illud nullum sensum habeat.

1) F. DAVIET DE FONCENEX (1734—1799). F. R.

quam, si evolvatur, fore functionem rationalem integram radicum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ talem, in quam omnes eadem ratione ingrediantur, nullo negotio a priori praevideri potest. Tales vero functiones semper rationaliter per coëfficientes aequationis, cuius radices sunt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, exprimi possunt. — Idem etiam manifestum est, si productum pqr sub hanc formam redigatur

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{c}-\mathfrak{d})\times\tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}-\mathfrak{b}-\mathfrak{d})\times\tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{d}-\mathfrak{b}-\mathfrak{c})$$

quod productum evolutum omnes $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ eodem modo implicaturum esse facile praevideri potest. Simul periti facile hinc colligent, quomodo hoc ad altiores aequationes applicari debeat. — Completam demonstrationis expositionem, quam hic apponere brevitas non permittit, una cum uberiori disquisitione de functionibus plures variabiles eodem modo involventibus ad aliam occasionem mihi reservo.

Ceterum observo, praeter has quatuor obiectiones, adhuc quaedam alia in demonstratione E. reprehendi posse, quae tamen silentio praetereo, ne forte censor nimis severus esse videar, praesertim quum praecedentia satis ostendere videantur, demonstrationem in ea quidem forma, in qua ab E. proposita est, pro completa neutiquam haberi posse.

Post hanc demonstrationem, E. adhuc aliam viam theorema pro aequationibus, quarum gradus non est potestas binaria, ad talium aequationum resolutionem reducendi ostendit: attamen quum methodus haec pro aequationibus quarum gradus est potestas binaria, nihil doceat, insuperque omnibus obiectionibus praecc. (praeter quartam) aeque obnoxia sit ut demonstratio prima generalis: haud necesse est illam hic fusius explicare.

9.

In eadem commentatione ill. E. theorema nostrum adhuc alia via confirmare annixus est p. 263[1]), cuius summa continetur in his: Proposita aequatione $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}$ etc. $=0$, hucusque quidem expressio analytica, quae ipsius radices exprimat, inveniri non potuit, si exponens $n>4$; attamen certum esse videtur (uti asserit E.), illam nihil aliud continere posse, quam operationes arithmeticas et extractiones radicum eo magis complicatas, quo maior sit n. Si hoc conceditur, E. optime ostendit, quantumvis inter se complicata sint signa radicalia, tamen formulae valorem semper per formam $M+N\sqrt{-1}$ repraesentabilem fore, ita ut M, N sint quantitates reales.

1) Vide p. 119—120 huius voluminis. F. R.

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=0;\quad \mathfrak{ab}+\mathfrak{ac}+\mathfrak{ad}+\mathfrak{bc}+\mathfrak{bd}+\mathfrak{cd}=B;$$
$$\mathfrak{abc}+\mathfrak{abd}+\mathfrak{acd}+\mathfrak{bcd}=C^{*});\quad \mathfrak{abcd}=D,$$

ces quantités B, C, D étant réelles. Mais puisque $p=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $q=\mathfrak{a}+\mathfrak{c}$, $r=\mathfrak{a}+\mathfrak{d}$, leur produit $pqr=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})(\mathfrak{a}+\mathfrak{d})$ est déterminable, *comme on sait*, par les quantités B, C, D, et sera par conséquent réel; tout comme nous avons vu, qu'il est effectivement $pqr=-C$ et $ppqqrr=CC$. On reconnoîtra aisément de même, que dans les plus hautes équations cette même circonstance doit avoir lieu, et qu'on ne sauroit me faire des objections de ce côté.“

Conditionem, productum pqr etc. *rationaliter* per B, C etc. determinari posse, E. nullibi adiecit, attamen semper subintellexisse videtur, quum absque illa demonstratio nullam vim habere possit. Iam verum quidem est in aequationibus quarti gradus, si productum $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})(\mathfrak{a}+\mathfrak{d})$ evolvatur, obtineri $\mathfrak{aa}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d})+\mathfrak{abc}+\mathfrak{abd}+\mathfrak{acd}+\mathfrak{bcd}=-C$, attamen non satis perspicuum videtur, quomodo in omnibus aequationibus superioribus productum rationaliter per coëfficientes determinari possit. Clar. DE FONCENEX[1]), qui primus hoc observavit (Miscell. phil. math. soc. Taurin. T. I. p. 117), recte contendit, sine demonstratione rigorosa huius propositionis methodum omnem vim perdere, illam vero satis difficilem sibi videri confitetur, et quam viam frustra tentaverit, enarrat.**) Attamen haec res haud difficulter per methodum sequentem (cuius summam addigitare tantummodo hic possum) absolvitur: Quamquam in aequationibus quarti gradus non satis clarum est, productum $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})(\mathfrak{a}+\mathfrak{d})$ per coëfficientes B, C, D determinabile esse, tamen facile perspici potest, idem productum etiam esse $=(\mathfrak{b}+\mathfrak{a})(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\mathfrak{b}+\mathfrak{d})$, nec non $=(\mathfrak{c}+\mathfrak{a})(\mathfrak{c}+\mathfrak{b})(\mathfrak{c}+\mathfrak{d})$, denique etiam $=(\mathfrak{d}+\mathfrak{a})(\mathfrak{d}+\mathfrak{b})(\mathfrak{d}+\mathfrak{c})$. Quare productum pqr erit quadrans summae

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})(\mathfrak{a}+\mathfrak{d})+(\mathfrak{b}+\mathfrak{a})(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\mathfrak{b}+\mathfrak{d})+(\mathfrak{c}+\mathfrak{a})(\mathfrak{c}+\mathfrak{b})(\mathfrak{c}+\mathfrak{d})$$
$$+(\mathfrak{d}+\mathfrak{a})(\mathfrak{d}+\mathfrak{b})(\mathfrak{d}+\mathfrak{c}),$$

---

*) E. per errorem habet C, unde etiam postea perperam statuit $pqr=C$.

**) In hanc expositionem error irrepsisse videtur, scilicet p. 118. l. 5. loco characteris p (on choisissait seulement celles où entrait p etc.), necessario legere oportet, *une même racine quelconque de l'équation proposée*, aut simile quid, quum illud nullum sensum habeat.

---

1) F. DAVIET DE FONCENEX (1734—1799). F. R.

quam, si evolvatur, fore functionem rationalem integram radicum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ talem, in quam omnes eadem ratione ingrediantur, nullo negotio a priori praevideri potest. Tales vero functiones semper rationaliter per coëfficientes aequationis, cuius radices sunt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, exprimi possunt. — Idem etiam manifestum est, si productum pqr sub hanc formam redigatur

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{c}-\mathfrak{d})\times\tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}-\mathfrak{b}-\mathfrak{d})\times\tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{d}-\mathfrak{b}-\mathfrak{c})$$

quod productum evolutum omnes $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ eodem modo implicaturum esse facile praevideri potest. Simul periti facile hinc colligent, quomodo hoc ad altiores aequationes applicari debeat. — Completam demonstrationis expositionem, quam hic apponere brevitas non permittit, una cum uberiori disquisitione de functionibus plures variabiles eodem modo involventibus ad aliam occasionem mihi reservo.

Ceterum observo, praeter has quatuor obiectiones, adhuc quaedam alia in demonstratione E. reprehendi posse, quae tamen silentio praetereo, ne forte censor nimis severus esse videar, praesertim quum praecedentia satis ostendere videantur, demonstrationem in ea quidem forma, in qua ab E. proposita est, pro completa neutiquam haberi posse.

Post hanc demonstrationem, E. adhuc aliam viam theorema pro aequationibus, quarum gradus non est potestas binaria, ad talium aequationum resolutionem reducendi ostendit: attamen quum methodus haec pro aequationibus quarum gradus est potestas binaria, nihil doceat, insuperque omnibus obiectionibus praecc. (praeter quartam) aeque obnoxia sit ut demonstratio prima generalis: haud necesse est illam hic fusius explicare.

9.

In eadem commentatione ill. E. theorema nostrum adhuc alia via confirmare annixus est p. 263[1]), cuius summa continetur in his: Proposita aequatione $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ etc. $= 0$, hucusque quidem expressio analytica, quae ipsius radices exprimat, inveniri non potuit, si exponens $n > 4$; attamen certum esse videtur (uti asserit E.), illam nihil aliud continere posse, quam operationes arithmeticas et extractiones radicum eo magis complicatas, quo maior sit n. Si hoc conceditur, E. optime ostendit, quantumvis inter se complicata sint signa radicalia, tamen formulae valorem semper per formam $M + N\sqrt{-1}$ repraesentabilem fore, ita ut M, N sint quantitates reales.

1) Vide p. 119—120 huius voluminis. F. R.

Contra hoc ratiocinium obiici potest, post tot tantorum geometrarum labores perexiguam spem superesse, ad resolutionem generalem aequationum algebraicarum umquam perveniendi, ita ut magis magisque verisimile fiat, talem resolutionem omnino esse impossibilem et contradictoriam. Hoc eo minus paradoxum videri debet, *quum id, quod vulgo resolutio aequationis dicitur, proprie nihil aliud sit quam ipsius reductio ad aequationes puras.* Nam aequationum purarum solutio hinc non docetur sed supponitur, et si radicem aequationis $x^m = H$ per $\sqrt[m]{H}$ exprimis, illam neutiquam solvisti, neque plus fecisti, quam si ad denotandam radicem aequationis $x^n + Ax^{n-1} + \text{etc.} = 0$ signum aliquod excogitares, radicemque huic aequalem poneres. Verum est, aequationes puras propter facilitatem ipsarum radices per approximationem inveniendi, et propter nexum elegantem, quem omnes radices inter se habent, prae omnibus multum praestare, adeoque neutiquam vituperandum esse, quod analystae harum radices per signum peculiare denotaverunt: attamen ex eo, quod hoc signum perinde ut signa arithmetica additionis, subtractionis, multiplicationis, divisionis et evectionis ad dignitatem sub nomine *expressionum analyticarum* complexi sunt, minime sequitur cuiusvis aequationis radicem per illas exhiberi posse. Seu, missis verbis, sine ratione sufficienti supponitur, cuiusvis aequationis solutionem ad solutionem aequationum purarum reduci posse. Forsan non ita difficile foret, impossibilitatem iam pro quinto gradu omni rigore demonstrare, de qua re alio loco disquisitiones meas fusius proponam. Hic sufficit, resolubilitatem generalem aequationum, in illo sensu acceptam, adhuc valde dubiam esse, adeoque demonstrationem, cuius tota vis ab illa suppositione pendet, in praesenti rei statu nihil ponderis habere.

10.

Postea etiam clar. DE FONCENEX, quum in demonstratione prima EULERI defectum animadvertisset (supra art. 8 obiect. 4), quem tollere non poterat, adhuc aliam viam tentavit et in comment. laudata p. 120 in medium protulit.*) Quae consistit in sequentibus.

Proposita sit aequatio $Z = 0$, designante Z functionem m^{ti} gradus incognitae z. Si m est numerus impar, iam constat, aequationem hanc habere radicem realem; si vero m est par, clar. F. sequenti modo probare conatur,

*) In tomo secundo eorundem Miscellaneorum p. 337 dilucidationes ad hanc commentationem continentur: attamen hae ad disquisitionem praesentem non pertinent, sed ad logarithmos quantitatum negativarum, de quibus in eadem comm. sermo fuerat.

aequationem ad minimum unam radicem formae $p+q\sqrt{-1}$ habere. Sit $m=2^n i$, designante i numerum imparem, supponaturque $zz+uz+M$ esse divisor functionis Z. Tunc singuli valores ipsius u erunt summae binarum radicum aequationis $Z=0$ (mutato signo), quamobrem u habebit $\frac{m\cdot m-1}{1\cdot 2}=m'$ valores, et si u per aequationem $U=0$ determinari supponitur (designante U functionem integram ipsius u et coëfficientium cognitorum in Z), haec erit gradus m'^{ti}. Facile vero perspicitur, m' fore numerum formae $2^{n-1}i'$, designante i' numerum imparem. Iam nisi m' est impar, supponatur iterum, $uu+u'u+M'$ esse divisorem ipsius U, patetque per similia ratiocinia, u' determinari per aequationem $U'=0$, ubi U' sit functio $\frac{m'\cdot m'-1}{1\cdot 2}^{\text{ti}}$ gradus ipsius u'. Posito vero $\frac{m'\cdot m'-1}{1\cdot 2}=m''$, erit m'' numerus formae $2^{n-2}i''$, designante i'' numerum imparem. Iam nisi m'' est impar, statuatur $u'u'+u''u'+M''$ esse divisorem functionis U', determinabiturque u'' per aequationem $U''=0$, quae si supponitur esse gradus m'''^{ti}, m''' erit numerus formae $2^{n-3}i'''$. Manifestum est, in serie aequationum $U=0$, $U'=0$, $U''=0$ etc. n^{tam} fore gradus imparis adeoque radicem realem habere. Statuemus brevitatis gratia $n=3$, ita ut aequatio $U''=0$ radicem realem u'' habeat, nullo enim negotio perspicitur, pro quovis alio valore ipsius n idem ratiocinium valere. Tunc coëfficientem M'' per u'' et coëfficientes in U' (quos fore functiones integras coëfficientium in Z facile intelligitur), sive per u'' et coëfficientes in Z rationaliter determinabilem fore asserit clar. de F., et proin realem. Hinc sequitur, radices aequationis $u'u'+u''u'+M''=0$ sub forma $p+q\sqrt{-1}$ contentas fore; eaedem vero manifesto aequationi $U'=0$ satisfacient: quare dabitur valor aliquis ipsius u' sub forma $p+q\sqrt{-1}$ contentus. Iam coëfficiens M' (eodem modo ut ante) rationaliter per u' et coëfficientes in Z determinari potest, adeoque etiam sub forma $p+q\sqrt{-1}$ contentus erit; quare aequationis $uu+u'u+M'$ radices sub eadem forma contentae erunt, simul vero aequationi $U=0$ satisfacient, i. e. aequatio haec habebit radicem sub forma $p+q\sqrt{-1}$ contentam. Denique hinc simili ratione sequitur, etiam M sub eadem forma contineri, nec non radicem aequationis $zz+uz+M=0$, quae manifesto etiam aequationi propositae $Z=0$ satisfaciet. Quamobrem quaevis aequatio ad minimum unam radicem forma $p+q\sqrt{-1}$ habebit.

11.

Obiectiones 1, 2, 3, quas contra Euleri demonstrationem primam feci (art. 8), eandem vim contra hanc methodum habent, ea tamen differentia, ut

obiectio secunda, cui Euleri demonstratio tantummodo in quibusdam casibus specialibus obnoxia erat, praesentem in omnibus casibus attingere debeat. Scilicet a priori demonstrari potest, etiamsi formula detur, quae coëfficientem M' rationaliter per u' et coëfficientes in Z exprimat, hanc pro pluribus valoribus ipsius u' necessario indeterminatam fieri debere; similiterque formulam, quae coëfficientem M'' per u'' exhibeat, indeterminatam fieri pro quibusdam valoribus ipsius u'' etc. Hoc luculentissime perspicietur, si aequationem quarti gradus pro exemplo assumimus. Ponamus itaque $m = 4$, sintque radices aequationis $Z = 0$, hae $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Tum patet, aequationem $U = 0$ fore sexti gradus ipsiusque radices $-(\alpha+\beta)$, $-(\alpha+\gamma)$, $-(\alpha+\delta)$, $-(\beta+\gamma)$, $-(\beta+\delta)$, $-(\gamma+\delta)$. Aequatio $U' = 0$ autem erit decimi quinti gradus, et valores ipsius u' hi

$$\begin{array}{lll} 2\alpha+\beta+\gamma, & 2\alpha+\beta+\delta, & 2\alpha+\gamma+\delta, \\ 2\beta+\alpha+\gamma, & 2\beta+\alpha+\delta, & 2\beta+\gamma+\delta, \\ 2\gamma+\alpha+\beta, & 2\gamma+\alpha+\delta, & 2\gamma+\beta+\delta, \\ 2\delta+\alpha+\beta, & 2\delta+\alpha+\gamma, & 2\delta+\beta+\gamma, \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta, & \alpha+\beta+\gamma+\delta, & \alpha+\beta+\gamma+\delta. \end{array}$$

Iam in hac aequatione, quippe cuius gradus est impar, subsistendum erit, habebitque ea revera radicem realem $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ (quae primo coëfficienti in Z mutato signo aequalis adeoque non modo realis sed etiam rationalis erit, si coëfficientes in Z sunt rationales). Sed nullo negotio perspici potest, si formula detur, quae valorem ipsius M' per valorem respondentem ipsius u' rationaliter exhibeat, hanc necessario pro $u' = \alpha+\beta+\gamma+\delta$ indeterminatam fieri. Hic enim valor *ter* erit radix aequationis $U' = 0$, respondebuntque ipsi tres valores ipsius M', puta $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)$, $(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)$ et $(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)$, qui omnes irrationales esse possunt. Manifesto autem formula rationalis neque valorem irrationalem ipsius M' in hoc casu producere posset, neque tres valores diversos. Ex hoc specimine satis colligi potest, methodum clar. de Foncenexii neutiquam esse satisfacientem, sed si ab omni parte completa reddi debeat, multo profundius in theoriam eliminationis inquiri oportere.

12.

Denique ill. La Grange de theoremate nostro egit in comm. *Sur la forme des racines imaginaires des équations,* Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin

1772, p. 222 sqq.[1]) Magnus hic geometra imprimis operam dedit, defectus in EULERI demonstratione prima supplere et revera praesertim ea, quae supra (art. 8) obiectionem secundam et quartam constituunt, tam profunde perscrutatus est, ut nihil amplius desiderandum restet, nisi forsan in disquisitione anteriori super theoria eliminationis (cui investigatio haec tota innititur) quaedam dubia superesse videantur. — Attamen obiectionem tertiam omnino non attigit, quin etiam tota disquisitio superstructa est suppositioni, quamvis aequationem m^{ti} gradus revera m radices habere.

Probe itaque iis, quae hucusque exposita sunt, perpensis, demonstrationem novam theorematis gravissimi ex principiis omnino diversis petitam peritis haud ingratam fore spero, quam exponere statim aggredior.

. . . .

1) *Oeuvres de* LAGRANGE, publiées par les soins de M. J.-A. SERRET, t. III, Paris 1869, p. 479.
F. R.

DE RESOLUTIONE AEQUATIONUM CUIUSVIS GRADUS

Commentatio 282 indicis ENESTROEMIANI
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 9 (1762/3), 1764, p. 70—98
Summarium ibidem p. 13—16

SUMMARIUM

Quaestio hic versatur circa aequationes algebraicas, quarum gradus aestimatur ex potestate summa quantitatis incognitae, cuius valorem inde determinari oportet; ita postquam huiusmodi aequationes ad debitam formam fuerint perductae, secundum gradus ita in genere repraesentari possunt:

gradus	aequationes
I.	$x + A = 0$
II.	$x^2 + Ax + B = 0$
III.	$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$
IV.	$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$
V.	$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$
VI.	$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0$
	etc.

Iam notum est harum aequationum resolutionem in genere non ultra quartum gradum adhuc esse investigatam, quod eo magis mirandum videtur, quod, cum secundus gradus iam ab antiquissimis Geometris Graecis et Arabibus, tertius vero et quartus iam pridem a SCIPIONE FERREO[1]) et BOMBELLO[2]) in ipsa quasi Analyseos infantia sint expediti, ab illo

1) Vide M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2. Bd., 2. Aufl., Leipzig 1900, p. 482 et seq. F. R.

2) Vide notam p. 2 F. R.

tempore, postquam Analysis summo studio est exculta, nondum ultra hos limites progredi licuerit. Cum autem constet resolutionem cuiusque gradus ab omnibus gradibus inferioribus pendere et quantitatem incognitam tot valores recipere, quoti gradus fuerit aequatio, Cel. Auctor huius dissertationis iam olim[1]) coniecturam proposuit, quod pro quovis gradu, veluti quinto

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0,$$

detur aequatio uno gradu inferior, uti

$$y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta = 0,$$

quam vocat illius resolventem, ita ut, si huius radices fuerint

$$p, \quad q, \quad r, \quad s,$$

illius radix ita se sit habitura

$$x = f + \sqrt[5]{p} + \sqrt[5]{q} + \sqrt[5]{r} + \sqrt[5]{s},$$

ubi quidem perspicuum est fore $f = -\frac{1}{5}A$; quae coniectura eo minus ratione destituta videtur, quod non solum cum resolutione cognita aequationum secundi, tertii et quarti gradus egregie consentiat, sed etiam casus illos resolubiles particulares altiorum graduum a Moivreo[2]) olim detectos in se complectatur.

Nunc autem Cel. Auctor animadvertit istius coniecturae formam, qua verbi gratia aequationis quinti gradus radix ita exprimitur

$$x = f + \sqrt[5]{p} + \sqrt[5]{q} + \sqrt[5]{r} + \sqrt[5]{s},$$

nondum satis esse limitatam. Cum enim singulae hae formulae radicales quinos diversos valores natura sua involvant, facile intelligitur non omnes combinationes eorum locum habere posse, quia alioquin numerus diversorum valorum ipsius x in immensum excresceret, quem tamen quinarium superare non posse certum est. Formam igitur illam nimis vagam nunc ita restringit, ut statuat aequationis quinti gradus radicem ita in genere exprimi

$$x = f + \mathfrak{A}\sqrt[5]{p} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{p^2} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{p^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{p^4}$$

similique modo de reliquis gradibus; ubi iam perspicuum est plures quam quinque diversos valores pro x locum habere non posse. Statim enim ac significatus partis $\sqrt[5]{p}$ definitur, quod quinque modis fieri potest, simul etiam reliquae partes determinantur. Deinde etiam patet expressionem pro casu allato non plures quam quinque partes complecti posse, quoniam formulae ulteriores $\sqrt[5]{p^5}$, $\sqrt[5]{p^6}$ etc. sponte ad praecedentes redirent neque novam irrationalitatem implicarent.

1) Vide Commentationem 30 huius voluminis. F. R.

2) Vide notam p. 8. F. R.

Hanc igitur novam coniecturam quam pulcre cum resolutionibus iam cognitis consentiat, ostendit, et quamvis ex hoc fonte minime adhuc aequationum quartum gradum superantium resolutionem in genere perficere liceat, tamen hinc pro superioribus gradibus alios insuper casus resolubiles praeter MOIVREANOS deducit, unde non parum luminis in hanc maxime absconditam Analyseos partem redundare videtur.

1. Quae in Algebra adhuc de resolutione aequationum sunt tradita, ea, si ad regulas generales spectemus, tantum ad aequationes, quae quartum gradum non superant, patent neque etiamnum regulae sunt inventae, quarum ope aequationes quinti altiorisve cuiuspiam gradus resolvi queant, ita ut universa Algebra ad aequationes quatuor primorum ordinum restringatur. Hoc autem de regulis generalibus est tenendum, quae ad omnes aequationes eiusdem gradus sint accommodatae; nam in quovis gradu dantur infinitae aequationes, quae per divisionem in duas pluresve aequationes graduum inferiorum resolvi possunt, quarum idcirco radices iunctim sumtae praebent omnes radices illarum aequationum altiorum graduum. Tum vero a Cel. MOIVREO[1]) observatae sunt in quovis gradu quaedam aequationes speciales; quae etsi per divisionem in factores resolvi nequeunt, tamen earum radices assignare liceat.

2. Ex cognita autem resolutione generali aequationum primi, secundi, tertii et quarti gradus constat quidem aequationes primi gradus sine ulla radicis extractione resolvi posse; at aequationum secundi gradus resolutio iam extractionem radicis quadratae postulat. Resolutio autem aequationum tertii gradus tam extractionem radicis quadratae quam cubicae implicat et quarti gradus resolutio insuper extractionem radicis biquadratae exigit. Ex his autem tuto concludere licet resolutionem aequationis quinti gradus generalem extractionem radicis surdesolidae praeter omnes radices inferiores postulare; atque in genere radix aequationis cuiusvis gradus n exprimetur per formam, quae ex omnibus signis radicalibus tam gradus n quam graduum inferiorum erit composita.

3. Haec perpendens olim[2]) in Comment. Acad. Imper. Petrop. Tomo VI coniecturam ausus sum proferre circa formas radicum cuiuscumque aequationis.

1) Vide notam p. 8. F. R.

2) Vide Commentationem 30 huius voluminis. F. R.

Proposita namque aequatione gradus cuiusvis

$$x^n + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + Cx^{n-4} + \text{etc.} = 0,$$

in qua secundum terminum deesse assumsi, quod quidem semper ponere licet, suspicatus sum semper dari aequationem uno gradu inferiorem, veluti

$$y^{n-1} + \mathfrak{A}y^{n-2} + \mathfrak{B}y^{n-3} + \mathfrak{C}y^{n-4} + \text{etc.} = 0,$$

quam illius resolventem appellavi, ita ut, si huius constent omnes radices, quae sint

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon \quad \text{etc.},$$

quarum numerus est $n-1$, ex iis radix illius aequationis ita exprimatur, ut sit

$$x = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \sqrt[n]{\delta} + \text{etc.}$$

Quam coniecturam confirmavi ostendens resolutionem aequationum inferiorum revera ex hac forma generali deduci; neque etiamnunc dubito, quin haec coniectura veritati sit consentanea.

4. Praeterquam autem quod inventio aequationis resolventis, si proposita quartum gradum transcendit, fit difficillima atque adeo in genere vires nostras aeque superare videtur atque ipsa propositae aequationis resolutio, ita ut praeter formas speciales casibus Moivreanis similes nobis nihil admodum suppeditet, alia insuper incommoda in illa forma observavi, quae me eo induxerunt, ut arbitrarer aliam forte dari formam illi non admodum dissimilem, quae istis incommodis non esset subiecta ideoque maiorem spem nobis faceret in hoc arduo Algebrae opere tandem ulterius penetrandi. Non parum autem in hoc negotio proderit veram formam radicum cuiusque aequationis accuratius perspexisse.

5. In forma autem per superiorem coniecturam eruta hoc imprimis desidero, quod omnes aequationis propositae radices non satis distincte exprimantur. Etsi enim quodvis signum radicale $\sqrt[n]{\alpha}$ tot valores diversos complectitur, quot numerus n continet unitates, ita ut, si

$$\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{d}, \quad \mathfrak{e} \quad \text{etc.}$$

omnes valores formulae $\sqrt[n]{1}$ denotent, pro $\sqrt[n]{\alpha}$ scribere liceat quamlibet harum formularum

$$\mathfrak{a}\sqrt[n]{\alpha}, \quad \mathfrak{b}\sqrt[n]{\alpha}, \quad \mathfrak{c}\sqrt[n]{\alpha}, \quad \mathfrak{d}\sqrt[n]{\alpha} \quad \text{etc.},$$

tamen manifestum [est] hanc variationem in singulis terminis $\sqrt[n]{\alpha}$, $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, $\sqrt[n]{\delta}$ etc. non pro lubitu constitui posse. Si enim combinatio horum terminorum cum litteris $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ etc. arbitrio nostro relinqueretur, tum multo plures combinationes resultarent, quam aequatio continet radices, quarum numerus est $= n$.

6. Quo igitur forma radicis x supra exhibita omnes aequationis radices simul complectatur, necesse est, ut combinationes terminorum $\sqrt[n]{\alpha}$, $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, $\sqrt[n]{\delta}$ etc. cum litteris $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ etc. certo quodam modo circumscribantur atque combinationes, quae ad aequationis radices repraesentandas sunt ineptae, excludantur. Ex resolutione quidem aequationum tertii et quarti gradus vidimus inter radices unitatis eiusdem nominis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ etc. certum quendam ordinem constitui debere, secundum quem etiam combinationes sint perficiendae. Hunc in finem autem similis ordo in ipsis radicis membris $\sqrt[n]{\alpha}$, $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, $\sqrt[n]{\delta}$ etc. erit tenendus, quo combinatio dirigatur. Verum quia non constat, quemadmodum in radicibus superiorum graduum talis ordo sit constituendus, hoc sine dubio insigne est incommodum, quo forma coniecturae meae innixa laborat, quod igitur removere in hac dissertatione mihi est propositum.

7. Primum autem conveniet ordinem certum in radicibus cuiusvis potestatis ex unitate constituere, quo summa plerumque varietas combinationum restringatur. Quem in finem observo, si praeter unitatem alius quicumque valor ipsius $\sqrt[n]{1}$ sit $= \mathfrak{a}$, tum etiam $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{a}^3$, $\mathfrak{a}^4$ etc. idoneos valores ipsius $\sqrt[n]{1}$ exhibere; nam si sit $\mathfrak{a}^n = 1$, erit quoque $(\mathfrak{a}^2)^n = 1$, $(\mathfrak{a}^3)^n = 1$, $(\mathfrak{a}^4)^n = 1$ etc. Hinc si reliquae radices ponantur $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ etc., quoniam in iis reperiuntur $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{a}^3$, $\mathfrak{a}^4$ etc., iam certus quidam ordo perspicitur, quo hae litterae inter se disponi debent. Ita si post unitatem, quae semper primum locum tenere censenda est, a littera $\mathfrak{a}$ incipiamus, valores formulae $\sqrt[n]{1}$ erunt

$$1, \quad \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}^2, \quad \mathfrak{a}^3, \quad \mathfrak{a}^4, \quad \ldots \quad \mathfrak{a}^{n-1},$$

quorum numerus est n; plures enim occurrere nequeunt, cum sit $\mathfrak{a}^n = 1$, $\mathfrak{a}^{n+1} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^{n+2} = \mathfrak{a}^2$ etc.; similique modo res se habebit, si post unitatem a quavis alia littera $\mathfrak{b}$ vel $\mathfrak{c}$ vel $\mathfrak{d}$ etc. incipiamus.

8. Hinc ergo merito suspicor talem quoque ordinem in ipsis terminis radicem aequationis x exprimentibus inesse seu singula membra radicalia ita esse comparata, ut respectu uniuscuiusque reliquae sint eius potestates; singulis autem membris nunc necesse erit coefficientes indefinitos tribuere. Quare si aequatio termino secundo destituta fuerit

$$x^n + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + Cx^{n-4} + Dx^{n-5} + \text{etc.} = 0,$$

maxime probabile videtur[1]) radicem quamlibet huius aequationis ita exprimi, ut sit

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^4} + \cdots + \mathfrak{O}\sqrt[n]{v^{n-1}},$$

ubi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. sint quantitates vel rationales vel saltem non signum radicale $\sqrt[n]{}$ involvant, quippe quod tantum quantitatem v eiusque potestates afficiat; multo minus ipsa quantitas v tale signum involvat.

9. Ex hac forma primum patet eam non plura membra, quam quorum numerus sit $n-1$, continere posse; nam etiamsi seriem illam ex sua indole ulterius continuemus, termini sequentes iam in praecedentibus contenti deprehendentur. Erit enim

$$\sqrt[n]{v^{n+1}} = v\sqrt[n]{v}, \quad \sqrt[n]{v^{n+2}} = v\sqrt[n]{v^2} \quad \text{etc.},$$

ita ut irrationalitas signum radicale $\sqrt[n]{}$ involvens plures diversas species non admittat, quam quarum numerus est $= n-1$. Etiamsi ergo illa series in infinitum continuetur, tamen terminos eiusdem speciei ratione irrationalitatis addendo omnes ad terminos numero $n-1$ redigentur. Cum igitur iam ante viderimus plures terminos in radicis expressionem non ingredi, hinc non leve argumentum habetur hanc novam formam veritati plane esse consentaneam; eius autem veritas per sequentia argumenta multo magis confirmabitur.

10. Haec expressio quoque sponte se extendit ad aequationes, in quibus secundus terminus non deest, dum superior remotionem secundi termini exigebat, ex quo ipso haec nova magis naturalis est aestimanda. Continuatio enim terminorum irrationalium $\sqrt[n]{v}$, $\sqrt[n]{v^2}$, $\sqrt[n]{v^3}$ etc. etiam terminos rationales

1) Quam coniecturam EULERUS iam in epistola d. 16. Dec. 1752 ad CHR. GOLDBACH missa exposuerat, quae nota p. 19 laudata est. F. R.

$\sqrt[n]{v^0}$, $\sqrt[n]{v^n}$ involvit, qui ob aequationis terminum secundum adiici debent. Hinc generalius pronunciare poterimus, si aequatio completa ordinis cuiusque n fuerit proposita

$$x^n + \triangle x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + Cx^{n-4} + \text{etc.} = 0,$$

eius radicem exprimi huiusmodi forma

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^4} + \cdots + \mathfrak{O}\sqrt[n]{v^{n-1}},$$

ubi ω partem radicis rationalem exhibet, quam constat esse $= -\frac{1}{n}\triangle$. Reliqui autem termini continent partes irrationales radicem potestatis n involventes, quarum, quatenus sunt diversae, numerus excedere nequit $n-1$, omnino uti per formam superiorem intelligitur.

11. Hinc porro videmus, si v fuerit eiusmodi quantitas, ut ex ea radix potestatis n actu extrahi seu $\sqrt[n]{v}$ vel rationaliter vel per signa radicalia inferiorum potestatum exprimi queat, tum irrationalitatem gradus n prorsus ex forma radicis egredi. Hoc autem necessario usu venire debet, quoties aequatio proposita in factores est resolubilis; tum enim nulla radix signum radicale $\sqrt[n]{}$ continebit. Quare cum natura rei postulet, ut his casibus omnia signa radicalia $\sqrt[n]{}$ evanescant et ad signa simpliciora reducantur, ex forma autem superiori non pateat, quomodo evanescente uno huiusmodi signo $\sqrt[n]{\alpha}$ reliqua $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$ etc. evanescant, ista expressio ob hanc rationem multo magis ad aequationum naturam accommodata est censenda.

12. Praeterea vero haec forma, in quo cardo totius negotii versatur, etiam omnes aequationis radices sine ulla ambiguitate ostendit; neque enim amplius haeremus, quomodo cum omnibus signis radicalibus $\sqrt[n]{}$ totidem valores radicis $\sqrt[n]{1}$ combinandi sint. Si enim omnes radices potestatis n ex unitate sint 1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ etc. ac $\sqrt[n]{v}$ cum earum quacumque $\mathfrak{a}$ combinaverimus, propterea quod $\sqrt[n]{v}$ utique est $\mathfrak{a}\sqrt[n]{v}$, tum pro $\sqrt[n]{v^2}$, $\sqrt[n]{v^3}$, $\sqrt[n]{v^4}$ etc. scribere oportebit $\mathfrak{a}^2\sqrt[n]{v^2}$, $\mathfrak{a}^3\sqrt[n]{v^3}$, $\mathfrak{a}^4\sqrt[n]{v^4}$ etc. Terminus autem constans ω, quia formam $\omega\sqrt[n]{v^0}$ repraesentat, abibit in $\mathfrak{a}^0\omega\sqrt[n]{v^0} = 1\cdot\omega$ ob $\mathfrak{a}^0 = 1$ ideoque in omnibus radicibus nullam mutationem subit quemadmodum reliqua membra. Quod cum ex

resolutione omnium aequationum per se sit manifestum, hinc novum ac satis luculentum habemus criterium veritatis huius novae formae, quae omnium aequationum radices in se complecti videtur.

13. Hinc autem porro manifestum est, quomodo una cuiusque aequationis radice cognita reliquae radices omnes exhiberi queant; ad hoc tantum nosse oportet omnes radices eiusdem potestatis ex unitate seu omnes valores ipsius $\sqrt[n]{1}$, quorum numerus $= n$. Ac si istae unitatis radices fuerint 1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ etc. aequationisque una radix inventa sit

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \cdots + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^{n-1}},$$

radices reliquae erunt

$$x = \omega + \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{a}^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{a}^3\sqrt[n]{v^3} + \cdots + \mathfrak{D}\mathfrak{a}^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}},$$

$$x = \omega + \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^3\sqrt[n]{v^3} + \cdots + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}},$$

$$x = \omega + \mathfrak{A}\mathfrak{c}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{c}^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}^3\sqrt[n]{v^3} + \cdots + \mathfrak{D}\mathfrak{c}^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

etc.

sicque semper tot obtinentur radices, quot exponens n, qui aequationis gradum designat, continet unitates.

14. His igitur argumentis nova haec radicum forma iam ad summum probabilitatis est evecta; atque ad plenam certitudinem ostendendam nihil aliud requiritur, nisi ut regula inveniatur, cuius ope pro quavis aequatione proposita ista forma definiri et coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. cum quantitate v assignari queant; quod si praestare possemus, haberemus sine dubio generalem omnium aequationum resolutionem irrito adhuc omnium Geometrarum labore requisitam. Neque igitur equidem tantum mihi tribuo, ut hanc regulam me invenire posse credam, sed contentus ero plene demonstrasse omnium aequationum radices certo in hac forma esse contentas. Hoc autem sine dubio plurimum luminis foenerabitur ad resolutionem aequationum, cum cognita radicum vera forma via investigationis non mediocriter facilior reddatur, quam ne ingredi quidem licet, quamdiu forma radicum fuerit incognita.

15. Quamquam autem ex ipsa aequatione proposita nobis adhuc non licet radicem eius seu coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. cum quantitate v assignare, tamen demonstratio veritatis aeque succedet, si vicissim ex assumta radice illam aequationem, cuius est radix, eliciamus. Haec autem aequatio libera esse debet a signis radicalibus $\sqrt[n]{}$, quoniam aequationes, quarum radices investigantur, ex terminis rationalibus constare assumi solent. Quaestio ergo huc reducitur, ut huiusmodi aequatio

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \cdots + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

ab irrationalitate seu signis radicalibus $\sqrt[n]{}$ liberetur atque aequatio rationalis inde deducatur, de qua deinceps certo affirmare poterimus eius radicem esse ipsam expressionem assumtam; simulque inde reliquas radices, quae eidem aequationi aeque conveniunt, assignare valebimus. Hoc ergo modo saltem infinitas aequationes exhibere poterimus, quarum radices nobis erunt cognitae, atque si hae aequationes in se complectantur omnium graduum aequationes generales, etiam harum resolutio in nostra erit potestate.

16. Parum quidem a nobis praestitum iri videbitur, si tantum plures aequationes, quarum radices assignari queant, exhibuerimus, cum ex primis elementis constet, quomodo cuiusvis gradus aequatio formari debeat, quae datas habeat radices. Si enim quotcumque huiusmodi formulae $x-a$, $x-b$, $x-c$ etc. in se invicem multiplicentur, obtinebitur utique aequatio, cuius radices futurae sunt $x=a$, $x=b$, $x=c$ etc.; sed talis aequationis formatio parum lucri affert ad resolutionem aequationum. Primum autem observo hoc modo alias aequationes non nasci, nisi quae sint habiturae factores; aequationum autem, quae in factores resolvi possunt, resolutio nulla laborat difficultate. Haud maioris quoque momenti sunt in hoc negotio aequationes, quae ex multiplicatione duarum pluriumve inferiorum aequationum producuntur, quarum resolutio nihil plane prodest ad resolutionem generalem perficiendam.

17. Quodsi autem ex nostra forma

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \text{etc.}$$

ad aequationem rationalem perveniamus, ea certo factores rationales non

habebit; si enim haberet, eius radices, quae simul essent radices aequationum inferiorum graduum, signum radicale $\sqrt[n]{}$ non implicarent. Plurimum is praestare censendus est, qui aequationis cuiuspiam altioris gradus, quae in factores resolvi nequeat, radices assignaverit. Quamobrem etiam Cel. MOIVREO ingentes debentur gratiae, quod ex singulis aequationum gradibus unam exhibuerit in factores irresolubilem, cuius radices assignari possunt; atque si eius formulae latius paterent, multo maiorem sine dubio essent habiturae utilitatem, dum contra aequationibus in factores resolubilibus in hoc negotio nihil plane emolumenti attribui potest.

18. Verum revertamur ad illam formam ab irrationalitate signi $\sqrt[n]{}$ liberandam, ac si consuetas methodos signa radicalia eliminandi consulamus, aequatio resultans ad plurimas dimensiones plerumque ascendere videatur. Si enim unicum adesset signum radicale, puta

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v},$$

aequatio rationalis ad n dimensiones ipsius x ascenderet, unde ea ad multo plures dimensiones ascensura videtur, si plura eiusmodi adsint signa radicalia; id quod sine dubio evenire deberet, si illa signa radicalia a se invicem prorsus non penderent. Sed quia omnia sunt potestates primi, ostendam perfectam rationalitatem obtineri posse non ultra potestatem exponentis n ascendendo. Ita scilicet docebo formam

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \cdots + \mathfrak{O}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

ita ab irrationalitate liberari posse, ut aequatio rationalis inde resultans potestatem x^n non superet. Prodibit ergo aequatio huius formae

$$x^n + \triangle x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \text{etc.} = 0,$$

cuius radix erit illa forma assumta; et quia radicum huius aequationis numerus est $= n$, ex eadem forma omnes huius aequationis radices assignare poterimus.

19. Cum hoc iam sit eximium criterium veritatis huius formae, tum etiam annotasse iuvabit, quoniam forma radicis $n - 1$ quantitates arbitrarias continet, totidem quoque quantitates arbitrarias in aequationem rationalem ingredi, unde perspicuum est istas quantitates ita determinari posse, ut

aequatio rationalis inde datos coefficientes Δ, A, B, C etc. obtineat, hoc est, ut aequatio generalis huius gradus obtineatur. Quae determinatio si actu institui queat, nanciscemur inde resolutionem generalem aequationum cuiuscumque gradus, ex quo saltem possibilitas resolutionis hoc modo perficiendae elucet. Difficultates quidem insignes in hoc negotio occurrent, quas eo clarius agnoscemus, si nostram formam ad quemvis gradum a simplicissimis incipiendo accommodemus. Simplicitati autem et concinnitati calculi consulentes partem radicis rationalem ω omittamus, ut in quovis gradu ad eiusmodi aequationes rationales pertingamus, in quibus secundus terminus desit, quo ipso amplitudo resolutionis non restringi est censenda.

I. RESOLUTIO AEQUATIONUM SECUNDI GRADUS

20. Ut igitur ab aequationibus secundi gradus incipiamus, sit $n = 2$ et posito $\omega = 0$ forma nostra radicis erit

$$x = \mathfrak{A}\sqrt{v},$$

quae rationalis facta dat

$$xx = \mathfrak{A}\mathfrak{A}v.$$

Comparetur haec aequatio cum forma generali secundi gradus

$$xx = A$$

deficiente secundo termino sitque

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}v = A;$$

cui ut satisfiat, statuatur $\mathfrak{A} = 1$ eritque

$$v = A.$$

Unde proposita aequatione $xx = A$ si sumatur $\mathfrak{A} = 1$ et $v = A$, eius radix una erit

$$x = \mathfrak{A}\sqrt{v} = \sqrt{A},$$

et quia $\sqrt{1}$ duos habet valores 1 et -1, altera radix erit

$$x = -\mathfrak{A}\sqrt{v} = -\sqrt{A},$$

quod quidem per se est perspicuum.

II. RESOLUTIO AEQUATIONUM TERTII GRADUS

21. Posito iam $n = 3$ forma radicis pro hoc casu erit

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2};$$

unde ut aequatio rationalis eruatur, sumatur primo cubus

$$x^3 = \mathfrak{A}^3 v + 3\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{B}v\sqrt[3]{v} + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}v\sqrt[3]{v^2} + \mathfrak{B}^3 v^2.$$

Fingatur iam haec aequatio cubica

$$x^3 = Ax + B,$$

unde pro x valorem assumtum substituendo orietur quoque

$$x^3 = A\mathfrak{A}\sqrt[3]{v} + A\mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2} + B,$$

quae forma illi aequalis est reddenda aequandis inter se tam partibus rationalibus quam irrationalibus utriusque speciei $\sqrt[3]{v}$ et $\sqrt[3]{v^2}$.

22. Comparatio autem terminorum rationalium praebet

$$B = \mathfrak{A}^3 v + \mathfrak{B}^3 v^2$$

et ex collatione irrationalium fit

$$A\mathfrak{A} = 3\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{B}v \quad \text{et} \quad A\mathfrak{B} = 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}v,$$

quarum utraque dat

$$A = 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}v.$$

Hinc, si ista aequatio cubica fuerit proposita

$$x^3 = 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}vx + \mathfrak{A}^3 v + \mathfrak{B}^3 v^2,$$

eius radix una erit

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2},$$

et si 1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sint tres radices cubicae unitatis, duae reliquae radices erunt

$$x = \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{a}^2\sqrt[3]{v^2}, \quad x = \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}^2\sqrt[3]{v^2}.$$

Est autem

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{a}^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

23. Possunt autem vicissim, si aequatio cubica proponatur

$$x^3 = Ax + B,$$

ex coefficientibus A et B quantitates $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et v determinari, ut inde omnes tres huius aequationis radices obtineantur. Hunc autem in finem, quia tantum duae aequationes adimplendae habentur, una litterarum $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ pro lubitu assumi potest. Sit igitur $\mathfrak{A} = 1$ et aequatio

$$A = 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}v = 3\mathfrak{B}v$$

praebet

$$\mathfrak{B} = \frac{A}{3v},$$

unde fit

$$\mathfrak{B}^3 = \frac{A^3}{27v^3},$$

qui valor in prima aequatione

$$B = v + \mathfrak{B}^3 v^2$$

substitutus dat

$$B = v + \frac{A^3}{27v} \quad \text{seu} \quad vv = Bv - \frac{1}{27}A^3,$$

unde fit

$$v = \frac{1}{2}B \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}BB - \frac{1}{27}A^3\right)};$$

perinde autem est, uter horum duorum valorum assumatur.

24. Invento autem valore ipsius $v = \frac{1}{2}B \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}BB - \frac{1}{27}A^3\right)}$ erit $\mathfrak{B} = \frac{A}{3v}$ et $\mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2} = \frac{A}{3\sqrt[3]{v}}$ hincque tres aequationis propositae

$$x^3 = Ax + B$$

erunt radices

$$\text{I. } x = \sqrt[3]{v} + \frac{A}{3\sqrt[3]{v}}, \quad \text{II. } x = \mathfrak{a}\sqrt[3]{v} + \frac{\mathfrak{b}A}{3\sqrt[3]{v}}, \quad \text{III. } x = \mathfrak{b}\sqrt[3]{v} + \frac{\mathfrak{a}A}{3\sqrt[3]{v}}.$$

Cum autem sit

$$\frac{1}{v} = \frac{\frac{1}{2}B \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4}BB - \frac{1}{27}A^3\right)}}{\frac{1}{27}A^3},$$

erit

$$\sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}B \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}BB - \frac{1}{27}A^3\right)}\right)}$$

et

$$\frac{A}{3\sqrt[3]{v}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}B \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4}BB - \frac{1}{27}A^3\right)}\right)}$$

hincque nascuntur formulae vulgares pro resolutione aequationum cubicarum.

III. RESOLUTIO AEQUATIONUM QUARTI GRADUS

25. Posito $n = 4$ consideremus hanc radicis formam

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3}$$

et quaeramus aequationem quarti gradus, cuius haec forma sit radix. Atque hoc quidem casu calculus facile instituitur, quo irrationalitates tolluntur; nam ob $\sqrt[4]{v^2} = \sqrt{v}$ sumatur haec aequatio

$$x - \mathfrak{B}\sqrt{v} = \mathfrak{A}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3},$$

quae quadrata dat

$$xx - 2\mathfrak{B}x\sqrt{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}v = \mathfrak{A}\mathfrak{A}\sqrt{v} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C}v + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v\sqrt{v},$$

quae partibus irrationalibus ad eandem partem translatis fit

$$xx + (\mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})\,v = 2\mathfrak{B}x\sqrt{v} + (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\sqrt{v},$$

et sumtis denuo quadratis prodibit haec aequatio rationalis

$$x^4 + 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})\,vxx + (\mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2vv$$
$$= 4\mathfrak{B}\mathfrak{B}vxx + 4(\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\,\mathfrak{B}vx + (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)^2v,$$

quae ordinata abit in hanc formam

$$x^4 = 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})\,vxx + 4(\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\,\mathfrak{B}vx$$
$$+ \mathfrak{A}^4v - \mathfrak{B}^4vv + \mathfrak{C}^4v^3 + 4\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv - 2\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{C}vv.$$

26. Huius igitur aequationis biquadraticae radix una est

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3},$$

ac si radices biquadratae unitatis ponantur 1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ita ut sit

$$\mathfrak{a} = +\sqrt{-1}, \quad \mathfrak{b} = -1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{c} = -\sqrt{-1},$$

erit

$$\mathfrak{a}^2 = -1 = \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{a}^3 = -\sqrt{-1} = \mathfrak{c},$$

$$\mathfrak{b}^2 = +1, \qquad \mathfrak{b}^3 = -1 = \mathfrak{b},$$

$$\mathfrak{c}^2 = -1 = \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{c}^3 = +\sqrt{-1} = \mathfrak{a},$$

unde tres reliquae radices eiusdem aequationis erunt

$$x = \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}\sqrt[4]{v^3},$$

$$x = \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}\sqrt[4]{v^3},$$

$$x = \mathfrak{A}\mathfrak{c}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{a}\sqrt[4]{v^3}.$$

27. Hinc autem vicissim aequatio biquadrata quaecumque ad illam formam reduci eiusque radices assignari poterunt. Sit enim proposita haec aequatio

$$x^4 = Axx + Bx + C$$

et quaeri oportet valores coefficientium $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ cum quantitate v, quibus inventis simul huius aequationis radices innotescent. Erit autem

$$A = 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})v,$$

$$B = 4(\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\mathfrak{B}v,$$

$$C = \mathfrak{A}^4 v - \mathfrak{B}^4 vv + \mathfrak{C}^4 v^3 + 4\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv - 2\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{C}vv$$

seu

$$C = (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)^2 v - (\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2 vv + 8\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv.$$

Illinc autem est

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})v = \frac{1}{2}A$$

et

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v = \frac{B}{4\mathfrak{B}v},$$

qui valores hic substituti dant

$$C = \frac{BB}{16\mathfrak{B}\mathfrak{B}v} - \frac{1}{4}AA + 8\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv.$$

Prima autem formula praebet $4\mathfrak{A}\mathfrak{C}v = A - 2\mathfrak{B}\mathfrak{B}v$, qui valor denuo substitutus dat

$$C = \frac{BB}{16\mathfrak{B}\mathfrak{B}v} - \frac{1}{4}AA + 2A\mathfrak{B}\mathfrak{B}v - 4\mathfrak{B}^4vv,$$

ita ut iam duae litterae $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ sint eliminatae.

28. Quia hic adhuc duae incognitae $\mathfrak{B}$ et v supersunt, valor ipsius $\mathfrak{B}$ arbitrio nostro relinquitur. Sit igitur $\mathfrak{B} = 1$ et quantitas v ex sequenti aequatione cubica determinari debebit

$$v^3 - \tfrac{1}{2}Av^2 + \tfrac{1}{4}(C + \tfrac{1}{4}AA)v - \tfrac{1}{64}BB = 0.$$

Inventa autem hinc radice v ex prioribus aequationibus quaeri debent litterae $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$. Cum igitur sit

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v = \frac{B}{4v} \quad \text{et} \quad 2\mathfrak{A}\mathfrak{C}\sqrt{v} = \frac{A - 2v}{2\sqrt{v}},$$

erit tam addendo quam subtrahendo et radicem quadratam extrahendo

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\sqrt{v} = \sqrt{\left(\frac{B}{4v} + \frac{A}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}\right)}$$

et

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{C}\sqrt{v} = \sqrt{\left(\frac{B}{4v} - \frac{A}{2\sqrt{v}} + \sqrt{v}\right)},$$

unde reperietur

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\sqrt{v}}\sqrt{(B + 2A\sqrt{v} - 4v\sqrt{v})} + \frac{1}{4\sqrt{v}}\sqrt{(B - 2A\sqrt{v} + 4v\sqrt{v})}$$

et

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{4\sqrt{v}}\sqrt{(B + 2A\sqrt{v} - 4v\sqrt{v})} - \frac{1}{4\sqrt{v}}\sqrt{(B - 2A\sqrt{v} + 4v\sqrt{v})}.$$

29. Cum sit

$$\mathfrak{A}\sqrt[4]{v} \pm \mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3} = (\mathfrak{A} \pm \mathfrak{C}\sqrt{v})\sqrt[4]{v},$$

erunt aequationis propositae

$$x^4 = Axx + Bx + C,$$

postquam valor v inventus fuerit ex aequatione

$$v^3 - \tfrac{1}{2}Av^2 + \tfrac{1}{4}(C + \tfrac{1}{4}AA)v - \tfrac{1}{64}BB = 0,$$

quatuor radices

$$\text{I.} \quad x = \sqrt{v} + \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)},$$

$$\text{II.} \quad x = \sqrt{v} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)},$$

$$\text{III.} \quad x = -\sqrt{v} + \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(-B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)},$$

$$\text{IV.} \quad x = -\sqrt{v} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(-B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}.$$

Hocque modo, ut constat, resolutio aequationis biquadraticae ad resolutionem aequationis cubicae reducitur.

IV. RESOLUTIO AEQUATIONUM QUINTI GRADUS

30. Posito $n = 5$ erit forma nostra radicis

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{vv} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{v^4}$$

ac primo quaeri debet aequatio quinti gradus, cuius haec futura sit radix, seu, quod eodem redit, ex hac forma signa radicalia eliminari oportet. In hoc autem ipso summa occurrit difficultas, cum operatio haec eliminationis neutiquam eo modo, quo in aequationibus quarti gradus sum usus, institui queat. Manifestum quidem est, quia omnes potestates ipsius x eadem signa radicalia involvunt, si aequatio quaesita fingatur

$$x^5 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

tum substituendo pro x valorem assumtum quatuor obtineri aequationes, quarum ope quaterna signa radicalia eliminari liceat; sed tum litterae hae assumtae A, B, C et D singulae difficillime determinabuntur.

31. His difficultatibus perpensis in alium incidi modum hanc operationem instituendi, qui ita est comparatus, ut ad omnes radicum formas, cuiuscumque sint gradus, aeque pateat, et ex quo simul perspicietur aequationem rationalem

numquam ultra gradum, qui exponente n indicatur, esse ascensuram. Hic autem modus innititur ipsi naturae aequationum, qua singulorum terminorum coefficientes ex omnibus radicibus definiuntur. Cum igitur omnes quinque radices aequationis, quam quaerimus, constent, ex iis quoque coefficientes singulorum terminorum eius formari possunt per regulas cognitas. Sint igitur $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ quinque radices surdesolidae unitatis seu radices huius aequationis $z^5 - 1 = 0$ ac ponendo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ pro radicibus aequationis, quam quaerimus, erit

$$\alpha = \mathfrak{A} \sqrt[5]{v} + \mathfrak{B} \sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C} \sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D} \sqrt[5]{v^4},$$

$$\beta = \mathfrak{A}\mathfrak{a} \sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{a}^2 \sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{a}^3 \sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{a}^4 \sqrt[5]{v^4},$$

$$\gamma = \mathfrak{A}\mathfrak{b} \sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}^2 \sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^3 \sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^4 \sqrt[5]{v^4},$$

$$\delta = \mathfrak{A}\mathfrak{c} \sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{c}^2 \sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}^3 \sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{c}^4 \sqrt[5]{v^4},$$

$$\varepsilon = \mathfrak{A}\mathfrak{d} \sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{d}^2 \sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{d}^3 \sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{d}^4 \sqrt[5]{v^4}.$$

32. His quinque radicibus expositis si aequatio quinti gradus has radices habens statuatur

$$x^5 - \triangle x^4 + Ax^3 - Bx^3 + Cx - D = 0,$$

hi coefficientes ex radicibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ita definiuntur, ut sit

$\triangle$ = summae radicum,
A = summae productorum ex binis,
B = summae productorum ex ternis,
C = summae productorum ex quaternis,
D = producto ex omnibus quinis.

Quo autem hos valores facilius colligere queamus, eos ex summis potestatum radicum concludamus. Sit igitur

$$P = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon,$$

$$Q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2,$$

$$R = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3,$$

$$S = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \varepsilon^4,$$

$$T = \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \varepsilon^5.$$

His enim valoribus definitis erit, uti novimus[1]),

$$\triangle = P,$$

$$A = \frac{\triangle P - Q}{2},$$

$$B = \frac{AP - \triangle Q + R}{3},$$

$$C = \frac{BP - AQ + \triangle R - S}{4},$$

$$D = \frac{CP - BQ + AR - \triangle S + T}{5}.$$

33. Iam ad valores P, Q, R, S, T investigandos debemus prius radicum unitatis 1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ omnes potestates in unam summam redigere; quae cum sint radices aequationis $z^5 - 1 = 0$, erit

$$1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = 0,$$

$$1 + \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 + \mathfrak{d}^2 = 0,$$

$$1 + \mathfrak{a}^3 + \mathfrak{b}^3 + \mathfrak{c}^3 + \mathfrak{d}^3 = 0,$$

$$1 + \mathfrak{a}^4 + \mathfrak{b}^4 + \mathfrak{c}^4 + \mathfrak{d}^4 = 0,$$

$$1 + \mathfrak{a}^5 + \mathfrak{b}^5 + \mathfrak{c}^5 + \mathfrak{d}^5 = 5.$$

Summae potestatum sextarum, septimarum etc. usque ad decimas iterum evanescunt, at decimarum summa iterum fit $= 5$, cum sit $\mathfrak{a}^5 = 1$, $\mathfrak{b}^5 = 1$, $\mathfrak{c}^5 = 1$ et $\mathfrak{d}^5 = 1$. Brevitatis gratia in hoc calculo poterimus signa radicalia plane omittere, dummodo deinceps recordemur cum litteris $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ coniungenda esse $\sqrt[5]{v}$, $\sqrt[5]{v^2}$, $\sqrt[5]{v^3}$, $\sqrt[5]{v^4}$.

34. Nunc igitur addendis radicibus α, β, γ, δ, ε habebimus

$$P = \mathfrak{A}(1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d}) + \mathfrak{B}(1 + \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 + \mathfrak{d}^2) + \text{etc.} = 0.$$

Reliquis autem potestatibus sumendis eliciemus insuper

1) Vide Commentationem 153 huius voluminis. F. R.

$$
\begin{aligned}
P &= 0,\\
Q &= 10(\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}),\\
R &= 15(\mathfrak{A}^2\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{D}),\\
S &= 20(\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3 + \mathfrak{B}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^3) + 30(\mathfrak{A}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2) + 120\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D},\\
T &= 5(\mathfrak{A}^5 + \mathfrak{B}^5 + \mathfrak{C}^5 + \mathfrak{D}^5) + 100(\mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^3\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^3)\\
&\quad + 150(\mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}).
\end{aligned}
$$

Hic alia producta non occurrunt, nisi quae adiungendis signis radicalibus potestatem ipsius v rationalem producunt; seu si litterae $\mathfrak{A}$ unam dimensionem tribuamus, litterae $\mathfrak{B}$ duas, litterae $\mathfrak{C}$ tres et litterae $\mathfrak{D}$ quatuor, in omnibus his productis numerus dimensionum est per 5 divisibilis, coefficiens autem cuiusvis producti est quintuplum eius coefficientis, qui eidem producto ex lege combinationum competit.

35. Cum igitur sit $P = 0$, erit quoque $\triangle = 0$ et pro reliquis coefficientibus habebimus

$$A = -\tfrac{1}{2}Q,\quad B = \tfrac{1}{3}R,\quad C = -\tfrac{1}{4}AQ - \tfrac{1}{4}S \text{ et } D = -\tfrac{1}{5}BQ + \tfrac{1}{5}AR + \tfrac{1}{5}T.$$

Hinc ergo erit

$$
\begin{aligned}
A &= -5(\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}),\\
B &= 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{D}),\\
C &= -5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3 + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^3) + 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2) - 5\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D},\\
D &= \mathfrak{A}^5 + \mathfrak{B}^5 + \mathfrak{C}^5 + \mathfrak{D}^5 - 5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^3\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^3)\\
&\quad + 5(\mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}),
\end{aligned}
$$

cum quibus terminis iam debitae potestates ipsius v coniungi debent, ut obtineantur eorum iusti valores.

36. Quodsi ergo mutatis signis coefficientium A et C proponatur haec aequatio

$$x^5 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

cuius coefficientes hos teneant valores

$$A = 5(\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C})v,$$

$$B = 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 v + \mathfrak{C}^2\mathfrak{D}v)v,$$

$$C = 5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^3\mathfrak{D}v + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3 v + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^3 vv)v - 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2)v^2 + 5\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}v^2,$$

$$D = \mathfrak{A}^5 v + \mathfrak{B}^5 v^2 + \mathfrak{C}^5 v^3 + \mathfrak{D}^5 v^4 - 5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^3\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}^3\mathfrak{D}v + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^3 v)v^2$$
$$+ 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{D} + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{D}^2 v + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 v)v^2,$$

erunt eius quinque radices

$$\text{I.}\quad x = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{v^4},$$

$$\text{II.}\quad x = \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{a}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{a}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{a}^4\sqrt[5]{v^4},$$

$$\text{III.}\quad x = \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^4\sqrt[5]{v^4},$$

$$\text{IV.}\quad x = \mathfrak{A}\mathfrak{c}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{c}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{c}^4\sqrt[5]{v^4},$$

$$\text{V.}\quad x = \mathfrak{A}\mathfrak{d}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{d}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{d}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{d}^4\sqrt[5]{v^4}$$

existentibus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ praeter unitatem reliquis quatuor radicibus surdesolidis unitatis, quarum valores imaginarii constant.

37. Si nunc vicissim ex datis coefficientibus A, B, C, D definiri possent quantitates $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ cum littera v, haberetur resolutio generalis omnium aequationum quinti gradus. Verum in hoc ipso summa difficultas consistit, cum nulla via pateat litteras $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, quarum quidem unam pro lubitu assumere licet, successive ita eliminandi, ut aequatio solum incognitam v cum datis A, B, C, D involvens resultet, quae quidem nullas radices superfluas complectatur. Satis tuto autem suspicari licet, si haec eliminatio rite administretur, tandem ad aequationem quarti gradus perveniri posse, qua valor ipsius v definiatur. Si enim aequatio altioris gradus prodiret, tum quoque valor ipsius v signa radicalia eiusdem gradus implicaret, quod absurdum videtur. Quoniam autem multitudo terminorum hunc laborem tam difficilem reddit, ut ne tentari quidem cum aliquo successu queat, haud abs re erit casus quosdam minus generales evolvere, qui non ad formulas tantopere complicatas deducant.

38. Ad casus ergo particulares descensuri tribuamus litteris $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ eiusmodi valores, quibus calculus in compendium reducatur; ac primo quidem sint $\mathfrak{B}=0$, $\mathfrak{C}=0$ et $\mathfrak{D}=0$, unde nanciscemur

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0 \quad \text{et} \quad D=\mathfrak{A}^5 v.$$

Hinc igitur fit

$$\mathfrak{A}\sqrt[5]{v}=\sqrt[5]{D}.$$

Quare si haec proposita fuerit aequatio

$$x^5=D,$$

erunt huius aequationis quinque radices

$$\text{I. } x=\sqrt[5]{D}, \quad \text{II. } x=\mathfrak{a}\sqrt[5]{D}, \quad \text{III. } x=\mathfrak{b}\sqrt[5]{D}, \quad \text{IV. } x=\mathfrak{c}\sqrt[5]{D}, \quad \text{V. } x=\mathfrak{d}\sqrt[5]{D};$$

qui casus cum per se sit manifestus, ab eo exordium capere visum est, ut pateat, quomodo nostra methodus casus cognitos in se complectatur.

39. Evanescant iam duae litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$; si enim tres evanescentes ponantur, quaecumque eae sumantur, semper ad casum praecedentem deducimur. Sint igitur $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ nihilo aequales seu aequatio quaeratur, cuius radix sit futura

$$x=\mathfrak{A}\sqrt[5]{v}+\mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2},$$

atque obtinebimus

$$A=0, \quad B=5\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 v, \quad C=5\mathfrak{A}^3\mathfrak{B}v, \quad D=\mathfrak{A}^5 v+\mathfrak{B}^5 v^2,$$

unde proposita radix conveniet huic aequationi

$$x^5=5\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 vx^2+5\mathfrak{A}^3\mathfrak{B}vx+\mathfrak{A}^5 v+\mathfrak{B}^5 v^2.$$

Quae aequatio si comparetur cum hac forma

$$x^5=5Pxx+5Qx+R,$$

erit

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 v=P, \quad \mathfrak{A}^3\mathfrak{B}v=Q,$$

unde deducitur

$$\mathfrak{A}^5 v=\frac{QQ}{P} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}^5 v^2=\frac{P^3}{Q},$$

ita ut sit

$$R=\frac{QQ}{P}+\frac{P^3}{Q}.$$

40. Hinc ergo deducimur ad resolutionem huius aequationis specialis quinti gradus

$$x^5 = 5Pxx + 5Qx + \frac{QQ}{P} + \frac{P^3}{Q},$$

cuius ob $\mathfrak{A}\sqrt[5]{v} = \sqrt[5]{\frac{QQ}{P}}$ et $\mathfrak{B}\sqrt[5]{vv} = \sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$ quinque radices erunt

$$\text{I.} \quad x = \sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}},$$

$$\text{II.} \quad x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{a}^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}},$$

$$\text{III.} \quad x = \mathfrak{b}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{b}^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}},$$

$$\text{IV.} \quad x = \mathfrak{c}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{c}^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}},$$

$$\text{V.} \quad x = \mathfrak{d}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{d}^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}.$$

Aequatio autem haec non multum absimilis est formulae MOIVREANAE, et quia se in factores resolvi non patitur, eius resolutio hic tradita eo magis notari meretur.

41. Hanc aequationem a fractionibus liberare poterimus, si ponamus

$$P = MN \quad \text{et} \quad Q = M^2N;$$

tum enim habebitur

$$x^5 = 5MNxx + 5M^2Nx + M^3N + MN^2,$$

cuius radix erit

$$x = \sqrt[5]{M^3N} + \sqrt[5]{MN^2},$$

et si $\mathfrak{a}$ quamlibet aliam radicem surdesolidam unitatis denotet, erit huius aequationis quaelibet alia radix

$$x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{M^3N} + \mathfrak{a}^2\sqrt[5]{MN^2}.$$

Ita si exempli gratia statuatur $M = 1$ et $N = 2$, huius aequationis

$$x^5 = 10xx + 10x + 6$$

radix quaecumque est

$$x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{2} + \mathfrak{a}^2\sqrt[5]{4};$$

haecque aequatio ita est comparata, ut per nullam methodum cognitam resolvi posse videatur.

42. Si $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{D}$ sint nihilo aequales, ad eundem casum revolvimur. Fiet enim

$$A = 0, \quad B = 5\mathfrak{A}^2\mathfrak{C}v, \quad C = 5\mathfrak{A}\mathfrak{C}^3vv \quad \text{et} \quad D = \mathfrak{A}^5v + \mathfrak{C}^5v^3;$$

unde si statuatur haec aequatio

$$x^5 = 5Pxx + 5Qx + R,$$

ut sit

$$P = \mathfrak{A}^2\mathfrak{C}v \quad \text{et} \quad Q = \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3vv,$$

erit

$$\frac{QQ}{P} = \mathfrak{C}^5v^3 \quad \text{et} \quad \frac{P^3}{Q} = \mathfrak{A}^5v$$

hincque fit ut ante

$$R = \frac{QQ}{P} + \frac{P^3}{Q}$$

atque etiam eaedem reperiuntur radices. Eadem porro etiam aequatio reperitur, sive ponatur $\mathfrak{A} = 0$ et $\mathfrak{B} = 0$ sive $\mathfrak{A} = 0$ et $\mathfrak{C} = 0$. Sin autem vel $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{D}$ vel $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ evanescere assumantur, utrimque quidem eadem prodit aequatio, sed diversa a praecedentibus casibus, quam ideo evolvere conveniet.

43. Sit igitur et $\mathfrak{B} = 0$ et $\mathfrak{C} = 0$ atque hinc consequemur sequentes valores

$$A = 5\mathfrak{A}\mathfrak{D}v, \quad B = 0, \quad C = -5\mathfrak{A}^2\mathfrak{D}^2v^2 \quad \text{et} \quad D = \mathfrak{A}^5v + \mathfrak{D}^5v^4.$$

Unde si statuamus $\mathfrak{A}\mathfrak{D}v = P$, erit

$$A = 5P \quad \text{et} \quad C = -5PP;$$

tum vero erit

$$DD - 4P^5 = (\mathfrak{A}^5v - \mathfrak{D}^5v^4)^2 \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}^5v - \mathfrak{D}^5v^4 = \sqrt{(DD - 4P^5)}$$

ideoque

$$\mathfrak{A}^5v = \tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}\sqrt{(DD - 4P^5)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}^5v^4 = \tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}\sqrt{(DD - 4P^5)}.$$

Hinc si proposita sit haec aequatio

$$x^5 = 5Px^3 - 5PPx + D,$$

quaelibet eius radicum est

$$x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{\left(\tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}\sqrt{(DD - 4P^5)}\right)} + \mathfrak{a}^4\sqrt[5]{\left(\tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}\sqrt{(DD - 4P^5)}\right)}$$

atque haec est ipsa illa aequatio, cuius resolutionem Cel. MOIVREUS[1]) docuit.

44. Possunt autem ex forma generali innumerabiles deduci aequationes quinti ordinis, quarum radices assignare licet, etiamsi ipsae illae aequationes in factores resolvi nequeant. Proposita enim aequatione quinti gradus

$$x^5 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

cuius coefficientes habeant sequentes valores[2])

$$A = \frac{5}{gk}(g^3 + k^3),$$

$$B = \frac{5}{mnr}\left((m+n)(m^2g^3 - n^2k^3) - (m-n)rr\right),$$

---

1) MOIVREI aequatio $5y + 20y^3 + 16y^5 = 4$ (vide dissertationem nota p. 8 laudatam) nascitur ex EULERI aequatione $x^5 = 5Px^3 - 5P^2x + D$ ponendo $P = -\frac{1}{4}$, $D = \frac{1}{4}$. Tum vero invenitur radix

$$y = \frac{1}{2}\sqrt[5]{(4 + \sqrt{17})} + \frac{1}{2}\sqrt[5]{(4 - \sqrt{17})} = \frac{1}{2}\sqrt[5]{(\sqrt{17} + 4)} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt[5]{(\sqrt{17} + 4)}},$$

quae est ipsa resolutio MOIVREANA. F. R.

2) In editione principe coefficientes sequentes B et D ita se habent:

$$B = \frac{5}{2mnrr}\left((m+n)(m^2g^3 - n^2k^3) - (m-n)rr\right),$$

$$D = \frac{gg}{mmnk^4g^3}\left((m^2g^3 - nnk^3)^3 - (m^2g^3 - n^2k^3)(m^2g^3 + rn^2k^3) - n^2k^3r^4\right)$$
$$+ \frac{kk}{mnng^4r^3}\left(m^2g^3r^2(m^2g^3 - n^2k^3) - (2m^2g^3 + n^2k^3)r^4 + r^6\right)$$
$$+ \frac{5(m-n)(g^3 - k^3)(m^2g^3 - n^2k^3)}{2mngkrr} - \frac{5(m+n)(g^3k^3)}{2mngk}.$$

Correxit F. R.

$$C=\frac{5}{mnggkkrr}\Big(g^3(m^2g^3-n^2k^3)^2-\big(m(m+n)g^6-(m^2+mn-n^2)g^3k^3+n(m-n)k^6\big)rr-k^3r^4\Big),$$

$$\begin{aligned}D=&\frac{gg}{mmnk^4r^3}\Big((m^2g^3-n^2k^3)^3-(m^2g^3-n^2k^3)(m^2g^3+2n^2k^3)rr-n^2k^3r^4\Big)\\&+\frac{kk}{mnng^4r}\Big(m^2g^3(m^2g^3-n^2k^3)-(2m^2g^3+n^2k^3)r^2+r^4\Big)\\&+\frac{5(m-n)(g^3-k^3)(m^2g^3-n^2k^3)}{mngkr}-\frac{5(m+n)(g^3-k^3)r}{mngk},\end{aligned}$$

eius radices semper assignari possunt.

45. Ponatur enim brevitatis gratia

$$T=(m^2g^3-n^2k^3)^2-2(m^2g^3+n^2k^3)rr+r^4$$

sitque [1])

$$\left.\begin{matrix}P\\Q\end{matrix}\right\}=\frac{(m^2g^3-n^2k^3)^3-(m^2g^3-n^2k^3)(m^2g^3+2n^2k^3)rr-n^2k^3r^4\pm\big((m^2g^3-n^2k^3)^2-n^2k^3rr\big)\sqrt{T}}{2mmnr^3},$$

$$\left.\begin{matrix}R\\S\end{matrix}\right\}=\frac{(m^2g^3-n^2k^3)m^2g^3-(2m^2g^3+n^2k^3)rr+r^4\pm(m^2g^3-rr)\sqrt{T}}{2mnnr},$$

ubi signa superiora pro valoribus P et R, inferiora pro Q et S valent, ac quaelibet radix aequationis erit

$$x=\mathfrak{a}\sqrt[5]{\frac{gg}{k^4}P}+\mathfrak{a}^2\sqrt[5]{\frac{kk}{g^4}R}+\mathfrak{a}^3\sqrt[5]{\frac{kk}{g^4}S}+\mathfrak{a}^4\sqrt[5]{\frac{gg}{k^4}Q}.$$

46. Ut rem exemplis illustremus, ex his formis sequentia formari possunt:

I. Aequationis

$$x^5=40x^3+70xx-50x-98$$

radix est

$$\begin{aligned}x=&\sqrt[5]{(-31+3\sqrt{-7})}+\sqrt[5]{(-18+10\sqrt{-7})}+\sqrt[5]{(-18-10\sqrt{-7})}\\&+\sqrt[5]{(-31-3\sqrt{-7})}.\end{aligned}$$

---

1) Editio princeps:

$$\left.\begin{matrix}P\\Q\end{matrix}\right\}=\frac{(m^2g^3-n^2k^3)^3-(m^2g^3-n^2k^3)(m^2g^3+2n^2k^3)rr-n^2k^3r^4\pm\big((m^2g^3-n^2k^3)^2-n^2k^3rr\big)\sqrt{T}}{2mnnr}.$$

Correxit F. R.

II. Aequationis[1])

$$x^5 = 2625x + 61500$$

radix est

$$x = \sqrt[5]{75(5+4\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35+11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35-11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{75(5-4\sqrt{10})},$$

quae eo magis sunt notatu digna, quod hae aequationes nullo alio modo resolvi possunt.

Simili autem modo huiusmodi investigationes ad aequationes altiorum graduum extendi possunt facileque erit ex quovis gradu innumerabiles aequationes per alias methodos irresolubiles exhibere, quarum huius methodi ope non solum una, sed omnes plane radices exhiberi queant.

---

1) In editione principe proposita est aequatio $x^5 = 2625x + 16600$. Radix autem exhibita ad aequationem $x^5 = 2625x + 61500$ pertinet. F. R.

NOUVELLE METHODE D'ELIMINER LES QUANTITES INCONNUES DES EQUATIONS

Commentatio 310 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [20] (1764), 1766, p. 91—104

1. Quand, pour résoudre un probleme, on est obligé d'introduire dans le calcul plusieurs quantités inconnues, la solution conduit aussi à plusieurs équations, d'où il faut ensuite chercher la valeur de chacune de ces quantités inconnues. Cela se pratique par le moyen de l'élimination; on commence par une des quantités inconnues en regardant les autres comme connues; et on en cherche la valeur en y employant une ou plusieurs des équations trouvées, pour en tirer cette valeur exprimée par une formule rationnelle, et aussi simple, qu'on pourra. Alors on substitue cette valeur dans les autres équations, et par ce moyen tant le nombre des inconnues que des équations deviendra d'une unité plus petit. De la même maniere on élimine ensuite une autre inconnue, et on continue ces opérations jusqu'à ce qu'il ne reste dans le calcul qu'une seule équation, dont la résolution fournira la solution du probleme.

2. Or, ayant plusieurs équations, dont chacune contient la quantité inconnue qu'on veut éliminer, on voit d'abord, qu'on n'en pourroit prendre qu'une seule pour en chercher la valeur de cette inconnue, qui, étant substituée dans les autres équations, rendroit déjà tant le nombre des inconnues que des équations d'une unité plus petit. Cette voye est aussi fort propre, si l'inconnue à éliminer ne contient pas plus d'une dimension dans l'équation qu'on aura choisie pour en tirer sa valeur. Mais, si l'inconnue y montoit à

deux ou plusieurs dimensions, on ne seroit pas souvent en état d'en trouver la valeur; et, si on l'étoit, sa valeur irrationnelle qu'on obtiendroit, conduiroit à des calculs extrèmement embarassans, qui rendroient la solution souvent impraticable.

3. Donc, lorsqu'il ne se trouve aucune équation, où l'inconnue qu'on veut éliminer, n'ait qu'une seule dimension, il en faut choisir deux pour en tirer la valeur. Car il est démontré, à combien de dimensions que puisse monter l'inconnue en deux équations, qu'il est toujours possible d'y abaisser successivement les dimensions, et cela jusques à ce qu'on parvienne à une équation qui ne renferme plus du tout cette inconnue. Par la même maniere, en combinant deux autres équations, on en tirera une nouvelle, qui ne contiendra plus cette inconnue; et ainsi on formera autant d'équations dégagées de cette inconnue, qu'il faudra, pour en éliminer par une semblable méthode les autres inconnues, jusqu'à ce qu'on parviendra à une seule équation, qui fournira la solution du probleme proposé.

4. La méthode d'éliminer se réduit donc au cas de deux équations qui contiennent toutes les deux la quantité qu'on se propose d'éliminer; et tout l'ouvrage revient à ce qu'on en trouve une équation, qui ne contienne plus cette quantité. On voit bien que l'opération pour parvenir à ce but, deviendra d'autant plus difficile que les dimensions auxquelles monte la quantité qu'on veut éliminer, dans ces deux équations, seront plus hautes, à moins qu'une circonstance toute particuliere ne diminue le travail. Et afin qu'on ne soit pas obligé de faire cette opération pour chaque cas proposé, on trouve dans *l'Arithmétique Universelle* de Mr. NEWTON[1]) des formules propres à ce dessein, à l'aide desquelles l'élimination se peut faire aisément, quand même la quantité à éliminer monteroit, dans les deux équations, jusqu'à quatre dimensions. Car Mr. NEWTON ayant pris deux équations générales qui ne surpassent pas ce degré, il rapporte l'équation, qui résulte après l'élimination, de sorte qu'on n'a besoin que d'en faire l'application pour chaque cas proposé. Avant que d'expliquer ma nouvelle méthode, il sera à propos de donner une idée de celle dont Mr. NEWTON paroît s'être servi.

---

1) I. NEWTON, *Arithmetica universalis*, 3. ed. (voir la note p. 21), p. 57—63. F. R.

5. Je commencerai par deux équations, où la quantité à éliminer, qui soit z, ne monte qu'à une dimension, lesquelles soient

$$A + Bz = 0$$

et

$$a + bz = 0,$$

afin qu'on voye mieux, comment les opérations se multiplient en passant à de plus hautes équations. Or d'abord, il est clair qu'on n'a qu'à multiplier la premiere équation par b et l'autre par B; car soustrayant ce produit de celui-là, on aura

$$Ab - Ba = 0,$$

qui est l'équation qui résulte par l'élimination de la quantité z. On pourroit aussi multiplier la premiere par a et l'autre par A, afin qu'après la soustraction de l'une de l'autre les termes constans se détruisent; et alors on aura

$$Baz - Abz = 0,$$

qui, étant divisée par z, donne comme auparavant

$$Ba - Ab = 0 \quad \text{ou} \quad Ab - Ba = 0.$$

6. Soient maintenant proposées les deux équations suivantes, où la quantité à éliminer z monte à deux dimensions,

$$A + Bz + Czz = 0$$

et

$$a + bz + czz = 0.$$

Qu'on multiplie la premiere par c et l'autre par C, et la différence sera

$$Ac - Ca + (Bc - Cb)z = 0.$$

Ensuite, qu'on multiplie la premiere par a et l'autre par A, et la différence, étant divisée par z, sera

$$Ba - Ab + (Ca - Ac)z = 0.$$

Maintenant, ayant deux équations, où la quantité z ne monte qu'à une dimension, ce cas est réduit au précédent; et partant l'élimination se fera

par la formule trouvée ci dessus, et donnera

$$(Ac - Ca)(Ca - Ac) - (Bc - Cb)(Ba - Ab) = 0$$

ou bien en changeant les signes

$$AAcc - 2ACac + CCaa + BBac - ABbc - BCab + ACbb = 0.$$

7. Si les deux équations proposées sont cubiques

$$A + Bz + Czz + Dz^3 = 0$$

et

$$a + bz + czz + dz^3 = 0,$$

multipliant la premiere par d et l'autre par D, leur différence sera

$$Ad - Da + (Bd - Db)z + (Cd - Dc)zz = 0.$$

Or multipliant la premiere par a et l'autre par A, la différence, étant divisée par z, donnera

$$Ba - Ab + (Ca - Ac)z + (Da - Ad)zz = 0.$$

Nous voilà donc parvenus à deux équations quarrées, d'où l'on éliminera la quantité z par le § précédent. De la même maniere, si les deux équations proposées sont du quatrieme degré, on les réduira à deux équations cubiques; et en général, de quelque degré que soient les deux premieres équations, on les réduira à deux équations d'un degré plus basses. Continuant donc cette réduction, on parviendra enfin nécessairement à une équation, qui ne contiendra plus la quantité z.

8. Pour rendre cette élimination plus aisée pour les deux équations cubiques

$$A + Bz + Czz + Dz^3 = 0$$

et

$$a + bz + czz + dz^3 = 0,$$

on fera les substitutions suivantes

$$Ad - Da = A', \qquad aB - bA = a',$$

$$Bd - Db = B', \qquad aC - cA = b',$$

$$Cd - Dc = C', \qquad aD - dA = c',$$

et les équations quarrées seront

$$A' + B'z + C'zz = 0$$

et

$$a' + b'z + c'zz = 0.$$

Alors, qu'on pose de plus

$$A'c' - C'a' = A'', \qquad a'B' - b'A' = a'',$$
$$B'c' - C'b' = B'', \qquad a'C' - c'A' = b'',$$

pour avoir ces deux équations simples

$$A'' + B''z = 0$$

et

$$a'' + b''z = 0,$$

et l'équation cherchée, qui ne contiendra plus z, sera

$$A''b'' - B''a'' = 0.$$

9. Si nous comptons le nombre des lettres A, B, C, D, a, b, c, d, qui se trouvent multipliées ensemble en chaque terme, nous voyons, que les expressions marquées par A', B', C', a', b', c', en contiennent deux dimensions et partant les lettres A'', B'', a'', b'' en contiendront quatre, de sorte que la derniere équation $A''b'' - B''a'' = 0$ sera de 8 dimensions, ou chaque terme sera composé de 8 lettres. Or, en développant cette équation, on trouve, qu'elle est divisible par $Ad - Da$, de sorte qu'elle ne sera que de 6 dimensions, savoir

$$\begin{aligned}(Ad - Da)^3 + (Ac - Ca)^2(Cd - Dc) - 2(Ab - Ba)(Ad - Da)(Cd - Dc)\\ + (Bd - Db)^2(Ab - Ba) - (Ab - Ba)(Bc - Cb)(Cd - Dc)\\ - (Ad - Da)(Ac - Ca)(Bd - Db) = 0.\end{aligned}$$

Si les deux équations proposées sont du quatrieme degré, cette méthode conduira à une équation de 16 dimensions, mais qui se réduira à 8 dimensions, étant divisible par une formule de 8 dimensions; et ainsi de suite.

10. On voit donc que cette méthode conduit souvent à des équations trop compliquées, qui renferment des facteurs tout à fait inutiles pour le dessein qu'on a en vue. Car dans le cas des équations cubiques, il est évident

que le facteur $Ad - Da$ ne satisfait point à la question, puisque l'élimination ne sauroit conduire à cette équation $Ad - Da = 0$. Donc, tant que ce facteur est contenu dans l'équation finale, on ne la peut regarder comme juste; puisqu'une équation de plusieurs dimensions ne fournit pas une solution juste d'un probleme, à moins que toutes ses racines ne remplissent les conditions du probleme. Car, ne sachant point discerner les racines fausses des véritables, on risque de tomber dans une solution tout à fait fausse. Ainsi, quoique les équations auxquelles on parvient en suivant cette méthode, contiennent la solution véritable, elles contiennent aussi souvent des solutions fausses; ce qui est un défaut très considérable.

11. Cette circonstance m'a donné occasion de chercher une autre méthode d'éliminer, qui étant délivrée de ce défaut soit en même tems tellement fondée sur la nature des équations, qu'on puisse comprendre plus clairement la raison de toutes les opérations qu'on est obligé de faire. Or d'abord, l'idée de l'élimination ne paroissant pas asses précise, je commencerai par mieux développer cette idée et par déterminer plus exactement, à quoi se réduit la question. Car, dès que nous nous serons formé une idée juste du sujet auquel aboutit l'élimination, nous verrons d'abord, quelles opérations on sera obligé d'entreprendre pour arriver à ce but. De plus, on se trouvera en état de donner à cette recherche une plus grande étendue et de l'appliquer à plusieurs autres questions, qui peuvent être utiles dans l'Analyse et dans la Théorie des lignes courbes.

12. Pour rendre le raisonnement plus intelligible, je ne considérerai d'abord qu'un cas particulier, où la quantité à éliminer z monte dans une équation au troisieme degré et dans l'autre au second. Soient donc ces deux équations

$$zz + Pz + Q = 0$$

et

$$z^3 + pzz + qz + r = 0,$$

où les lettres P, Q, p, q, r renferment les autres quantités inconnues. Et on veut savoir le rapport, qui subsistera entre ces autres inconnues, après qu'on aura éliminé la quantité z. Ce rapport sera contenu dans une équation, à laquelle on parvient en éliminant z; et cette équation contiendra les lettres

P, Q, p, q, r et déterminera par conséquent leur relation mutuelle, afin que les deux équations proposées puissent subsister. Mais, pour que ces deux équations puissent subsister à la fois, il faut qu'il y ait une certaine valeur, qui étant mise pour z, fasse évanouir tant cette formule

$$zz + Pz + Q$$

que l'autre

$$z^3 + pzz + qz + r,$$

c'est à dire, il faut que les deux équations proposées ayent une racine commune, qui convienne également à l'une et à l'autre.

13. Voilà donc à quoi se réduit l'élimination de la quantité z: c'est de déterminer un tel rapport entre les coefficiens ou les quantités P, Q, p, q, r, afin que les deux équations proposées obtiennent une racine commune. Soit ω la valeur de cette racine commune et $z - \omega$ sera un facteur de l'une et de l'autre, de sorte qu'on pourra mettre

$$zz + Pz + Q = (z - \omega)(z + \mathfrak{A}),$$
$$z^3 + pzz + qz + r = (z - \omega)(zz + \mathfrak{a}z + \mathfrak{b}),$$

et de là il est clair qu'il doit y avoir

$$(zz + Pz + Q)(zz + \mathfrak{a}z + \mathfrak{b}) = (z^3 + pzz + qz + r)(z + \mathfrak{A}).$$

Or, en égalant ces deux produits, on aura quatre égalités

$$\text{I. } P + \mathfrak{a} = p + \mathfrak{A}, \qquad \text{II. } Q + P\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = q + p\mathfrak{A},$$
$$\text{III. } P\mathfrak{b} + Q\mathfrak{a} = q\mathfrak{A} + r, \qquad \text{IV. } Q\mathfrak{b} = r\mathfrak{A},$$

d'où l'on déterminera aisément les trois nouvelles $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, et ensuite on obtiendra l'équation cherchée, qui contient la relation requise entre les coefficiens P, Q, p, q, r, ou qui sera celle qu'on trouveroit par l'élimination de z.

14. Cette détermination se fera sans aucun obstacle, puisqu'on n'aura à résoudre que des équations simples. Car la premiere égalité donne

$$\mathfrak{A} = P - p + \mathfrak{a}$$

et la seconde

$$\mathfrak{b} = q + p\mathfrak{A} - Q - P\mathfrak{a},$$

ou bien

$$\mathfrak{b} = q + Pp - pp + p\mathfrak{a} - Q - P\mathfrak{a};$$

et ces valeurs, étant substituées dans la troisieme égalité, donnent

$$Pq + PPp - Ppp - PQ + P(p-P)\mathfrak{a} + Q\mathfrak{a} = Pq - pq + q\mathfrak{a} + r,$$

ou bien

$$Pp(P-p) + pq - PQ - r = P(P-p)\mathfrak{a} - (Q-q)\mathfrak{a},$$

d'où l'on tire

$$\mathfrak{a} = \frac{Pp(P-p)+pq-PQ-r}{P(P-p)-(Q-q)} = p - \frac{Q(P-p)+r}{P(P-p)-(Q-q)}$$

Or les mêmes valeurs donnent pour la quatrieme égalité

$$Qq + PQp - Qpp - QQ + Q(p-P)\mathfrak{a} = r(P-p) + r\mathfrak{a},$$

ou

$$\mathfrak{a} = \frac{Qp(P-p)-Q(Q-q)-r(P-p)}{Q(P-p)+r} = p - \frac{Q(Q-q)+Pr}{Q(P-p)+r}.$$

Donc, égalant ces deux valeurs, on aura

$$\frac{Q(P-p)+r}{P(P-p)-(Q-q)} = \frac{Q(Q-q)+Pr}{Q(P-p)+r},$$

ou bien

$$Q(P-p)(Pq-Qp) + 2Qr(P-p) + Pr(Q-q) - PPr(P-p) \\ + Q(Q-q)^2 + rr = 0.$$

15. Maintenant il est évident, comment il s'y faut prendre pour éliminer l'inconnue z de deux équations proposées d'un degré quelconque. Car, soient en général les équations proposées

$$z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + Rz^{m-3} + Sz^{m-4} + \text{etc.} = 0,$$

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + rz^{n-3} + sz^{n-4} + \text{etc.} = 0,$$

d'où il faut fournir une équation qui ne contienne plus la quantité z. Cette question revient donc à celle-ci, qu'on détermine le rapport entre les coeffi-

ciens P, Q, R etc., p, q, r etc., afin que les deux équations proposées obtiennent une racine commune, ou bien un facteur commun. Soit $z-\omega$ ce facteur commun et on posera

$$z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + \text{etc.} = (z-\omega)(z^{m-1} + \mathfrak{A}z^{m-2} + \mathfrak{B}z^{m-3} + \text{etc.}),$$

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \text{etc.} = (z-\omega)(z^{n-1} + \mathfrak{a}z^{n-2} + \mathfrak{b}z^{n-3} + \text{etc.}).$$

16. On aura donc à rendre égaux entr'eux les deux produits suivants

$$(z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + \text{etc.})(z^{n-1} + \mathfrak{a}z^{n-2} + \mathfrak{b}z^{n-3} + \text{etc.})$$

et

$$(z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \text{etc.})(z^{m-1} + \mathfrak{A}z^{m-2} + \mathfrak{B}z^{m-3} + \text{etc.}),$$

et puisque les premiers termes deviennent déjà égaux, le nombre des égalités qu'on en tirera, sera $= m+n-1$. Or, le nombre des lettres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. étant $= m-1$ et des lettres $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ etc. $= n-1$, le nombre de toutes ces lettres ensemble, dont il faudra chercher les valeurs, sera $= m+n-2$; et pour cet effet autant d'équations seront suffisantes. Ayant donc une équation de plus, on parviendra enfin à une équation, qui ne contiendra plus aucune de ces lettres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ etc. et $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ etc., et comme z ne s'y trouvera pas non plus, ce sera l'équation cherchée, à laquelle l'élimination conduit; ou qui contient la relation requise entre les coefficiens P, Q, R etc., p, q, r etc., afin que les deux équations proposées obtiennent une racine commune.

17. Ayant donc mis dans tout son jour la nature de l'élimination et des opérations qu'on doit exécuter pour cet effet, il sera aisé de s'en servir en chaque cas proposé. Pour en donner un exemple, je rapporterai un probleme proposé dans les Actes de Leipzig[1]), au mois d'Octobre 1749, qui

1) Nova acta eruditorum 1749, p. 627. On y trouve:

PROBLEMA, ANALYSTIS, AD ID, UT SOLVATUR, PROPOSITUM.

Sit aequatio quarti gradus secundo termino deficiens

$$x^4 = pxx + qx + r,$$

ubi p, q et r quantitates datas cum suis signis denotant.

Transformetur dicta aequatio in hanc aliam itidem quarti gradus, sed secundo termino pollentem

$$x^4 = fx^3 + gxx + hx + r$$

porte qu'une équation quarré-quarrée

$$x^4 = pxx + qx + r$$

étant proposée, où le second terme manque, on en trouve une autre

$$x^4 = fx^3 + gxx + hx + r,$$

pourvue du second terme et où le dernier terme soit le même que dans la proposée, et qui ait avec l'autre une racine commune. Ou bien, il faut trouver l'équation qui résulte en éliminant de ces deux équations la quantité x; car cette équation contiendra le rapport que doivent avoir les coefficiens f, g, h, à l'égard des quantités données p, q, r, afin que ces deux équations obtiennent une racine commune.

18. Pour résoudre donc ce probleme, on n'a qu'à résoudre cette équation

$$(x^4 - pxx - qx - r)(x^3 + Axx + Bx + C) \\ = (x^4 - fx^3 - gx^2 - hx - r)(x^3 + Dxx + Ex + F),$$

d'où l'on tire les égalités suivantes

$$\begin{aligned} A &= D - f, \\ B - p &= E - Df - g, \\ C - Ap - q &= F - Ef - Dg - h, \\ -Bp - Aq - r &= -Ff - Eg - Dh - r, \\ -Cp - Bq - Ar &= -Fg - Eh - Dr, \\ -Cq - Br &= -Fh - Er, \\ -Cr &= -Fr. \end{aligned}$$

---

huius naturae, ut incognita x eadem sit in prima et secunda aequatione, et pariter idem sit in aequatione utraque homogeneum comparationis r. Coefficientes vero secundae aequationis, videlicet f, g, h, determinentur per coefficientes p et q aequationis primae et per commune homogeneum comparationis r.

D'après l'index qui se trouve à la fin du volume, le Problème a été proposé par un anonymus. F. R.

Les deux premieres avec la derniere donnent d'abord

$$A = D - f,\quad B = E - Df - g + p \quad \text{et} \quad C = F,$$

lesquelles valeurs, étant substituées dans les autres, produiront

$$Dp - fp + q - Ef - Dg - h = 0,$$
$$Ep - Dfp - gp + pp + Dq - fq - Ff - Eg - Dh = 0,$$
$$Fp + Eq - Dfq - gq + pq - fr - Fg - Eh = 0,$$
$$Fq - Dfr - gr + pr - Fh = 0.$$

19. La premiere et la derniere de ces égalités fournissent

$$E = \frac{D(p-g)}{f} - p + \frac{q-h}{f} \quad \text{et} \quad F = \frac{Dfr - r(p-g)}{q-h}$$

et de là les deux autres égalités prendront les formes suivantes

$$Df^3r + Dffp(q-h) - Df(q-h)^2 - D(p-g)^2(q-h)$$
$$= (p-g)(q-h)^2 - ffq(q-h) + ffr(p-g),$$
$$D(p-g)(q-h)^2 - Dffq(q-h) + Dffr(p-g)$$
$$= ffr(q-h) + fr(p-g)^2 - fhp(q-h) + fgq(q-h) - (q-h)^3,$$

d'où nous tirons enfin cette équation

$$\begin{aligned} f^4rr - f^3r(gq + 2hp - 3pq) &- 2ffr(q-h)^2 - 4fr(p-g)^2(q-h) \\ - f^3qq(q-h) &+ ffpr(p-g)^2 + f(pq + 2hp - 3gq)(q-h)^2 \\ &- ffp(hp - gq)(q-h) \\ = r(p-g)^4 &- (hp - gq)(p-g)^2(q-h) - (q-h)^4. \end{aligned}$$

20. On aura donc une équation du quatrieme degré à résoudre, soit qu'on veuille déterminer f, ou g, ou h, pour que l'équation

$$x^4 = fx^3 + gxx + hx + r$$

ait une racine commune avec l'équation proposée

$$x^4 = pxx + qx + r.$$

Mais, si l'on vouloit déterminer le terme absolu r commun à ces deux équations, en regardant les autres coefficiens f, g, h, p, q comme connus, cela se pourroit faire par la résolution d'une équation quarrée. On pourra même supposer d'abord $f=0$ et déterminer l'un ou l'autre des coefficiens g et h, en sorte que ces deux équations

$$x^4 = gxx + hx + r \quad \text{et} \quad x^4 = pxx + qx + r$$

obtiennent une racine commune; ce qui arrivera en satisfaisant à cette équation

$$r(p-g)^4 = (hp-gq)(p-g)^2(q-h) + (q-h)^4,$$

d'où l'on voit que cela se peut faire, sans que soit $g=p$ et $h=q$.

21. Mais la méthode que je viens d'expliquer, s'étend beaucoup plus loin qu'au seul ouvrage de l'élimination et on peut à son aide résoudre quantité de problemes, qui pourront être fort importants, tant dans l'Analyse que dans la Théorie des lignes courbes. C'est aussi de ce côté que je crois que cette méthode mérite quelque attention; car, si elle étoit bornée uniquement aux opérations d'éliminer, je conviens que la préférence qu'elle mériteroit sur les autres méthodes trouvées pour ce dessein, ne seroit pas fort considérable, si ce n'étoit qu'elle nous découvre mieux la nature de l'élimination. Voici donc un autre probleme, pour la résolution duquel cette méthode pourra être employée.

Deux équations algébriques indéterminées étant proposées, trouver les déterminations nécessaires pour que ces équations obtiennent deux racines communes.

22. Soit l'une de ces deux équations du troisieme et l'autre du quatrieme degré

$$z^3 + Pzz + Qz + R = 0$$

et

$$z^4 + pz^3 + qzz + rz + s = 0,$$

où l'on demande quel rapport doit subsister entre les coefficiens, afin que ces deux équations ayent deux racines, ou deux facteurs simples communs. Soient $z+\alpha$ et $z+\beta$, ces deux facteurs communs et les deux équations doivent avoir les formes suivantes

$$z^3 + Pzz + Qz + R = (z+\alpha)(z+\beta)(z+A),$$

$$z^4 + pz^3 + qzz + rz + s = (z+\alpha)(z+\beta)(zz + az + b),$$

d'où l'on tirera d'abord celle-ci

$$(z^3 + Pzz + Qz + R)(zz + az + b) = (z^4 + pz^3 + qzz + rz + s)(z + A),$$

où il faut que chaques puissances de z soient égalées entr'elles.

23. De là on tirera les cinq égalités suivantes

$$\begin{aligned} P + a &= p + A, \\ Q + aP + b &= q + Ap, \\ R + aQ + bP &= r + Aq, \\ aR + bQ &= s + Ar, \\ bR &= As. \end{aligned}$$

La premiere et la derniere donnent

$$a = p + A - P \quad \text{et} \quad b = \frac{As}{R}$$

et ces valeurs, étant substituées dans les trois autres,

$$\begin{aligned} A(PR - pR + s) &= PR(P - p) - R(Q - q), \\ A(QR - qR + Ps) &= QR(P - p) - R(R - r), \\ A(RR - Rr + Qs) &= RR(P - p) + Rs. \end{aligned}$$

D'où l'on tire, en éliminant A, ces deux équations

$$\begin{aligned} 0 = ss + 2Rs(P - p) - PQs(P - p) + Qs(Q - q) + R(P - p)(Pr - Rp) \\ + R(Q - q)(R - r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = Pss + Rs(Q - q) + PRs(P - p) + R(P - p)(Qr - Rq) \\ + Qs(R - r) - QQs(P - p) + R(R - r)^2, \end{aligned}$$

qui renferment les déterminations requises.

24. Si les deux équations proposées sont d'un ordre quelconque, comme

$$z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + Rz^{m-3} + \text{etc.} = 0,$$

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + rz^{n-3} + \text{etc.} = 0,$$

et qu'on veuille déterminer le rapport entre leurs coefficiens, afin que ces deux équations ayent deux racines communes, on trouvera par un semblable raisonnement, qu'il faut tellement satisfaire à cette équation

$$(z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + \text{etc.})(z^{n-2} + az^{n-3} + bz^{n-4} + \text{etc.})$$
$$= (z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \text{etc.})(z^{m-2} + Az^{m-3} + Bz^{m-4} + \text{etc.})$$

que les coefficiens de chaque puissance de z deviennent égaux de part et d'autre.

25. Or, en rendant ces termes égaux, on obtiendra $m+n-2$ égalités. Mais le nombre des coefficiens inconnus A, B, C etc. étant $=m-2$ et des autres a, b, c etc. $=n-2$, pour déterminer tous ces coefficiens, on n'aura besoin que de $m+n-4$ égalités. Donc, après avoir déterminé tous ces coefficiens inconnus, on trouvera encore deux équations entre les coefficiens P, Q, R etc. et p, q, r etc., qui renfermeront les conditions requises, afin que les deux équations proposées ayent deux racines communes. Cette détermination servira dans la Théorie des lignes courbes à trouver les cas où deux courbes se coupent tellement en deux points que ces deux intersections répondent à la même abscisse, indiquée par z.

26. Après ce que je viens de dire, il ne sera pas difficile de trouver les conditions sous lesquelles deux équations d'un ordre quelconque acquierent trois racines communes. Car, si les deux équations proposées sont

$$z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + Rz^{m-3} + \text{etc.} = 0,$$
$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + rz^{n-3} + \text{etc.} = 0,$$

on n'aura qu'à former cette équation

$$(z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + \text{etc.})(z^{n-3} + az^{n-4} + bz^{n-5} + \text{etc.})$$
$$= (z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \text{etc.})(z^{m-3} + Az^{m-4} + Bz^{m-5} + \text{etc.})$$

et rendre égaux les coefficiens de chaque puissance de z. Cette opération, après avoir déterminé les coefficiens A, B, C etc., a, b, c etc., conduira à trois équations entre les coefficiens proposés, qui renfermeront les conditions requises, pour que ces deux équations obtiennent trois racines communes.

27. De là il est asses clair, comment on pourra trouver les déterminations nécessaires, pour que deux équations proposées obtiennent quatre ou plusieurs racines communes; et ces conditions seront toujours comprises en autant d'équations, qu'il y a de racines qui doivent être communes aux équations proposées. Comme la méthode que je viens d'indiquer pour cet effet, est tout à fait semblable à celle qui sert à l'élimination, qui est le cas, où deux équations doivent avoir une racine commune, j'ai cru qu'elle méritoit quelque attention; et cela d'autant plus que les méthodes ordinaires, dont on fait usage dans l'ouvrage de l'élimination, ne sont pas suffisantes à résoudre les autres problemes que je viens de rapporter.

NOVA CRITERIA RADICES AEQUATIONUM IMAGINARIAS DIGNOSCENDI

Commentatio 370 indicis ENESTROEMIANI
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **13** (1768), 1769, p. 89—119
Summarium ibidem p. 11—14

SUMMARIUM

Quae a NEUTONO aliisque post eum Geometris allata fuerunt criteria, ex quibus cognosci posset, utrum aequatio aliqua radices habeat imaginarias necne, licet in se quidem vera et indubia sint, ad finem tamen propositum obtinendum minime sufficere inveniuntur, quum nimirum, quoties radices imaginarias indicent, tales quidem revera aequationi inesse deprehendantur, quando autem nullam radicem imaginariam indicent, saepenumero tamen fieri possit, ut eiusmodi aequationis vel plures vel adeo omnes radices sint imaginariae. Hoc autem imprimis evenire solet in eiusmodi aequationibus, ubi duo signa eiusdem naturae se continuo insequuntur; sic nimirum in aequatione biquadratica

$$x^4 + 4x^3 - 8xx - 24x + 108 = 0$$

quamvis ad praescriptum criteriorum iam dictorum nulla radix imaginaria reperiretur, tamen certissimum est omnes eius radices esse imaginarias, quippe quum eadem aequatio resolvatur in has duas quadraticas

$$xx + 8x + 18 = 0 \quad \text{et} \quad xx - 4x + 6 = 0.$$

In hac igitur dissertatione Illustr. Auctor doctrinam de criteriis radicum imaginariarum accuratius pertractandam sibi proposuit; quem in finem primum methodos explicavit, quibus Auctores usi sunt ad haec criteria invenienda, tum vero ostendit, quomodo multo plura eiusmodi criteria erui queant.

Primum autem *principium* in hac doctrina adhibitum in eo consistit, quod, si omnes aequationis cuiusdam radices sint reales et ex hac alia aequatio formetur, cuius radices

aequentur quadratis illarum, tum necessario fieri debere, non solum ut omnes aequationis sic formatae radices sint reales, sed etiam positivae, ex quo principio iam magnam huiusmodi criteriorum copiam derivare licet. Evidens autem est, quod hoc principium multo latius extendi queat, adeo ut ex aequatione quavis proposita aliae derivari possint, quarum radices sint vel cubi vel biquadrata vel altiores quaevis potestates radicum aequationis propositae.

Secundum principium in eo continetur, quod [si omnes aequationis cuiusdam radices sint reales] summa quadratorum ex differentiis radicum constituat numerum positivum; unde si summa omnium radicum dicatur a et summa productorum ex binis b, elicitur

$$aa > \frac{2n}{n-1}b.$$

Per *tertium principium* haec criteria ea ratione indagantur, quod ex aequatione proposita duae aliae deriventur, de quibus etiam certi esse possumus omnes earum radices esse reales, si modo singulae aequationis propositae radices fuerint reales. Prima vero harum oritur, si singuli aequationis propositae termini per seriem arithmeticam

$$n, \quad n-1, \quad n-2 \quad \text{etc.}$$

multiplicentur, secunda vero, si iidem termini in hanc progressionem arithmeticam

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3 \quad \text{etc.}$$

ducantur. Ex his duabus aequationibus gradus $n-1$ deinceps tres novae gradus $n-2$ deducuntur, unde continuata hac operatione demum ad aequationes secundi gradus pervenire licet; quae autem criteria in aequationibus sic derivatis locum habent, eadem quoque ad aequationem primum propositam applicari poterunt. Quoniam vero nimis operosum foret, si per eiusmodi depressionem aequationum a gradu superiori ad inferiorem hoc negotium perficeretur, hinc Illustr. Auctor generalem tradidit methodum, qua ex aequatione cuiuscumque gradus istiusmodi aequatio quadratica statim elici potest.

His itaque criteriis absolutis, quae ex charactere aequationum quadraticarum derivantur, sequuntur ea, quae simili ratione ope characteris aequationum cubicarum eruuntur et quorum Illustr. Auctor primus mentionem fecit. Postquam igitur characterem completum pro aequationibus cubicis, quarum omnes radices sunt reales, investigaverit, ostendit, quomodo criteria inde derivata ad aequationes cuiuscumque gradus applicari debent, quod fit istiusmodi aequationes ad aequationes tertii gradus ratione iam ante exposita deprimendo. Ut autem hoc facilius et expeditius institui queat, ostenditur, quomodo in genere ex quavis aequatione aequationes cubicas elicere possimus, quarum characteribus in usum vocatis oriuntur criteria pro relatione inter quaternos quosque coefficientes successivos, quorum ope dignoscere licet, an aequationis propositae radices sint reales necne. Simili negotio ex charactere aequationum biquadraticarum radices reales exhibente criteria erui possent pro exprimenda

NOVA CRITERIA RADICES AEQUATIONUM IMAGINARIAS DIGNOSCENDI

Commentatio 370 indicis ENESTROEMIANI
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 13 (1768), 1769, p. 89—119
Summarium ibidem p. 11—14

SUMMARIUM

Quae a NEUTONO aliisque post eum Geometris allata fuerunt criteria, ex quibus cognosci posset, utrum aequatio aliqua radices habeat imaginarias necne, licet in se quidem vera et indubia sint, ad finem tamen propositum obtinendum minime sufficere inveniuntur, quum nimirum, quoties radices imaginarias indicent, tales quidem revera aequationi inesse deprehendantur, quando autem nullam radicem imaginariam indicent, saepenumero tamen fieri possit, ut eiusmodi aequationis vel plures vel adeo omnes radices sint imaginariae. Hoc autem imprimis evenire solet in eiusmodi aequationibus, ubi duo signa eiusdem naturae se continuo insequuntur; sic nimirum in aequatione biquadratica

$$x^4 + 4x^3 - 8xx - 24x + 108 = 0$$

quamvis ad praescriptum criteriorum iam dictorum nulla radix imaginaria reperiretur, tamen certissimum est omnes eius radices esse imaginarias, quippe quum eadem aequatio resolvatur in has duas quadraticas

$$xx + 8x + 18 = 0 \quad \text{et} \quad xx - 4x + 6 = 0.$$

In hac igitur dissertatione Illustr. Auctor doctrinam de criteriis radicum imaginariarum accuratius pertractandam sibi proposuit; quem in finem primum methodos explicavit, quibus Auctores usi sunt ad haec criteria invenienda, tum vero ostendit, quomodo multo plura eiusmodi criteria erui queant.

Primum autem *principium* in hac doctrina adhibitum in eo consistit, quod, si omnes aequationis cuiusdam radices sint reales et ex hac alia aequatio formetur, cuius radices

aequentur quadratis illarum, tum necessario fieri debere, non solum ut omnes aequationis sic formatae radices sint reales, sed etiam positivae, ex quo principio iam magnam huiusmodi criteriorum copiam derivare licet. Evidens autem est, quod hoc principium multo latius extendi queat, adeo ut ex aequatione quavis proposita aliae derivari possint, quarum radices sint vel cubi vel biquadrata vel altiores quaevis potestates radicum aequationis propositae.

Secundum principium in eo continetur, quod [si omnes aequationis cuiusdam radices sint reales] summa quadratorum ex differentiis radicum constituat numerum positivum; unde si summa omnium radicum dicatur a et summa productorum ex binis b, elicitur

$$aa > \frac{2n}{n-1}b.$$

Per *tertium principium* haec criteria ea ratione indagantur, quod ex aequatione proposita duae aliae deriventur, de quibus etiam certi esse possumus omnes earum radices esse reales, si modo singulae aequationis propositae radices fuerint reales. Prima vero harum oritur, si singuli aequationis propositae termini per seriem arithmeticam

$$n, \quad n-1, \quad n-2 \quad \text{etc.}$$

multiplicentur, secunda vero, si iidem termini in hanc progressionem arithmeticam

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3 \quad \text{etc.}$$

ducantur. Ex his duabus aequationibus gradus $n-1$ deinceps tres novae gradus $n-2$ deducuntur, unde continuata hac operatione demum ad aequationes secundi gradus pervenire licet; quae autem criteria in aequationibus sic derivatis locum habent, eadem quoque ad aequationem primum propositam applicari poterunt. Quoniam vero nimis operosum foret, si per eiusmodi depressionem aequationum a gradu superiori ad inferiorem hoc negotium perficeretur, hinc Illustr. Auctor generalem tradidit methodum, qua ex aequatione cuiuscumque gradus istiusmodi aequatio quadratica statim elici potest.

His itaque criteriis absolutis, quae ex charactere aequationum quadraticarum derivantur, sequuntur ea, quae simili ratione ope characteris aequationum cubicarum eruuntur et quorum Illustr. Auctor primus mentionem fecit. Postquam igitur characterem completum pro aequationibus cubicis, quarum omnes radices sunt reales, investigaverit, ostendit, quomodo criteria inde derivata ad aequationes cuiuscumque gradus applicari debent, quod fit istiusmodi aequationes ad aequationes tertii gradus ratione iam ante exposita deprimendo. Ut autem hoc facilius et expeditius institui queat, ostenditur, quomodo in genere ex quavis aequatione aequationes cubicas elicere possimus, quarum characteribus in usum vocatis oriuntur criteria pro relatione inter quaternos quosque coefficientes successivos, quorum ope dignoscere licet, an aequationis propositae radices sint reales necne. Simili negotio ex charactere aequationum biquadraticarum radices reales exhibente criteria erui possent pro exprimenda

relatione inter quinos quosque coefficientes aequationis propositae; sed quum hae formulae nimis evaderent prolixae, iis investigandis non incumbendum esse videtur. Denique ad finem huius dissertationis Illustr. Auctor exponit, quomodo singula haec criteria ex duobus tantum principiis idque methodo admodum singulari necnon concinna deducantur.

Summus NEUTONUS et post eum plures alii Geometrae in eo elaborarunt, ut criteria seu signa invenirent, quorum ope aequationum cuiuscumque gradus radices reales et imaginariae dignosci possent simili modo, quo radices positivae et negativae dignosci solent. Verum cuncta illa criteria seu signa hoc defectu laborant, ut, quoties radices imaginarias indicant, inde certe quidem concludi possit tales radices in aequatione revera inesse; sed quando nullas radices imaginarias indicant, neutiquam inde concludere licet omnes radices esse reales, cum saepius evenire queat, ut hoc non obstante omnes adeo aequationis radices sint imaginariae.

Hic defectus imprimis cernitur in aequationibus huius formae

$$+x^n + ax^{n-1} - bx^{n-2} - cx^{n-3} + dx^{n-4} + ex^{n-5} - \text{etc.} = 0,$$

ubi continuo bina signa eiusdem naturae se mutuo insequuntur; tum enim omnia illa criteria, quae hactenus sunt prolata, nullas plane radices imaginarias ostendunt, cum tamen fieri possit, ut plures atque adeo omnes sint imaginariae.

Ad hoc dilucidandum in genere aequatio quarti ordinis huius formae

$$+x^4 + ax^3 - bxx - cx + d = 0$$

exhiberi potest, cuius omnes radices sint imaginariae; concipiatur ea enim conflata ex duobus huiusmodi factoribus

$$xx + px + q \quad \text{et} \quad xx - rx + s,$$

in quibus sit $pp < 4q$ et $rr < 4s$, ut omnes radices fiant imaginariae. Tum igitur fieri oportet

$$a = p - r, \quad b = pr - q - s, \quad c = qr - ps \quad \text{et} \quad d = qs$$

ideoque

$$p > r, \quad pr > q + s \quad \text{et} \quad qr > ps.$$

Statuamus ergo $p = \alpha r$ et $q = \beta s$ et conditiones adimplendae erunt sequentes

I. $\alpha > 1$, II. $\beta > \alpha$, III. $rr < 4s$, IV. $rr < \frac{4\beta}{\alpha\alpha}s$, V. $rr > \frac{\beta+1}{\alpha}s$.

Cum igitur ex quinta sit $\frac{\beta+1}{\alpha}s < rr$, erit multo magis

$$\frac{\beta+1}{\alpha}s < 4s \quad \text{et} \quad < \frac{4\beta}{\alpha\alpha}s,$$

unde fit

$$\beta + 1 < 4\alpha \quad \text{seu} \quad \beta < 4\alpha - 1$$

et

$$\beta + 1 < \frac{4\beta}{\alpha} \quad \text{seu} \quad \beta > \frac{\alpha}{4-\alpha}.$$

Cum quibus novis conditionibus iungatur secunda $\beta > \alpha$ et adipiscimur cum

$$4\alpha - 1 > \alpha$$

tum

$$4\alpha - 1 > \frac{\alpha}{4-\alpha};$$

inde fit $\alpha > \frac{1}{3}$, quod per se supponitur, quia $\alpha > 1$, hinc vero

$$4\alpha > \alpha^2 + 1;$$

pro qua conditione implenda necesse est, ut α intra hos limites $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$ accipiatur vel potius intra limites $2 + \sqrt{3}$ et 1; tum vero facile erit pro β idoneos valores invenire; constitutis autem valoribus pro α et β aeque facile erit pro s et rr idoneos valores assumere.

Sumto enim exempli gratia $\alpha = 2$ debet esse

$$\beta > 2 \quad \text{et} \quad > 1 \quad \text{et} \quad < 7,$$

unde β intra limites 2 et 7 debet contineri; sit igitur $\beta = 3$ et habebimus has conditiones

$$rr > 2s \quad \text{et} \quad < 4s \quad \text{et} \quad < 3s,$$

unde rr intra limites $2s$ et $3s$ debet contineri; sumto ergo $s = 6$ capi poterit $r = 4$ hincque fit $p = 8$ et $q = 18$; quocirca ex binis factoribus $xx + 8x + 18$ et $xx - 4x + 6$ nascetur haec aequatio quarti ordinis

$$x^4 + 4x^3 - 8xx - 24x + 108 = 0,$$

cuius omnes radices certo sunt imaginariae, etiamsi criteria supra memorata hoc neutiquam innuant.

Hoc autem semper certum est, si cuiuspiam aequationis omnes radices fuerint reales, tum illa criteria perpetuo locum habere, propterea quod in illis certae proprietates continentur, quae huiusmodi aequationibus conveniunt, quae autem negotium non exhauriunt, sed quandoque etiam in eiusmodi aequationibus locum habent, quae radices imaginarias involvunt.

Neque etiam adhuc aliud principium constat, unde talia criteria praesertim pro aequationibus altiorum graduum peti possent; interim tamen numerum talium criteriorum pro lubitu augere licet, quo hoc commodi nanciscimur, ut, dum quaedam nullas radices imaginarias indicant, alia adversentur, quorum suffragium semper veritati consentaneum est censendum.

Quod quo clarius appareat, methodos, quibus memorati autores in hunc finem sunt usi, breviter hic exponam; tum vero ostendam, quomodo iisdem vestigiis insistendo plura alia, immo infinita similia criteria investigari queant.

Primum principium inde petitur, quod, si cuiuspiam aequationis omnes radices fuerint reales indeque alia aequatio formetur, cuius singulae radices sint quadratis illarum aequales, tum huius novae aequationis omnes radices non solum futurae sint reales sed adeo positivae, ita ut in ea signa + et — se mutuo alternatim insequi debeant.

Sumamus ergo huius aequationis

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + dx^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

omnes radices esse reales indeque quaeramus novam aequationem, cuius quaelibet radix z aequalis sit quadrato xx seu $z = xx$; hunc in finem illius aequationis alternos terminos ad alteram partem transferamus, ut sit

$$x^n + bx^{n-2} + dx^{n-4} + \text{etc.} = -ax^{n-1} - cx^{n-3} - ex^{n-5} - \text{etc.},$$

capianturque utrimque quadrata, quae iterum ad eandem partem disposita dabunt hanc aequationem

$$\begin{array}{lllll} x^{2n} & + 2bx^{2n-2} & + 2dx^{2n-4} & + 2fx^{2n-6} & + 2hx^{2n-8} + \text{etc.} = 0, \\ -aa & + bb & + 2bd & + 2bf & \\ & -2ac & -2ae & + dd & \\ & & -cc & -2ag & \\ & & & -2ce & \end{array}$$

in qua omnes exponentes ipsius x sunt numeri pares.

Scribamus ergo ubique z loco xx et habebimus novam illam aequationem quaesitam, quae erit

$$\begin{array}{llllll} z^n & +2bz^{n-1} & +2dz^{n-2} & +2fz^{n-3} & +2hz^{n-4} & +\text{etc.}=0. \\ & -aa & +bb & +2bd & +2bf & \\ & & -2ac & -2ae & +dd & \\ & & & -cc & -2ag & \\ & & & & -2ce & \end{array}$$

In qua cum coefficientes primi, tertii, quinti etc. termini sint positivi, secundi vero, quarti, sexti etc. negativi, obtinebimus sequentes conditiones pro coefficientibus a, b, c, d etc. aequationis propositae:

$$\begin{array}{lll} 2b-aa<0 & \text{seu} & aa>2b, \\ 2d+bb-2ac>0 & & bb>2ac-2d, \\ 2f+2bd-2ae-cc<0 & & cc>2bd-2ae+2f, \\ 2h+2bf+dd-2ag-2ce>0 & & dd>2ce-2bf+2ag-2h \\ \text{etc.} & & \text{etc.}, \end{array}$$

quarum formularum ordo facile perspicitur.

En ergo iam insignes proprietates, quae omnibus aequationibus, quarum radices sunt reales, necessario conveniunt, ita ut aequationis propositae omnes radices reales esse nequeant, nisi simul hae conditiones inter eius coefficientes locum habeant. Neutiqam autem vicissim inde sequitur, si hae conditiones locum habeant, etiam omnes aequationis radices fore reales, quod exemplo aequationis biquadraticae ante allegatae

$$x^4+px^3-qx^2-rx+s=0$$

fit manifestum; cum enim facta applicatione sit $a=p$, $b=-q$, $c=-r$ et $d=s$, conditiones inventae sponte implentur, quoniam utique est

$$pp>-2q, \quad qq>-2pr-2s, \quad rr>-2qs;$$

hoc autem non obstante novimus omnes huius aequationis radices esse posse imaginarias.

SCHOLION

Quemadmodum hic ex data aequatione aliam elicuimus, cuius singulae radices sint quadrata singularum radicum illius, ita etiam inde aliae aequationes inveniri possunt, quarum radices sint vel cubi vel biquadrata vel aliae potestates altiores radicum aequationis propositae.

Poni scilicet oportet vel $z = x^3$ vel $z = x^4$ vel $z = x^5$ etc. et negotium huc redit, ut quantitas x eliminetur, pro qua operatione regulae passim[1]) sunt traditae.

Verum calculus plerumque tam fit intricatus et molestus, ut nemo facile hunc laborem sit suscepturus.

Quare haud abs re fore arbitror peculiarem methodum ostendisse, qua haec eliminatio facile effici queat. Hunc in finem aequatio ordine inverso exhibeatur, ut sit

$$a + bx + cxx + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + \text{etc.} = 0,$$

et pro casu iam evoluto, quo esse debet $z = xx$, facta substitutione, quatenus licet, habebimus

$$a + bx + cz + dxz + ezz + fxzz + gz^3 + \text{etc.} = 0,$$

ubi brevitatis gratia statuamus

$$a + cz + ezz + gz^3 + \text{etc.} = P \quad \text{et} \quad b + dz + fzz + \text{etc.} = Q,$$

ut sit

$$P + Qx = 0.$$

Quae aequatio per x multiplicata loco xx scribendo z dabit aliam eiusdem formae

$$Px + Qz = 0,$$

unde iam facile x eliminatur; prodit enim

$$PP - QQz = 0,$$

quae formula operationem supra usurpatam complectitur.

1) Vide exempli gratia Commentationem praecedentem. F. R.

Ponamus autem requiri, ut sit $z = x^3$, factaque substitutione, quatenus licet, habebitur

$$a + bx + cxx + dz + exz + fxxz + gzz + \text{etc.} = 0;$$

quae cum tribus partibus constet, statuamus brevitatis gratia

$$a + dz + gzz + \text{etc.} = P,$$
$$b + ez + hzz + \text{etc.} = Q,$$
$$c + fz + izz + \text{etc.} = R,$$

ut sit

$$P + Qx + Rxx = 0;$$

haec per x multiplicata dat novam eiusdem formae

$$Rz + Px + Qxx = 0;$$

haec denuo per x multiplicata dabit

$$Qz + Rzx + Pxx = 0.$$

Iam ut ex his tribus aequationibus tam x quam xx eliminetur, prima per L, secunda per M et tertia per N multiplicetur fiatque

$$LQ + MP + NRz = 0$$

et insuper

$$LR + MQ + NP = 0$$

eritque tum

$$LP + MRz + NQz = 0.$$

Ex duabus prioribus autem elicitur

$$L = \frac{-MP - NRz}{Q} = \frac{-MQ - NP}{R}$$

ideoque

$$MPR + NRRz = MQQ + NPQ,$$

unde fit

$$\frac{M}{N} = \frac{PQ - RRz}{PR - QQ}.$$

Statuatur ergo

$$M = PQ - RRz \quad \text{et} \quad N = PR - QQ$$

ac fiet

$$L = QRz - PP,$$

quocirca aequatio quaesita erit

$$3PQRz - P^3 - Q^3 z - R^3 zz = 0.$$

Hinc iam satis perspicuum est, quomodo eadem methodus etiam ad altiores potestates sit accommodanda.

Secundum principium. Ponamus aequationis propositae

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

radices esse

$$-\alpha, \quad -\beta, \quad -\gamma, \quad -\delta \quad \text{etc.},$$

quarum numerus est n, ut sit

$$a = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$$

et

$$b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \text{etc.}$$

Et quia omnes radices sunt reales, erit sequens forma

$$(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\alpha - \delta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2 + (\gamma - \delta)^2 + \text{etc.}$$

certe numerus positivus; facta autem evolutione prodit

$$\begin{gathered}(n-1)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.}) \\ - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma - 2\beta\delta - 2\gamma\delta - \text{etc.}\end{gathered}$$

Est vero, uti constat,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.} = aa - 2b,$$

unde haec forma

$$(n-1)(aa - 2b) - 2b = (n-1)aa - 2nb;$$

quae quantitas cum certe sit positiva, erit

$$aa > \frac{2n}{n-1} b.$$

Quae iam insignem continet proprietatem huiusmodi aequationum, quarum omnes radices sunt reales; etsi ea enim tantum ad tres terminos initiales se extendit, tamen mox patebit, quemadmodum ea ad ternos terminos quosvis successivos applicari queat.

Tertium principium. Si aequationis cuiuscumque gradus

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

omnes radices fuerint reales, semper duae aequationes uno gradu inferiores inde formari possunt, quarum radices itidem omnes sunt reales. Altera ita se habet

$$nx^{n-1} + (n-1)ax^{n-2} + (n-2)bx^{n-3} + (n-3)cx^{n-4} + \text{etc.} = 0,$$

quae ex proposita nascitur, si singuli eius termini per progressionem arithmeticam

$$n, \quad n-1, \quad n-2, \quad n-3 \quad \text{etc.}$$

multiplicentur; quia enim hoc modo ultimus terminus per 0 multiplicatur, tota aequatio divisionem per x admittet sicque uno gradu deprimetur. Altera vero aequatio est

$$ax^{n-1} + 2bx^{n-2} + 3cx^{n-3} + 4dx^{n-4} + \text{etc.} = 0,$$

quae ex proposita nascitur, si singuli eius termini per progressionem arithmeticam

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4 \quad \text{etc.}$$

multiplicentur.

Cuius demonstratio ex consideratione linearum curvarum est petenda; si enim x denotet abscissam et applicata statuatur

$$y = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \text{etc.},$$

evidens est applicatam fieri nullam, quoties abscissa x radici aequationis propositae aequalis capitur.

Cum igitur nostra aequatio n habeat radices reales, in totidem locis applicata y evanescet ibique curva axem intersecabit. Inter binas igitur intersectiones certo dabitur applicata maxima, ubi erit $\frac{dy}{dx} = 0$, unde tales applicatae maximae erunt numero $n-1$ ad minimum; quodsi ergo valor formulae $\frac{dy}{dx}$ quaeratur, qui erit

$$nx^{n-1} + (n-1)ax^{n-2} + (n-2)bx^{n-3} + \text{etc.},$$

hic $n-1$ casibus evanescere poterit sive haec aequatio

$$nx^{n-1} + (n-1)ax^{n-2} + (n-2)bx^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

certe habebit $n-1$ radices, hoc est, omnes suas radices reales; quae est demonstratio prioris formae.

Pro altera statuamus $x=\frac{1}{y}$ et aequatio hinc resultans

$$1+ay+byy+cy^3+\text{etc.}=0$$

itidem omnes habebit radices reales, quippe quae sunt reciprocae radicum illius; quocirca aequatio per differentiationem hinc simili modo formata

$$a+2by+3cyy+4dy^3+\text{etc.}=0$$

etiam omnes radices habebit reales; restituamus nunc pro y valorem $\frac{1}{x}$ ac manifestum erit etiam huius aequationis

$$ax^{n-1}+2bx^{n-2}+3cx^{n-3}+4dx^{n-4}+\text{etc.}=0$$

omnes radices futuras esse reales.

Quemadmodum hinc duae aequationes uno gradu inferiores sunt erutae, ita porro ex his tres novae duobus gradibus inferiores derivantur, quae sunt

$$n(n-1)x^{n-2}+(n-1)(n-2)ax^{n-3}+(n-2)(n-3)bx^{n-4}+\text{etc.}=0,$$
$$1(n-1)ax^{n-2}+2(n-2)bx^{n-3}+3(n-3)cx^{n-4}+\text{etc.}=0,$$
$$1\cdot 2bx^{n-2}+2\cdot 3cx^{n-3}+3\cdot 4dx^{n-4}+\text{etc.}=0.$$

Simili modo ex his elicientur quatuor aequationes tribus gradibus inferiores, scilicet

$$n(n-1)(n-2)x^{n-3}+(n-1)(n-2)(n-3)ax^{n-4}$$
$$+(n-2)(n-3)(n-4)bx^{n-5}+\text{etc.}=0,$$
$$1(n-1)(n-2)ax^{n-3}+2(n-2)(n-3)bx^{n-4}$$
$$+3(n-3)(n-4)cx^{n-5}+\text{etc.}=0,$$
$$1\cdot 2(n-2)bx^{n-3}+2\cdot 3(n-3)cx^{n-4}+3\cdot 4(n-4)dx^{n-5}+\text{etc.}=0,$$
$$1\cdot 2\cdot 3cx^{n-3}+2\cdot 3\cdot 4dx^{n-4}+3\cdot 4\cdot 5ex^{n-5}+\text{etc.}=0,$$

sicque continuo ulterius progredi licet; quoniam igitur omnes istae aequationes radices habent reales, quae criteria pro his aequationibus derivatis habentur, eadem quoque in ipsa aequatione proposita locum habere debent.

APPLICATIO AD CRITERIA PRIMI PRINCIPII

Faciamus ergo applicationem ad criteria ex primo principio eruta et prima aequatio derivata dabit

$$(n-1)^2 a^2 > 2n(n-2)b,$$
$$(n-2)^2 b^2 > 2(n-1)(n-3)ac - 2n(n-4)d,$$
$$(n-3)^2 c^2 > 2(n-2)(n-4)bd - 2(n-1)(n-5)ae + 2n(n-6)f$$
$$\text{etc.}$$

Ex secunda autem aequatione derivata nascuntur haec criteria

$$4bb > 2\cdot 3ac,$$
$$9cc > 2\cdot 2\cdot 4bd - 2\cdot 5ae,$$
$$16dd > 2\cdot 3\cdot 5ce - 2\cdot 2\cdot 6bf + 2\cdot 7ag,$$
$$25ee > 2\cdot 4\cdot 6df - 2\cdot 3\cdot 7cg + 2\cdot 2\cdot 8bh - 2\cdot 9ai$$
$$\text{etc.}$$

Si tantum primum criterium $aa > 2b$ ad ultimas aequationes cuiusque ordinis applicetur, sequentia criteria emergent

$$aa > 2b \qquad \text{sive} \qquad aa > 2b,$$
$$4bb > 2\cdot 3ac \qquad bb > \tfrac{3}{2}ac,$$
$$4\cdot 9cc > 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4bd \qquad cc > \tfrac{4}{3}bd,$$
$$4\cdot 9\cdot 16dd > 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 4\cdot 5ce \qquad dd > \tfrac{5}{4}ce$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

APPLICATIO AD CRITERIUM SECUNDI PRINCIPII

$$aa > \frac{2n}{n-1}b$$

Cum secundum hoc principium pro aequatione quacumque

$$px^m + qx^{m-1} + rx^{m-2} + \text{etc.} = 0$$

habeatur

$$qq > \frac{2m}{m-1} pr,$$

binae aequationes uno gradu inferiores dabunt

$$(n-1)^2 aa > 2 \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot n(n-2)b \quad \text{seu} \quad aa > \frac{2nb}{n-1},$$

deinde

$$4bb > 2 \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot 3ac \quad \text{seu} \quad bb > \frac{3}{2} \cdot \frac{n-1}{n-2} ac.$$

Tres aequationes duobus gradibus inferiores autem dabunt

$$(n-1)^2 (n-2)^2 aa > 2 \cdot \frac{n-2}{n-3} \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)b \quad \text{seu} \quad aa > \frac{2n}{n-1} b,$$

$$4(n-2)^2 bb > 2 \cdot \frac{n-2}{n-3} \cdot 3(n-1)(n-3)ac \quad \text{seu} \quad bb > \frac{3}{2} \cdot \frac{n-1}{n-2} ac,$$

$$4 \cdot 9cc > 2 \cdot \frac{n-2}{n-3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4bd \quad \text{seu} \quad cc > \frac{4}{3} \cdot \frac{n-2}{n-3} bd.$$

Cum igitur ex quolibet ordine ultima aequatio sola praebeat novum criterium, omnia criteria hinc nata ita se habebunt:

$$aa > \frac{2}{1} \cdot \frac{n}{n-1} b,$$

$$bb > \frac{3}{2} \cdot \frac{n-1}{n-2} ac,$$

$$cc > \frac{4}{3} \cdot \frac{n-2}{n-3} bd,$$

$$dd > \frac{5}{4} \cdot \frac{n-3}{n-4} ce$$

etc.

Hinc evolvamus ista criteria pro aequationibus singulorum graduum.

I. Pro

$$xx + ax + b = 0$$

erit criterium

$$aa > 4b,$$

quod ita est perfectum, ut, si sit $aa > 4b$, radices certe sint reales.

II. Pro
$$x^3 + axx + bx + c = 0$$
erunt criteria
$$aa > 3b, \quad bb > 3ac.$$

III. Pro
$$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$$
erunt criteria
$$aa > \frac{8}{3}b, \quad bb > \frac{9}{4}ac, \quad cc > \frac{8}{3}bd.$$

IV. Pro
$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$$
erunt criteria
$$aa > \frac{5}{2}b, \quad bb > 2ac, \quad cc > 2bd, \quad dd > \frac{5}{2}ce.$$

V. Pro
$$x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dxx + ex + f = 0$$
erunt criteria
$$aa > \frac{12}{5}b, \quad bb > \frac{15}{8}ac, \quad cc > \frac{16}{9}bd, \quad dd > \frac{15}{8}ce, \quad ee > \frac{12}{5}df.$$

SCHOLION

Omnia haec criteria a NEUTONO in *Arithmetica universali* [1]) sunt prolata et deduci possunt ex criterio aequationum quadraticarum, quod, si aequatio $pxx + qx + r = 0$ ambas radices habeat reales, necessario sit $qq > 4pr$.

Cum enim, cuiuscumque ordinis proposita fuerit aequatio, ope tertii principii ex ea tandem plures aequationes quadraticae formae $pxx + qx + r = 0$ erui queant, quae omnes radices habent reales, siquidem propositae aequationis omnes radices fuerint reales, hoc principium ad aequationes cuiuscumque gradus extendi poterit.

1) I. NEWTON, *Arithmetica universalis*, 3. ed. (vide notam p. 21), p. 179—187, imprimis p. 184. Vide etiam epistolas a C. MACLAURIN (1698—1746) ad M. FOLKES (1690—1754) scriptas, Philosophical Transactions (London) **34**, 1726, numb. 394, p. 104, et **36**, 1729, numb. 408, p. 59. Vide porro C. MACLAURIN, *A treatise of algebra in three parts*, London 1748, Part II, chap. 11. F. R.

Ita ex aequatione cubica

$$x^3 + axx + bx + c$$

nascuntur hae duae quadraticae

$$3xx + 2ax + b = 0 \quad \text{et} \quad axx + 2bx + 3c = 0,$$

unde concluditur ut ante

$$aa > 3b \quad \text{et} \quad bb > 3ac.$$

Simili modo aequatio quarti ordinis

$$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$$

praebet has tres quadraticas

$$4 \cdot 3\ xx + 3 \cdot 2ax + 2 \cdot 1b = 0,$$

$$1 \cdot 3axx + 2 \cdot 2bx + 3 \cdot 1c = 0,$$

$$1 \cdot 2bxx + 2 \cdot 3cx + 3 \cdot 4d = 0$$

et aequatio quinti gradus

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$$

praebet has quatuor quadraticas

$$5 \cdot 4 \cdot 3\ xx + 4 \cdot 3 \cdot 2ax + 3 \cdot 2 \cdot 1b = 0,$$

$$1 \cdot 4 \cdot 3axx + 2 \cdot 3 \cdot 2bx + 3 \cdot 2 \cdot 1c = 0,$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3bxx + 2 \cdot 3 \cdot 2cx + 3 \cdot 4 \cdot 1d = 0,$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3cxx + 2 \cdot 3 \cdot 4dx + 3 \cdot 4 \cdot 5e = 0,$$

quae supra allata criteria suppeditant.

Quoniam autem operosum foret has formas ulterius continuare, rem generatim expediamus et ex aequatione cuiuscumque gradus statim aequationem quadraticam quamcumque eliciamus.

Aequationem generalem ita exhibeamus:

$$
\begin{array}{cccccccc}
x^n & +\,ax^{n-1} & +\,bx^{n-2} + \cdots + & px^{\lambda+2} & +\,qx^{\lambda+1} & +\,rx^{\lambda} & & +\cdots+v=0 \\
\hline
0 & 1 & 2 \;\cdots\cdots & n-\lambda-2 & n-\lambda-1 & n-\lambda \;\cdots & & \\
 & 0 & 1 \;\cdots\cdots & n-\lambda-3 & n-\lambda-2 & n-\lambda-1 \;\cdots & & \\
 & & 0 \;\cdots\cdots & n-\lambda-4 & n-\lambda-3 & n-\lambda-2 \;\cdots & & \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 & & & 1 & 2 & 3 & & \\
\cline{4-8}
 & & & \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda & \cdots\cdots & 0 \\
 & & & \lambda+1 & \lambda & \lambda-1 & \cdots\cdots & 0 \\
 & & & \lambda & \lambda-1 & \lambda-2 & \cdots & 0 \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 & & & 3 & 2 & 1 & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$1\cdot2\cdot3\cdots(n-\lambda-2)\cdot3\cdot4\cdot5\cdots(\lambda+2)pxx+2\cdot3\cdot4\cdots(n-\lambda-1)\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(\lambda+1)qx$$
$$+3\cdot4\cdot5\cdots(n-\lambda)\cdot1\cdot2\cdot3\cdots\lambda r=0.$$

Unde patet pro ternis coefficientibus p, q et r hanc obtineri aequationem quadraticam, quae primo divisa per $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(n-\lambda-2)$ dabit

$$3\cdot4\cdot5\cdots(\lambda+2)pxx+\frac{n-\lambda-1}{1}\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(\lambda+1)\,qx$$
$$+\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1\cdot2}\cdot1\cdot2\cdot3\cdots\lambda r=0,$$

quae denuo per $1\cdot2\cdot3\cdots\lambda$ divisa dabit

$$\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1\cdot2}pxx+\frac{n-\lambda-1}{1}\cdot\frac{\lambda+1}{1}qx+\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1\cdot2}r=0.$$

Unde pro radicibus realibus hoc habetur criterium

$$\frac{(n-\lambda-1)^2(\lambda+1)^2}{1\cdot1}qq>4\cdot\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1\cdot2}pr,$$

quod reducitur ad hoc

$$qq>\frac{\lambda+2}{\lambda+1}\cdot\frac{n-\lambda}{n-\lambda-1}pr.$$

Quemadmodum haec criteria ex charactere[1]) aequationum quadraticarum sunt derivata, ita, si charactere aequationum cubicarum, quarum omnes radices sunt reales, simili modo uti velimus, alia nova criteria impetrabimus sicque certius circa radices imaginarias aequationum iudicium instituere licebit.

PROBLEMA

Characterem completum investigare pro aequationibus cubicis, quarum omnes radices sunt reales.

SOLUTIO

Quoniam constat aequationis cubicae omnes radices esse reales, quoties regula CARDANI ad formulas imaginarias perducit, ponamus aequationem cubicam

$$x^3 + axx + bx + c = 0$$

ex hac forma nasci

$$x + \frac{1}{3}a = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}.$$

Sumtis igitur utrimque cubis prodit

$$x^3 + axx + \frac{1}{3}aax + \frac{1}{27}a^3 = p + q + 3(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q})\sqrt[3]{pq}$$

vel

$$= p + q + (3x + a)\sqrt[3]{pq}$$

seu

$$\begin{aligned} x^3 + axx + \tfrac{1}{3}aax &+ \tfrac{1}{27}a^3 = 0, \\ -3\sqrt[3]{pq} &- p \\ &- q \\ &- a\sqrt[3]{pq} \end{aligned}$$

quae forma cum aequatione proposita comparata praebet

$$b = \frac{1}{3}aa - 3\sqrt[3]{pq} \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{27}a^3 - p - q - a\sqrt[3]{pq};$$

1) In editione principe ubique scriptum legitur: caracter. F. R.

cum ergo sit

$$\sqrt[3]{pq} = \frac{1}{9}aa - \frac{1}{3}b = \frac{aa-3b}{9} \quad \text{hincque} \quad pq = \frac{(aa-3b)^3}{729}$$

et

$$p + q = \frac{1}{27}a^3 - \frac{a(aa-3b)}{9} - c = \frac{1}{27}a(9b - 2aa) - c,$$

colligimus

$$(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq$$
$$= \frac{1}{729}aa(9b-2aa)^2 - \frac{2}{27}ac(9b-2aa) + cc - \frac{4}{729}(aa-3b)^3.$$

Quae quantitas si fuerit negativa, formula $p - q$ ideoque ambae litterae p et q obtinebunt valores imaginarios; quod cum sit signum radicum realium, statuamus

$$\left(\frac{1}{27}a(9b-2aa) - c\right)^2 - \frac{4}{729}(aa-3b)^3 = -\omega$$

hincque

$$\frac{1}{27}a(9b-2aa) - c = \pm\sqrt{\left(\frac{4}{729}(aa-3b)^3 - \omega\right)}$$

et

$$c = \frac{1}{27}a(9b-2aa) \mp \sqrt{\left(\frac{4}{729}(aa-3b)^3 - \omega\right)}.$$

Unde pro c deducuntur hi limites

$$c < \frac{1}{27}a(9b-2aa) + \frac{2}{27}(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)},$$

$$c > \frac{1}{27}a(9b-2aa) - \frac{2}{27}(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}.$$

Vel quoniam inde habetur

$$bb - 3ac = \frac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b) \pm 3a\sqrt{\left(\frac{4}{729}(aa-3b)^3 - \omega\right)},$$

pro $bb - 3ac$ hi oriuntur limites

$$bb - 3ac < \frac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b) + \frac{2}{9}a(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)},$$

$$bb - 3ac > \frac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b) - \frac{2}{9}a(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}.$$

Unde deducimus

$$\frac{bb-3ac}{aa-3b}<\frac{2aa-3b+2a\sqrt{(aa-3b)}}{9}$$

seu

$$\frac{bb-3ac}{aa-3b}<\left(\frac{a+\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$$

et

$$\frac{bb-3ac}{aa-3b}>\left(\frac{a-\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2.$$

Quoties ergo formulae $\frac{bb-3ac}{aa-3b}$ valor intra hos limites

$$\left(\frac{a+\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{a-\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$$

continetur, certi sumus omnes radices nostrae aequationis cubicae esse reales. In quo adeo consistit character completus, quem quaerimus.

COROLLARIUM 1

Quia limites inventi locum habere nequeunt, nisi $aa-3b$ sit quantitas positiva, hinc statim perspicuum est radices reales esse non posse, nisi sit

$$aa>3b;$$

quod criterium iam in supra allatis continetur.

COROLLARIUM 2

Deinde cum ambo limites sint quadrata ideoque quantitates positivae, valor formulae $\frac{bb-3ac}{aa-3b}$ debet esse positivus; quare, cum sit $aa>3b$, necesse est, ut fiat quoque

$$bb>3ac;$$

quod est alterum criterium supra iam allatum.

COROLLARIUM 3

Videmus ergo non solum ambo criteria ante inventa in hoc charactere contineri, sed hunc characterem praeterea aliam conditionem complecti; quae

nisi impleatur, radices non futurae sint reales, etiamsi fuerit $aa > 3b$ et $bb > 3ac$.

Mirum igitur videri poterit, quod unicus character plura criteria in se complectatur.

SCHOLION 1

Si in aequatione cubica sumamus esse $c = 0$, ut ea abeat in quadraticam, manifestum est ad realitatem radicum requiri, ut sit

$$aa > 4b,$$

atque adeo in hoc contineri characterem completum. Interim tamen si in nostro charactere invento statuamus $c = 0$, non tam facile patet inde sequi $aa > 4b$; prodit enim [1])

$$\frac{bb}{aa-3b} \gtrless \left(\frac{a \mp \sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2;$$

operae igitur erit pretium investigare, quomodo iste character ad simplicem formam $aa > 4b$ reducatur.

Revertamur igitur ad conditionem primo inventam, quae posito $c = 0$ abit in hanc formam

$$aa(9b - 2aa)^2 - 4(aa - 3b)^3 < 0,$$

quae contrahitur in hanc

$$-27bb(aa - 4b) < 0$$

seu

$$bb(aa - 4b) > 0,$$

unde manifesto sequitur

$$aa > 4b.$$

Ceterum tamen memoratu dignum hic usu venit, quod conditio

$$\frac{bb}{aa-3b} \lessgtr \left(\frac{a \pm \sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$$

prorsus conveniat cum ista $aa > 4b$, ita ut neutra plus involvat quam altera sicque haec convenientia tamquam insigne Theorema spectari possit.

1) De hac scribendi ratione vide Conclusionem p. 233. F. R.

Hoc quidem ostendi potest quantitatem $\frac{bb}{aa-3b}$ alterutri limiti ipsi fore aequalem, si fuerit vel $aa = 4b$ vel $aa = \infty$; intra quos casus extremos utique cadit $aa > 4b$.

SCHOLION 2

Iste character completus alio modo prorsus singulari investigari potest, unde autem non patet eum esse completum, nisi de eo iam certiores essemus facti. Sequenti autem modo ratiocinium institui potest.

Si aequatio

$$x^3 + axx + bx + c = 0$$

omnes radices habet reales, tum posito

$$x = y + p$$

aequatio resultans

$$y^3 + (a + 3p)yy + (b + 2ap + 3pp)y + c + bp + app + p^3 = 0$$

etiam habebit radices omnes reales. Criteria autem iam cognita dant

I. $(a + 3p)^2 > 3(b + 2ap + 3pp)$, hoc est $aa > 3b$;

II. $(b + 2ap + 3pp)^2 > 3(a + 3p)(c + bp + app + p^3)$, hoc est
$$bb + (ab - 9c)p + (aa - 3b)pp > 3ac,$$

quae conditio impletur, tam si $p = 0$, quo fit $bb > 3ac$, quam si $p = \infty$, quia $aa > 3b$.

Tribuatur igitur ipsi p eiusmodi valor, quo formula illa fit minima, atque etiamnunc illa erit $> 3ac$. Verum formula $A + Bp + Cpp$ fit minima sumto $p = \frac{-B}{2C}$ eiusque valor minimus erit $A - \frac{BB}{4C}$; facta ergo applicatione habebimus

$$bb - \frac{(ab - 9c)^2}{4(aa - 3b)} > 3ac.$$

Quia $aa > 3b$, multiplicetur per $4(aa - 3b)$ et obtinebimus facta evolutione

$$3bb(aa - 4b) > 81cc + 6ac(2aa - 9b),$$

quod criterium completum supra inventum continet.

CONCLUSIO

Pro applicatione ergo ad aequationes altiorum graduum si methodo ante exposita inde deriventur aequationes cubicae huius formae

$$px^3 + qxx + rx + s = 0,$$

criterium radicum realium in hoc consistit, ut sit

$$\frac{rr - 3qs}{qq - 3pr} \lessgtr \left(\frac{q \pm \sqrt{(qq - 3pr)}}{3p}\right)^2,$$

qua scribendi ratione indicatur quantitatem $\frac{rr - 3qs}{qq - 3pr}$ intra hos limites

$$\left(\frac{q + \sqrt{(qq - 3pr)}}{3p}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{q - \sqrt{(qq - 3pr)}}{3p}\right)^2$$

contineri debere.

APPLICATIO AD AEQUATIONEM QUARTI ORDINIS

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Hinc methodo supra ostensa derivantur hae duae aequationes cubicae

$$4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c = 0,$$

$$ax^3 + 2bx^2 + 3cx + 4d = 0.$$

Unde, si omnes radices sunt reales, inveniuntur duo sequentia nova criteria

$$\frac{4bb - 9ac}{9aa - 24b} \lessgtr \left(\frac{3a \pm \sqrt{(9aa - 24b)}}{12}\right)^2$$

et

$$\frac{9cc - 24bd}{4bb - 9ac} \lessgtr \left(\frac{2b \pm \sqrt{(4bb - 9ac)}}{3a}\right)^2.$$

Simili modo applicatio fieri posset ad aequationes quinti gradus, unde tria criteria obtinerentur, et ita porro ad aequationes altiorum graduum.

Verum res adeo in genere praestari potest, ita ut proposita aequatione cuiuscumque ordinis inter quaternos eius coefficientes successivos tale crite-

rium inveniri possit; eodem scilicet modo calculum institui oportet, quo supra pro criteriis prioris ordinis sumus usi (vide Scholion ante Problema):

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + px^{\lambda+3} + qx^{\lambda+2} + rx^{\lambda+1} + sx^{\lambda} + \cdots + \mathfrak{p}x^2 + \mathfrak{q}x + \mathfrak{r} = 0$$

0	1	2	$\ldots$	$n-\lambda-3$	$n-\lambda-2$	$n-\lambda-1$	$n-\lambda \ldots$	$n-2$	$n-1$	n
	0	1	$\ldots$	$n-\lambda-4$	$n-\lambda-3$	$n-\lambda-2$	$n-\lambda-1 \ldots$	$n-3$	$n-2$	$n-1$
		0	$\ldots$	$n-\lambda-5$	$n-\lambda-4$	$n-\lambda-3$	$n-\lambda-2 \ldots$	$n-4$	$n-3$	$n-2$
				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
				1	2	3	4			
				$\lambda+3$	$\lambda+2$	$\lambda+1$	$\lambda \ldots$	2	1	0
				$\lambda+2$	$\lambda+1$	λ	$\lambda-1 \ldots$	1	0	
				$\lambda+1$	λ	$\lambda-1$	$\lambda-2 \ldots$	0		
				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
				4	3	2	1			

Hinc ergo per continuas differentiationes ad hanc aequationem cubicam pervenitur

$$\begin{aligned} &1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-\lambda-3)\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdots(\lambda+3)px^3 + 2\cdot 3\cdot 4\cdots(n-\lambda-2)\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(\lambda+2)qx^2 \\ &+ 3\cdot 4\cdot 5\cdots(n-\lambda-1)\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(\lambda+1)rx + 4\cdot 5\cdot 6\cdots(n-\lambda)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots\lambda s = 0, \end{aligned}$$

quae divisa per $1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-\lambda-3)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots\lambda$ reducitur ad hanc formam

$$\begin{aligned} &\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{1\cdot 2\cdot 3}px^3 + \frac{n-\lambda-2}{1}\cdot\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1\cdot 2}qxx \\ &+ \frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\lambda+1}{1}rx + \frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)(n-\lambda)}{1\cdot 2\cdot 3}s = 0 \end{aligned}$$

seu

$$\begin{aligned} &(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)px^3 + 3(\lambda+1)(\lambda+2)(n-\lambda-2)qxx \\ &+ 3(\lambda+1)(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)rx + (n-\lambda-2)(n-\lambda-1)(n-\lambda)s = 0. \end{aligned}$$

Quare ex aequatione generali quacumque

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + dx^{n-4} + ex^{n-5} + fx^{n-6} + gx^{n-7} + hx^{n-8} + \text{etc.} = 0$$

elicientur sequentes aequationes cubicae:

I. Si $\lambda = n - 3$, erit

$$n(n-1)(n-2)x^3 + 1\cdot 3(n-1)(n-2)axx + 1\cdot 2\cdot 3(n-2)bx + 1\cdot 2\cdot 3c = 0$$

seu

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}axx + \frac{n-2}{1}bx + c = 0;$$

II. si $\lambda = n - 4$, erit

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}ax^3 + 2\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}bxx + 3\cdot\frac{n-3}{1}cx + 4d = 0;$$

III. si $\lambda = n - 5$, erit

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3}bx^3 + 3\cdot\frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}cxx + 6\cdot\frac{n-4}{1}dx + 10e = 0;$$

IV. si $\lambda = n - 6$, erit

$$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}cx^3 + 4\cdot\frac{(n-4)(n-5)}{1\cdot 2}dxx + 10\cdot\frac{n-5}{1}ex + 20f = 0$$

etc.

Quodsi ergo aequatio proposita omnes radices habet reales, singulae hae aequationes cubicae etiam suas radices habebunt reales. Unde sequentia oriuntur criteria:

$$\frac{bb - \frac{3}{2}\cdot\frac{n-1}{n-2}ac}{aa - \frac{2n}{n-1}b} \lessgtr \frac{1}{4}\frac{(n-1)^2}{n^2}\left(a \pm \sqrt{\left(aa - \frac{2n}{n-1}b\right)}\right)^2,$$

$$\frac{cc - \frac{4}{3}\cdot\frac{n-2}{n-3}bd}{bb - \frac{3}{2}\cdot\frac{n-1}{n-2}ac} \lessgtr \frac{4(n-2)^2}{9(n-1)^2 aa}\left(b \pm \sqrt{\left(bb - \frac{3}{2}\cdot\frac{n-1}{n-2}ac\right)}\right)^2,$$

$$\frac{dd - \frac{5}{4}\cdot\frac{n-3}{n-4}ce}{cc - \frac{4}{3}\cdot\frac{n-2}{n-3}bd} \lessgtr \frac{9(n-3)^2}{16(n-2)^2 bb}\left(c \pm \sqrt{\left(cc - \frac{4}{3}\cdot\frac{n-2}{n-3}bd\right)}\right)^2,$$

$$\frac{ee - \frac{6}{5}\cdot\frac{n-4}{n-5}df}{dd - \frac{5}{4}\cdot\frac{n-3}{n-4}ce} \lessgtr \frac{16(n-4)^2}{25(n-3)^2 cc}\left(d \pm \sqrt{\left(dd - \frac{5}{4}\cdot\frac{n-3}{n-4}ce\right)}\right)^2$$

etc.,

unde lex progressionis clare perspicitur.

OBSERVATIO

Quae hactenus attulimus, praeter primum criterium ad duo genera reducuntur, quae proprietates aequationum, quarum omnes radices sunt reales, in se complectuntur; primum genus eiusmodi relationes suppeditat, quae inter ternos quosque coefficientes successivos locum habent et quae iam pridem sunt cognitae. Alterum genus vero eiusmodi praebet relationes, quae inter quaternos quosque coefficientes successivos necessario subsistere debent, siquidem omnes radices fuerint reales. Circa utrumque genus observasse iuvabit nullam accuratiorem relationem vel inter ternos vel quaternos coefficientes successivos exhiberi posse.

Quoties vel unica harum relationum in quapiam aequatione locum non invenit, certo concludere licet non omnes radices esse reales; utrum autem duae tantum vel plures futurae sint imaginariae, hinc non definitur. Ex defectu quidem unici criterii concludi oportet ad minimum duas radices fore imaginarias neque tamen hinc sequitur duorum defectum quatuor radices imaginarias indicare.

Si enim aequatio proposita fuerit tertii gradus, duo characteres primi generis ad eam applicari possunt; qui etsi ambo deficiant, aequatio tamen non plures quam duas radices imaginarias habere potest.

Quemadmodum hos characteres ex indole aequationum quadraticarum et cubicarum, quarum radices sunt reales, derivavimus, ita, si commode aequationum biquadraticarum characterem completum pro casu, quo omnes radices sunt reales, exprimere liceret, simili modo criteria tertii generis inde deducere possemus, quibus relationes inter quinos quosque coefficientes successivos continerentur; verum cum formulae nimis prodirent prolixae, ad hunc usum prorsus ineptae videntur.

CONCLUSIO

Cum hic plura principia in subsidium sint vocata, coronidis loco ostendam, quomodo omnia haec criteria ex duobus tantum principiis methodo satis singulari deduci queant.

Proposita scilicet aequatione cuiuscumque gradus

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + \text{etc.} = 0,$$

cuius omnes radices sint reales, pro priori principio assumo semper esse

$aa > 2b$, quod per se est manifestum, cum formula $aa - 2b$ exprimat summam quadratorum singularum radicum; alterum principium in hoc consistit, quod huius aequationis uno gradu inferioris

$$ax^{m-1} + 2bx^{m-2} + 3cx^{m-3} + 4dx^{m-4} + \text{etc.} = 0$$

etiam omnes radices futurae sint reales, quod supra est demonstratum.

His iam duobus principiis constitutis ratiocinium ita prosequor.

I. Pro criteriis primi generis statuo $x = y + p$ denotante p quantitatem realem, ut aequatio hinc resultans etiamnunc omnes suas radices habeat reales; quae erit

$$\begin{array}{llll} y^m + mpy^{m-1} & + \frac{m(m-1)}{2}ppy^{m-2} & + \frac{m(m-1)(m-2)}{6}p^3y^{m-3} & + \text{etc.} = 0. \\ \quad\; + \; a & + (m-1)ap & + \frac{(m-1)(m-2)}{2}app & \\ & + \qquad\quad b & + \qquad (m-2)bp & \\ & & + \qquad\qquad c & \end{array}$$

Per prius igitur principium necesse est, ut hic sit

$$(mp + a)^2 > m(m-1)pp + 2(m-1)ap + 2b$$

seu facta evolutione

$$mpp + 2ap + aa > 2b;$$

quod cum de omnibus valoribus ipsius p valere debeat, necesse est, ut etiam de eo valeat, quo ea formula fit minima, quod evenit, si sumatur $p = \frac{-a}{m}$; tum autem habebitur

$$aa > \frac{2m}{m-1}b,$$

quod est primum criterium primi generis; ex quo reliqua per aequationes, quas secundum principium praebet, successive derivantur.

Aequationes	Criteria
$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \text{etc.} = 0,$	$aa > \frac{2m}{m-1}b,$
$ax^{m-1} + 2bx^{m-2} + 3cx^{m-3} + \text{etc.} = 0,$	$bb > \frac{3}{2}\cdot\frac{m-1}{m-2}ac,$
$bx^{m-2} + 3cx^{m-3} + 6dx^{m-4} + \text{etc.} = 0,$	$cc > \frac{4}{3}\cdot\frac{m-2}{m-3}bd,$
$cx^{m-3} + 4dx^{m-4} + 10ex^{m-5} + \text{etc.} = 0$	$dd > \frac{5}{4}\cdot\frac{m-3}{m-4}ce$
etc.	etc.

II. Pro criteriis secundi generis retenta substitutione $x = y + p$ aequationis inde resultantis reiecto primo termino consideremus tres sequentes ad eosque criterium modo inventum $bb > \frac{3}{2}\cdot\frac{m-1}{m-2}ac$ applicemus, quod hanc aequationem praebebit

$$\left(\frac{m(m-1)}{2}pp + (m-1)ap + b\right)^2$$

$$> \frac{3}{2}\cdot\frac{m-1}{m-2}(mp+a)\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{6}p^3 + \frac{(m-1)(m-2)}{2}app + (m-2)bp + c\right),$$

unde facta evolutione pervenietur ad sequentem conditionem

$$\left(aa - \frac{2m}{m-1}b\right)pp + \frac{2}{m-1}\left(ab - \frac{3m}{m-2}c\right)p + \frac{4}{(m-1)^2}bb > \frac{6}{(m-1)(m-2)}ac.$$

Statuatur nunc

$$p = \frac{-(ab - \frac{3m}{m-2}c)}{(m-1)(aa - \frac{2m}{m-1}b)},$$

ut valor primi membri fiat minimus, obtinebimusque hanc conditionem multiplicando per $\frac{(m-1)^2}{4}$

$$bb - \frac{(ab - \frac{3m}{m-2}c)^2}{4(aa - \frac{2m}{m-1}b)} > \frac{3}{2}\cdot\frac{m-1}{m-2}ac.$$

Quia iam $aa > \frac{2m}{m-1}b$, conditionem hanc per $4(aa - \frac{2m}{m-1}b)$ multiplicare licebit; tum autem facta evolutione obtinebimus hoc criterium secundi generis

$$bb\left(3aa - \frac{8m}{m-1}b\right) > \frac{9mm}{(m-2)^2}cc + \frac{6ac}{m-2}((m-1)aa - 3mb),$$

ex quo deinceps eruitur, ut supra invenimus,

$$\frac{bb - \frac{3}{2}\cdot\frac{m-1}{m-2}ac}{aa - \frac{2m}{m-1}b} \lesseqgtr \frac{1}{4}\frac{(m-1)^2}{m^2}\left(a \pm \sqrt{\left(aa - \frac{2m}{m-1}b\right)}\right)^2.$$

Quae formula ad aequationes differentiales applicata dabit reliqua criteria huius secundi generis.

Hinc concludere licet, si quis simili modo progredi et secundum criterium huius generis ad aequationem transformatam posito $x = y + p$ accommodare vellet, inde novum criterium tertii ordinis deduci posse, quod contineret relationem inter quinos coefficientes successivos. Verum tum in formula resultante littera p ad quartam dimensionem esset ascensura, unde eius valor eam formulam minimam reddens non amplius commode definiri posset. Quamobrem hanc investigationem ulterius non prosequor eo contentus, quod criteria secundi generis, quae adhuc nova videntur, exhibuerim.

DE INVENTIONE QUOTCUMQUE MEDIARUM PROPORTIONALIUM CITRA RADICUM EXTRACTIONEM

Commentatio 395 indicis Enestroemiani
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **14** (1769): I, 1770, p. 188—214
Summarium ibidem p. 23—25

SUMMARIUM

In hac dissertatione Illustr. Auctor methodum exponit facilem et elegantissimam medias quotcumque proportionales ope approximationis quantumvis accurate inveniendi. Fundamentum autem, cui haec superstruitur methodus, in eo situm est, quod, si numeri quicumque continue proportionales proponantur, eorum quoque differentiae in continua proportione geometrica eiusdem exponentis sint, sin vero series numerorum propositorum a proportione geometrica aliquantum aberret, multo maiorem fore differentiarum aberrationem, ex quo vicissim colligitur, si proponatur series numerorum a proportione geometrica aliquantum aberrantium, summas horum numerorum ad proportionem geometricam propius accedere.

Propositis igitur duobus numeris A et rA, inter quos media proportionalis quaerenda est, ita procedere licet, ut assumtis pro lubitu binis numeris a et b inde formentur hi tres $a+b$, $ar+b$ et $ar+br$; quorum bini priores si compendii causa vocentur a', b', inde iterum hos numeros elicere licet $a'+b'$, $a'r+b'$ necnon ulterius progrediendo hos $a''+b''$, $a''r+b''$, ex quo intelligitur eiusmodi fractiones $\frac{b''}{a''}$, $\frac{b'''}{a'''}$ eo propius ad valorem mediae proportionalis accedere, quo longius haec operatio continuata fuerit.

Simili ratione duae mediae proportionales inveniuntur assumendo primum pro lubitu tres numeros a, b, c, ex iisdem vero continuo formando alios hac lege, ut sit $a'=a+b+c$, $b'=b+c+ar$, $c'=c+ar+br$; quo enim ulterius haec operatio continuetur, eo propius

eiusmodi numeri $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, $c^{(n)}$, $ra^{(n)}$ quatuor numeros in proportione geometrica progredientes exhibebunt. Sic quidem si inter duos numeros rationem duplam tenentes quaerantur bini medii proportionales, ponendo $a=1$, $b=1$, $c=1$ post septimam operationem invenietur $a^{(7)}=10080$, $b^{(7)}=12700$, $c^{(7)}=16001$, unde hae rationes $\frac{12700}{10080}$ et $\frac{16001}{12700}$ valorem mediorum proportionalium satis exacte exhibebunt erroribus infra decies millesimam partem unitatis subsistentibus.[1])

Consimili autem operatione uti licet ad tres vel quatuor medias proportionales investigandas, quin etiam in genere huius methodi ope inter duos numeros datam tenentes rationem quotcumque medii proportionales expedite inveniri possint. Series autem numerorum

$$a,\ a',\ a'' \text{ etc.},\quad b,\ b',\ b'' \text{ etc.},\quad c,\ c',\ c'' \text{ etc.},\quad d,\ d',\ d'' \text{ etc.}$$

singularem merentur attentionem, quum earum terminos generales semper concinne exprimere liceat et ita quidem, ut mutua relatio, quae inter has series intercedit, inde facillime perspiciatur.

PROPOSITIO 1

1. *Si numeri a, b, c, d etc. sint continue proportionales, etiam differentiae $b-a$, $c-b$, $d-c$ etc. erunt in proportione geometrica continua eiusdem exponentis; ac si prior series a proportione geometrica aberret, posterior multo magis aberrabit.*

DEMONSTRATIO

Prior propositionis pars in elementis est demonstrata; pro altera autem parte ponamus exponentem rationis geometricae $=r$, ut secundum proportionem geometricam foret $b=ar$, $c=ar^2$, $d=ar^3$ etc. Sit autem $b=ar+z$ manente $c=arr$, ita ut z sit error termini b a proportione geometrica, eruntque differentiae $b-a=a(r-1)+z$ et $c-b=ar(r-1)-z$, quarum ratio est

$$\frac{ar(r-1)-z}{a(r-1)+z}=r-\frac{(r+1)z}{a(r-1)+z},$$

cuius aberratio ab exponente r utique maior est quam rationis $\frac{b}{a}=r+\frac{z}{a}$. Unde etiam facile intelligitur, si seriei a, b, c, d etc. plures termini a ratione geometrica $1:r$ aberrent, in serie differentiarum maiores errores inesse debere.

1) Vide notas p. 251. F. R.

COROLLARIUM

2. Vicissim ergo quantumvis series differentiarum a proportione geometrica aberraverit, series terminorum ipsa propius ad hanc proportionem accedet.

PROPOSITIO 2

3. *Inter duos numeros datam rationem* $1:r$ *tenentes medium proportionalem invenire sine extractione radicis.*

SOLUTIO

Sint numeri propositi A et Ar mediusque proportionalis prope saltem verus $=B$, ut hi tres numeri A, B, Ar progressionem a geometrica parum aberrantem constituant. Statuantur autem differentiae pro lubitu

$$B-A=a \quad \text{et} \quad Ar-B=b$$

hincque colligitur

$$A(r-1)=a+b \quad \text{et} \quad B(r-1)=ar+b,$$

ita ut sit

$$A=\frac{a+b}{r-1} \quad \text{et} \quad B=\frac{ar+b}{r-1};$$

nihil autem impedit, quominus numeri A et B in ratione $1:r-1$ augeantur, ut in integris habeamus

$$A=a+b \quad \text{et} \quad B=ar+b,$$

unde sumtis pro lubitu binis numeris a et b hi tres numeri

$$a+b, \quad ar+b, \quad ar+br,$$

quorum primus est ad tertium in ratione data $1:r$, eo propius ad progressionem geometricam accedent, quo minus numerorum assumtorum a et b ratio a ratione $1:\sqrt{r}$ aberraverit; seu fractio $\frac{ar+b}{a+b}$ propius ad valorem $\sqrt{r}$ accedet quam fractio $\frac{b}{a}$. Quo igitur valorem medii proportionalis $\sqrt{r}$ inter 1 et r accuratius obtineamus, statuamus $a+b=a'$ et $ar+b=b'$ atque

fractio $\frac{a'r+b'}{a'+b'}$ adhuc propius valorem $\sqrt{r}$ exhibebit. Simili ergo modo si porro statuamus

$$a'+b'=a'', \quad a''+b''=a''', \quad a'''+b'''=a'''' \quad \text{etc.,}$$
$$a'r+b'=b'', \quad a''r+b''=b''', \quad a'''r+b'''=b'''' \quad \text{etc.,}$$

fractiones

$$\frac{b''}{a''}, \quad \frac{b'''}{a'''}, \quad \frac{b''''}{a''''} \quad \text{etc.}$$

continuo accuratius valorem medii proportionalis $\sqrt{r}$ exprimcnt.

COROLLARIUM 1

4. Cum igitur quaestio sit de medio proportionali inter numeros $1:r$, sumtis pro lubitu duobus numeris a et b formentur inde duae series

$$a, \quad a', \quad a'', \quad a''', \quad a'''' \quad \text{etc.,}$$
$$b, \quad b', \quad b'', \quad b''', \quad b'''' \quad \text{etc.}$$

hac lege, ut sit

$$a'=a+b, \quad a''=a'+b', \quad a'''=a''+b'', \quad a''''=a'''+b''' \quad \text{etc.,}$$
$$b'=ar+b, \quad b''=a'r+b', \quad b'''=a''r+b'', \quad b''''=a'''r+b''' \quad \text{etc.,}$$

et fractiones

$$\frac{b}{a}, \quad \frac{b'}{a'}, \quad \frac{b''}{a''}, \quad \frac{b'''}{a'''}, \quad \frac{b''''}{a''''} \quad \text{etc.}$$

continuo propius valorem quaesitum $\sqrt{r}$ exhibebunt.

COROLLARIUM 2

5. Vel si constituatur progressio a ratione geometrica continua quantumvis aberrans, cuius termini alterni sint in ratione $1:r$

$$a, \quad b, \quad ar, \quad br, \quad ar^2, \quad br^2, \quad ar^3, \quad br^3, \quad ar^4, \quad br^4 \quad \text{etc.,}$$

hinc binis terminis coniungendis nova formetur progressio

$$a+b, \quad b+ar, \quad ar+br, \quad br+ar^2, \quad ar^2+br^2, \quad br^2+ar^3 \quad \text{etc.}$$

haecque magis ad progressionem geometricam accedet.

COROLLARIUM 3

6. Si hic denuo bini termini coniungantur, prodibit haec series

$$a(r+1)+2b,\quad 2ar+b(r+1),\quad ar(r+1)+2br,\quad 2ar^2+br(r+1)\quad \text{etc.}$$

hincque porro simili modo istae

$$a(3r+1)+b(r+3),\quad ar(r+3)+b(3r+1),\quad ar(3r+1)+br(r+3)\quad \text{etc.},$$
$$a(rr+6r+1)+b(4r+4),\quad ar(4r+4)+b(rr+6r+1),\quad ar(rr+6r+1)+br(4r+4)\ \text{etc.},$$
$$a(5rr+10r+1)+b(rr+10r+5),\quad ar(rr+10r+5)+b(5rr+10r+1)\quad \text{etc.},$$

quae continuo propius ad progressionem geometricam convergunt.

SCHOLION

7. Totum ergo negotium huc redit, ut binae series a, a', a'', a''', a'''' etc., b, b', b'', b''', b'''' etc. formentur, quippe quarum termini homologi continuo propius rationem $1:\sqrt{r}$ exhibebunt. Cum autem singuli termini post primos utramque litteram a et b involvant, ita ut quilibet terminus utriusque hanc habiturus sit formam $Ma+Nb$, primum observo posteriorem seriem ex priori oriri, si loco litterarum a et b scribantur b et ar. Quare si prioris seriei terminus indici n respondens fuerit

$$a^{(n)}=Ma+Nb,$$

posterioris seriei terminus eidem indici n respondens erit

$$b^{(n)}=Mb+Nar,$$

ita ut fractio

$$\frac{Mb+Nar}{Ma+Nb}$$

eo exactius valorem $\sqrt{r}$ sit expressura, quo maior fuerit exponens n, atque adeo sumto $n=\infty$ verus valor $\sqrt{r}$ prodire debeat. Ita si exempli gratia capiatur $r=2$, series illae binae ita se habebunt

a	$a+b$	$3a+2b$	$7a+5b$	$17a+12b$	$41a+29b$
b	$2a+b$	$4a+3b$	$10a+7b$	$24a+17b$	$58a+41b$
$2a$	$2a+2b$	$6a+4b$	$14a+10b$	$34a+24b$	$82a+58b$

cui tertiam subscripsi primae duplam, quippe cuius ope continuatio facillime instituitur. Quicumque ergo numeri hic pro a et b accipiantur, series media continebit satis prope media proportionalia inter primam et tertiam, uti facile perspicitur.

Simili modo sumto $r = 3$ hae series ita se habebunt

a	$a + b$	$4a + 2b$	$10a + 6b$	$28a + 16b$	$76a + 44b$
b	$3a + b$	$6a + 4b$	$18a + 10b$	$48a + 28b$	$132a + 76b$
$3a$	$3a + 3b$	$12a + 6b$	$30a + 18b$	$84a + 48b$	$228a + 132b$

eritque ergo ex ultimis $\frac{132a + 76b}{76a + 44b} = \frac{33a + 19b}{19a + 11b}$ eo exactius $= \sqrt{3}$, quo propius ratio $\frac{b}{a}$ eo accedat; ita sumto $b = 2$ et $a = 1$ fit admodum exacte $\sqrt{3} = \frac{71}{41}$ et nunc sumto $b = 71$ et $a = 41$ exactissime erit $= \frac{2702}{1560} = \frac{1351}{780} = \sqrt{3}$ errore ne millionesimam quidem partem unitatis attingente.

PROPOSITIO 3

8. *Investigare legem progressionis binarum illarum serierum* a, a', a'', a''' *etc. et* b, b', b'', b''' *etc., quarum termini homologi continuo propius rationem* $1 : \sqrt{r}$ *exprimunt.*

SOLUTIO

Quoniam novimus omnes terminos binas litteras a et b ita complecti, ut in forma $Ma + Nb$ contineantur, ac si pro priori statuatur in genere $a^{(n)} = Ma + Nb$, tum pro posteriori fore $b^{(n)} = Mb + Nar$, hinc lex progressionis suppeditat terminos sequentes

$$a^{(n+1)} = (M + Nr)a + (M + N)b$$

et

$$b^{(n+1)} = (M + Nr)b + (M + N)ra,$$

ex quo in legem progressionis utriusque seriei inquiri oportet. Quo igitur scrutemur, quemadmodum primae seriei quilibet terminus definiatur, consideremus hanc seriem sub ista forma generaliori

$$a + a'x^1 + a''x^2 + a'''x^3 + a''''x^4 + \text{etc.},$$

cuius in infinitum continuatae summa fingatur $Pa + Qb$; et quoniam altera ex hac nascitur, dum loco a et b scribitur b et ra, erit

$$b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + b''''x^4 + \text{etc.} = Pb + Qra.$$

Addantur hae series invicem, et quia est

$$a + b = a', \quad a' + b' = a'', \quad a'' + b'' = a''' \quad \text{etc.},$$

erit

$$a' + a''x + a'''x^2 + a''''x^3 + \text{etc.} = (P + Qr)a + (P + Q)b.$$

Multiplicemus hanc seriem per x et a prima subtrahamus prodibitque

$$a = Pa + Qb - (P + Qr)ax - (P + Q)bx.$$

Quoniam vero quantitates P et Q a litteris a et b non pendent, hinc duae resultant aequationes

$$1 = P - Px - Qrx \quad \text{et} \quad 0 = Q - Px - Qx,$$

unde deducimus has determinationes

$$P = \frac{1-x}{(1-x)^2 - rxx} = \frac{1-x}{1-2x-(r-1)xx}$$

et

$$Q = \frac{Px}{1-x} = \frac{x}{1-2x-(r-1)xx}.$$

Quocirca prior series $a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \text{etc.}$ nascitur ex evolutione huius fractionis

$$\frac{a(1-x)+bx}{1-2x-(r-1)xx},$$

posterior vero $b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + \text{etc.}$ ex evolutione huius

$$\frac{b(1-x)+arx}{1-2x-(r-1)xx},$$

ita ut utraque sit series recurrens secundi ordinis scala relationis existente $2,\ r-1$ hincque pro serie priori a, a', a'', a''', a'''' etc. sit primo $a' = a + b$, tum vero

$$a'' = 2a' + (r-1)a, \quad a''' = 2a'' + (r-1)a', \quad a'''' = 2a''' + (r-1)a'' \quad \text{etc.};$$

ex hac vero nascitur altera ponendo $a = b$ et $b = ra$. Hinc adeo huius seriei terminum generalem definire licet, ad quod valores quantitatum P et Q in fractiones simplices resolvi oportet. Cum igitur denominatoris communis factor sit $1 - x - x\sqrt{r} = 1 - x(1 + \sqrt{r})$, pro quantitate P statuatur fractio simplex inde nata $= \frac{\mathfrak{A}}{1 - x(1 + \sqrt{r})}$ ac demonstravi[1]) fore $\mathfrak{A} = \frac{1-x}{1 - x + x\sqrt{r}}$ posito $1 - x = x\sqrt{r}$, unde fit $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}$; pro altero autem factore tantum $\sqrt{r}$ negative accipi opus est, ita ut sit

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - x(1 + \sqrt{r})} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - x(1 - \sqrt{r})}.$$

Simili modo pro Q si fractio partialis ex denominatoris factore $1 - x(1 + \sqrt{r})$ nata ponatur $\frac{\mathfrak{A}}{1 - x(1 + \sqrt{r})}$, reperitur $\mathfrak{A} = \frac{x}{1 - x + x\sqrt{r}}$ posito $1 - x = x\sqrt{r}$ indeque $\mathfrak{A} = \frac{1}{2\sqrt{r}}$. Quare ipsi $\sqrt{r}$ binos valores tribuendo fit

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cdot \frac{1}{1 - x(1 + \sqrt{r})} - \frac{1}{2\sqrt{r}} \cdot \frac{1}{1 - x(1 - \sqrt{r})};$$

sicque summa prioris seriei $a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 +$ etc. erit

$$= \frac{a\sqrt{r} + b}{2\sqrt{r}} \cdot \frac{1}{1 - x(1 + \sqrt{r})} + \frac{a\sqrt{r} - b}{2\sqrt{r}} \cdot \frac{1}{1 - x(1 - \sqrt{r})}.$$

Cum nunc ex utraque parte progressio nascatur geometrica, prodit nostrae seriei terminus generalis

$$\frac{a\sqrt{r} + b}{2\sqrt{r}}(1 + \sqrt{r})^n x^n + \frac{a\sqrt{r} - b}{2\sqrt{r}}(1 - \sqrt{r})^n x^n,$$

ita ut sit indefinite

$$a^{(n)} = \frac{a\sqrt{r} + b}{2\sqrt{r}}(1 + \sqrt{r})^n + \frac{a\sqrt{r} - b}{2\sqrt{r}}(1 - \sqrt{r})^n$$

et pro altera serie

$$b^{(n)} = \frac{b + a\sqrt{r}}{2}(1 + \sqrt{r})^n + \frac{b - a\sqrt{r}}{2}(1 - \sqrt{r})^n.$$

---

1) Vide *Introductionem in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, t. I cap. II; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 8. F. R.

COROLLARIUM

9. Ex hoc termino generali demum plene convincimur fore sumto exponente n infinito

$$\frac{b^{(n)}}{a^{(n)}} = \sqrt{r};$$

cum enim tum potestas $(1-\sqrt{r})^n$ prae priori $(1+\sqrt{r})^n$ evanescat, erit utique

$$\frac{b^{(n)}}{a^{(n)}} = \frac{b\sqrt{r}+ar}{a\sqrt{r}+b} = \sqrt{r}.$$

Unde simul patet, quo maior capiatur exponens n, eo propius ad veritatem accedi.

SCHOLION

10. Eadem quidem veritas etiam hac ratione ostendi potest. Posito generatim $a^{(n)} = Ma + Nb$ erit $b^{(n)} = Mb + Nar$ et termini sequentes [erunt]

$$a^{(n+1)} = (M+Nr)a + (M+N)b \quad \text{et} \quad b^{(n+1)} = (M+Nr)b + (M+N)ar.$$

Iam casu $n = \infty$ nullum dubium superesse potest, quin sit $\frac{b^{(n+1)}}{a^{(n+1)}} = \frac{b^{(n)}}{a^{(n)}}$, unde necesse est sit

$$\frac{(M+Nr)b+(M+N)ar}{(M+Nr)a+(M+N)b} = \frac{Mb+Nar}{Ma+Nb}.$$

Statuatur hic valor $= v$, et quia tum fit

$$\frac{M}{N} = \frac{bv-ar}{b-av} \quad \text{et} \quad \frac{M}{N} = \frac{arv+bv-br-ar}{b+ar-av-bv}$$

seu

$$\frac{M}{N} - v = \frac{a(vv-r)}{b-av} = \frac{(a+b)(vv-r)}{b+ar-(a+b)v},$$

inde manifesto sequitur $vv - r = 0$ et $v = \sqrt{r}$. Simul vero etiam quantitatum M et N haec relatio perspicitur, quod sumto $n = \infty$ fiat $\frac{M}{N} = v = \sqrt{r}$.

PROPOSITIO 4

11. *Inter duos numeros datam rationem* $1:r$ *tenentes duos medios proportionales in rationalibus proxime exhibere.*

SOLUTIO

Sumantur bini numeri quicumque a et ar in ratione data inter eosque capiantur duo medii quicumque b et c atque, quantumvis relatio $a:b:c:ar$ a ratione geometrica discrepet, inde alias propius eo accedentes hoc modo eliciemus. Quaerantur alii similes quaterni numeri $A:B:C:Ar$, quorum illi sint differentiae, ita ut sit

$$B-A=a, \quad C-B=b \quad \text{et} \quad Ar-C=c$$

hincque

$$B=A+a, \quad C=A+a+b \quad \text{et} \quad Ar=A+a+b+c$$

seu

$$A=\frac{a+b+c}{r-1}, \quad B=\frac{ar+b+c}{r-1}, \quad C=\frac{ar+br+c}{r-1},$$

qui per $r-1$ multiplicati praebebunt hos quaternos numeros

$$a'=a+b+c, \quad b'=b+c+ar, \quad c'=c+ar+br, \quad a'r=ar+br+cr,$$

qui iam multo propius ad proportionem geometricam continuam accedent. Simili ergo modo hinc alii novi a'', b'', c'', $a''r$ derivabuntur sumendo

$$a''=a'+b'+c', \quad b''=b'+c'+a'r, \quad c''=c'+a'r+b'r$$

hincque denuo alii, qui continuo propius proposito satisfacient. Totum ergo negotium reducitur ad formationem trium progressionum

$$\text{I.} \quad a, a', a'', a''', a'''', \ldots a^{(n)},$$

$$\text{II.} \quad b, b', b'', b''', b'''', \ldots b^{(n)},$$

$$\text{III.} \quad c, c', c'', c''', c'''', \ldots c^{(n)},$$

quarum lex est satis simplex; quae quo ulterius continuentur, eo propius quaterni numeri

$$a^{(n)}:b^{(n)}:c^{(n)}:ra^{(n)}$$

proportionem geometricam continuam exhibebunt, etiamsi initio assumti a, b, c, ra plurimum aberraverint.

COROLLARIUM 1

12. De his tribus seriebus primum observo singulos earum terminos huiusmodi formam $La + Mb + Nc$ esse habituros, ita ut quantitates L, M, N litteras pro arbitrio assumtas a, b, c non involvant, sed a sola ratione proposita $1:r$ pendeant.

COROLLARIUM 2

13. Deinde si primae seriei terminus quicumque fuerit

$$a^{(n)} = La + Mb + Nc,$$

evidens est pro serie secunda fore

$$b^{(n)} = Lb + Mc + Nra$$

et pro serie tertia

$$c^{(n)} = Lc + Mra + Nrb.$$

Unde sufficit harum trium serierum primae indolem exploravisse.

SCHOLION

14. Harum observationum ope inventio duarum mediarum proportionalium, quae quidem in rationalibus proxime satisfaciat, expedite instituitur. Sint enim exempli causa inter duos numeros rationem duplam tenentes duo medii proportionales investigandi et operatio numerica sumendis pro litteris a, b, c numeris 1, 1, 1 ob $r = 2$ ita se habebit

a	1	3	12	46	177	681	2620	10080
b	1	4	15	58	223	858	3301	12700
c	1	5	19	73	281	1081	4159	16001
$2a$	2	6	24	92	354	1362	5240	20160
$2b$	2	8	30	116	446	1716	6602	25400

Hic quatuor postremi numeri

$$10080 : 12700 : 16001 : 20160$$

tam parum a proportione geometrica recedunt, ut, si inter extremos per ex-

tractionem radicis cubicae duo medii proportionales quaerantur, ii ne parte quidem ducentesima[1]) a veritate aberrent; est enim

$$\frac{12700}{10080} = \sqrt[3]{\frac{2048383000}{1024192512}} = \sqrt[3]{\left(2 - \frac{2024}{1024192512}\right)}$$

ideoque

$$= \sqrt[3]{2} - \frac{2024}{3 \cdot 1024192512 \sqrt[3]{4}};$$

unde cum fiat

$$12700 = 10080 \sqrt[3]{2} - \frac{1}{239},$$

error infra particulam ducentesimam unitatis subsistit, ipsa autem fractio $\frac{12700}{10080}$ tantum particula

$$\frac{1}{10080 \cdot 239} = \frac{1}{2409120},$$

hoc est minore quam bis millionesima unitatis a vero valore $\sqrt[3]{2}$ deficit[2]); tantam autem praecisionem ope logarithmorum attingere non licet. Unde intelligitur, quantum usum haec methodus praestare queat in radicibus cuiusvis dignitatis proxime exprimendis.

PROPOSITIO 5

15. *Investigare legem harum trium progressionum*

$$a,\ a',\ a''\ \textit{etc.},\quad b,\ b',\ b''\ \textit{etc.},\quad c,\ c',\ c''\ \textit{etc.},$$

quarum termini homologi $a^{(n)} : b^{(n)} : c^{(n)}$ *continuo propius proportionem* $1 : \sqrt[3]{r} : \sqrt[3]{r^2}$ *exprimunt.*

SOLUTIO

Cum omnes termini ex ternis primo assumtis a, b et c ita componantur, ut sit $a^{(n)} = La + Mb + Nc$, erit ex earum indole $b^{(n)} = Lb + Mc + Nra$ et

1) Editio princeps (atque etiam *Comment. arithm.*): *ne parte quidem decies millesima* . . . Vide notam sequentem. F. R.

2) Editio princeps (atque etiam *Comment. arithm.*): *unde cum fiat* $12700 = 10080\sqrt[3]{2} - \frac{1}{23906}$ *error infra particulam decies millesimam unitatis subsistit, ipsa autem fractio* $\frac{12700}{10080}$ *tantum particula* $\frac{1}{10080 \cdot 23906} = \frac{1}{24097248}$ *hoc est minore quam vicies millionesima unitatis a vero valore* $\sqrt[3]{2}$ *deficit,* . . . Correxit F. R.

$c^{(n)} = Lc + Mra + Nrb$; at lex progressionis praebet sequentes terminos

$$a^{(n+1)} = (L + Mr + Nr)a + (L + M + Nr)b + (L + M + N)c,$$
$$b^{(n+1)} = (L + Mr + Nr)b + (L + M + Nr)c + (L + M + N)ra,$$
$$c^{(n+1)} = (L + Mr + Nr)c + (L + M + Nr)ra + (L + M + N)rb.$$

Hinc, si generalius statuamus

$$a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \text{etc.} = Pa + Qb + Rc,$$

erit

$$b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + \text{etc.} = Pb + Qc + Rra,$$

$$c + c'x + c''x^2 + c'''x^3 + \text{etc.} = Pc + Qra + Rrb.$$

Addantur hae series invicem, et quia est

$$a + b + c = a', \quad a' + b' + c' = a'', \quad a'' + b'' + c'' = a''',$$

erit

$$a' + a''x + a'''x^2 + \text{etc.} = (P + Qr + Rr)a + (P + Q + Rr)b + (P + Q + R)c,$$

quae per x multiplicata et a prima subtracta dat

$$a = Pa + Qb + Rc - (P + Qr + Rr)ax - (P + Q + Rr)bx - (P + Q + R)cx.$$

Quia autem quantitates P, Q, R litteras a, b, c non involvunt, hinc nascuntur tres aequationes

$$1 = P - Px - Qrx - Rrx,$$
$$0 = Q - Px - Qx - Rrx,$$
$$0 = R - Px - Qx - Rx$$

hincque

$$1 = P - Q - Q(r-1)x,$$
$$0 = Q - R - R(r-1)x,$$
$$1 = P - R - (Q + R)(r-1)x.$$

Pro faciliori resolutione statuamus

$$1 - x + rx = z$$

et sequens combinatio praebebit

$$1 = P - Qz, \quad 0 = Q - Rz,$$

hinc

$$Q = Rz, \quad P = 1 + Rzz,$$

unde fit

$$0 = R(1 - x) - Px - Qx = R(1 - x - xz - xzz) - x$$

ideoque

$$R = \frac{x}{1 - x(1 + z + zz)};$$

at est $x = \frac{z-1}{r-1}$, ergo

$$R = \frac{z - 1}{r - 1 - (z - 1)(1 + z + zz)} = \frac{z - 1}{r - z^3}$$

sicque prodit

$$P = \frac{r - zz}{r - z^3}, \quad Q = \frac{zz - z}{r - z^3}, \quad R = \frac{z - 1}{r - z^3};$$

quarum formarum cum denominator sit

$$r - 1 - 3(r - 1)x - 3(r - 1)^2 x^2 - (r - 1)^3 x^3$$

seu

$$(r - 1)(1 - 3x - 3(r - 1)x^2 - (r - 1)^2 x^3),$$

perspicuum est nostras tres progressiones esse recurrentes scala relationis existente 3, $3(r - 1)$, $(r - 1)^2$, ita ut sit

$$a^{(n)} = 3a^{(n-1)} + 3(r - 1)a^{(n-2)} + (r - 1)^2 a^{(n-3)}.$$

Nunc pro terminis generalibus harum progressionum fractiones P, Q, R in simplices resolvi oportet; quoniam autem denominatoris factor simplex est $\sqrt[3]{r} - z$ simul vicem binorum reliquorum gerens, siquidem $\sqrt[3]{r}$ tres involvit valores diversos, sufficit hunc unicum factorem considerasse. Sit ergo ex fractione R fractio simplex oriunda $= \frac{A}{\sqrt[3]{r} - z}$ et numerator erit $A = \frac{z - 1}{\sqrt[3]{r^2} + z\sqrt[3]{r} + zz}$ posito $z = \sqrt[3]{r}$, unde fit $A = \frac{\sqrt[3]{r} - 1}{3\sqrt[3]{rr}}$ ideoque

$$P = \frac{1}{3\sqrt[3]{r^2}} \cdot \frac{r - \sqrt[3]{r^2}}{\sqrt[3]{r} - z} + \text{etc.}, \quad Q = \frac{1}{3\sqrt[3]{r^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{r^2} - \sqrt[3]{r}}{\sqrt[3]{r} - z} + \text{etc.}, \quad R = \frac{1}{3\sqrt[3]{r^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{r} - 1}{\sqrt[3]{r} - z} + \text{etc.}$$

Restituatur pro z valor $1+(r-1)x$ sitque

$$\frac{r-1}{\sqrt[3]{r}-1}=s$$

ac fiet

$$P=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-sx}+\text{etc.},\quad Q=\frac{1}{3\sqrt[3]{r}}\cdot\frac{1}{1-sx}+\text{etc.},\quad R=\frac{1}{3\sqrt[3]{r^2}}\cdot\frac{1}{1-sx}+\text{etc.}$$

Hinc, cum sit

$$a+a'x+a''x^2+\text{etc.}=Pa+Qb+Rc,$$

sequitur fore

$$a^{(n)}=\frac{1}{3}s^n\Big(a+\frac{b}{\sqrt[3]{r}}+\frac{c}{\sqrt[3]{r^2}}\Big)+\cdots+\cdots,$$

ubi duo membra omissa ex primo ita formantur, ut loco $\sqrt[3]{r}$ scribatur $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{r}$, id quod etiam de $s=\frac{r-1}{\sqrt[3]{r}-1}$ est intelligendum. Deinde vero pro binis reliquis seriebus habebitur

$$b^{(n)}=\frac{1}{3}s^n\Big(a\sqrt[3]{r}+b+\frac{c}{\sqrt[3]{r}}\Big)+\cdots+\cdots,$$

$$c^{(n)}=\frac{1}{3}s^n(a\sqrt[3]{r^2}+b\sqrt[3]{r}+c)+\cdots+\cdots$$

COROLLARIUM 1

16. Si n sit numerus praegrandis, bina membra omissa prae primis hic appositis evanescunt, ex quo perspicuum est tum fore

$$a^{(n)}:b^{(n)}:c^{(n)}=1:\sqrt[3]{r}:\sqrt[3]{r^2};$$

in quo ipso tota vis methodi hic traditae consistit.

COROLLARIUM 2

17. Natura harum serierum recurrentium tertii ordinis ideo imprimis notari meretur, quod fractiones principales P, Q, R tam concinne in fractiones simplices resolvere licuit atque ex terminis generalibus inde derivatis natura harum serierum facile perspicitur.

SCHOLION

18. Hinc ratio istam methodum ad plures medias proportionales extendendi ita iam est manifesta, ut superfluum foret omnia ratiocinia, quibus operationes usurpatae innituntur, repetere. Quamobrem inventionem plurium mediarum proportionalium inter duos numeros datam rationem $1:r$ tenentes nunc quidem satis succincte exponere atque adeo binas propositiones cuique casui tribuendas commode in unam contrahere poterimus.

PROPOSITIO 6

19. *Inter duos numeros rationem datam* $1:r$ *tenentes tres medias continue proportionales in rationalibus proxime exhibere.*

SOLUTIO

Sumtis in ratione data duobus numeris a et ra inter eos pro lubitu tres medii constituantur b, c, d, ut habeantur hi quinque numeri quantumvis a scopo aberrantes

$$a:b:c:d:ra.$$

Hinc formentur alii hac lege, ut sit

$$\begin{aligned} a' &= a+b+c+d, \\ b' &= b+c+d+ra, \\ c' &= c+d+ra+rb, \\ d' &= d+ra+rb+rc, \end{aligned}$$

qui constituent progressionem iam multo propius ad scopum attingentem hanc

$$a':b':c':d':ra',$$

ex quibus porro eadem lege alii novi quaerantur indeque denuo alii, quo pacto continuo propius ad proportionem geometricam continuam accedetur, ita ut aberratio tandem omni assignabili minor evadat. Singulae porro harum serierum

$$a,\ a',\ a'',\ a''',\ a'''' \text{ etc.,}$$
$$b,\ b',\ b'',\ b''',\ b'''' \text{ etc.,}$$
$$c,\ c',\ c'',\ c''',\ c'''' \text{ etc.,}$$
$$d,\ d',\ d'',\ d''',\ d'''' \text{ etc.}$$

sunt recurrentes quarti ordinis secundum scalam relationis

$$4,\ 6(r-1),\ 4(r-1)^2,\ (r-1)^3.$$

Denique harum serierum termini generales posito brevitatis gratia

$$\frac{r-1}{\sqrt[4]{r}-1} = 1 + \sqrt[4]{r} + \sqrt[4]{r^2} + \sqrt[4]{r^3} = s$$

erunt

$$a^{(n)} = \frac{a\sqrt[4]{r^3} + b\sqrt[4]{r^2} + c\sqrt[4]{r} + d}{4\sqrt[4]{r^3}} s^n + \text{etc.,}$$

$$b^{(n)} = \frac{a\sqrt[4]{r^3} + b\sqrt[4]{r^2} + c\sqrt[4]{r} + d}{4\sqrt[4]{r^2}} s^n + \text{etc.,}$$

$$c^{(n)} = \frac{a\sqrt[4]{r^3} + b\sqrt[4]{r^2} + c\sqrt[4]{r} + d}{4\sqrt[4]{r}} s^n + \text{etc.,}$$

$$d^{(n)} = \frac{a\sqrt[4]{r^3} + b\sqrt[4]{r^2} + c\sqrt[4]{r} + d}{4} s^n + \text{etc.,}$$

quarum expressionum prima tantum membra apposui, dum ex his reliqua facile formantur loco $\sqrt[4]{r}$ eius ternos reliquos valores substituendo. Ceterum si statuatur

$$a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + a''''x^4 + \text{etc.} = Pa + Qb + Rc + Sd$$

ac brevitatis gratia fiat $1 - x + rx = z$, reperitur ut ante

$$P = \frac{r - z^3}{r - z^4},\quad Q = \frac{z^3 - z^2}{r - z^4},\quad R = \frac{z^2 - z}{r - z^4},\quad S = \frac{z - 1}{r - z^4},$$

unde simul reliquarum similium serierum a litteris b, c, d incipientium summae exhibentur.

EXEMPLUM

20. Inter duos numeros rationem duplam tenentes tres medii proportionales sequenti modo reperiuntur:

a	1	4	22	116	613	3240	17124	90504
b	1	5	26	138	729	3853	20364	107628
c	1	6	31	164	867	4582	24217	127992
d	1	7	37	195	1031	5449	28799	152209
$2a$	2	8	44	232	1226	6480	34248	181008

ubi ultimi numeri tam prope progressionem geometricam in ratione $1:\sqrt[4]{2}$ procedentem constituunt, quam fieri potest numeris non maioribus adhibendis. Ita satis exacte erit $\frac{107628}{90504}=\sqrt[4]{2}$ seu per 12 reducendo $\frac{8969}{7542}=\sqrt[4]{2}$, cuius error longe infra partem millionesimam unitatis subsistit.

SCHOLION 1

21. In Musicis similis quaestio de undecim mediis proportionalibus inter rationem duplam inveniendis tractari solet, ut hinc omnia semitonia unius *Octavae* inter se aequalia reddantur; quod temperamentum etsi principiis harmoniae adversatur, tamen non abs re fore arbitror eius solutionem ex iisdem principiis petitam hic apponere:

A	1	12	210	3532	59379	998592
B	1	13	222	3742	62911	1057971
H	1	14	235	3964	66653	1120882
C	1	15	249	4199	70617	1187535
Cs	1	16	264	4448	74816	1258152
D	1	17	280	4712	79264	1332968
Ds	1	18	297	4992	83976	1412232
E	1	19	315	5289	88968	1496208
F	1	20	334	5604	94257	1585176
Fs	1	21	354	5938	99861	1679433
G	1	22	375	6292	105799	1779294
Gs	1	23	397	6667	112091	1885093
a	2	24	420	7064	118758	1997184

Ultima columna tam parum a progressione geometrica recedit, ut error ne ad millionesimam [quidem] partem assurgere sit censendus.

SCHOLION 2

22. Quae hactenus sunt tradita, facile ad quotcumque medios proportionales inveniendos in genere accommodari possunt, in quo negotio hoc imprimis notari meretur, quod series numerorum, quibus solutio continetur, non solum sint recurrentes, sed etiam denominator fractionum, ex quibus nascuntur, semper in factores resolvi queat, ad quemcumque etiam gradum ascendat; unde egregia exempla aequationum altioris gradus solutionem admittentium colliguntur, quibus coniectura mea circa formam radicum cuiusque gradus olim[1]) prolata pulcherrime confirmatur. Verum methodus hic exposita multo latius extendi potest, quemadmodum in sequente propositione sum ostensurus, ita ut inde adhuc maiora subsidia in Analysin redundatura videantur.

PROPOSITIO 7

23. *Methodum multo latius patentem exhibere, cuius ope inter duos numeros datam rationem* $1:r$ *tenentes quotcumque medii proportionales in rationalibus proxime inveniri queant.*

SOLUTIO

Inter duos numeros a et ar datam rationem tenentes ut ante totidem medii pro lubitu accipiantur, quot medios proportionales assignari oportet. Ponamus autem quatuor medios inveniri debere, quoniam hinc vis methodi clarius perspicietur, quam si rem generaliter tractare velimus. Constituta ergo pro hoc casu ad lubitum tali progressione

$$a:b:c:d:e:ar:br:cr:dr:er:ar^2 \text{ etc.}$$

sumantur pro arbitrio quinque indices α, β, γ, δ, ε, per quos inde nova similis progressio formetur

$$a':b':c':d':e':a'r:b'r:c'r:d'r:e'r:a'r^2 \text{ etc.}$$

hac lege, ut sit

1) Vide Commentationes 30 et 282 huius voluminis. F. R.

$$a' = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e,$$
$$b' = \alpha b + \beta c + \gamma d + \delta e + \varepsilon ar,$$
$$c' = \alpha c + \beta d + \gamma e + \delta ar + \varepsilon br,$$
$$d' = \alpha d + \beta e + \gamma ar + \delta br + \varepsilon cr,$$
$$e' = \alpha e + \beta ar + \gamma br + \delta cr + \varepsilon dr.$$

Tum vero per eosdem indices ex hac progressione denuo alia formetur nova atque ita porro, ut hac ratione sequentes series obtineantur

$$a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \text{etc.} = Pa + Qb + Rc + Sd + Te,$$
$$b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + \text{etc.} = Pb + Qc + Rd + Se + Tar,$$
$$c + c'x + c''x^2 + c'''x^3 + \text{etc.} = Pc + Qd + Re + Sar + Tbr,$$
$$d + d'x + d''x^2 + d'''x^3 + \text{etc.} = Pd + Qe + Rar + Sbr + Tcr,$$
$$e + e'x + e''x^2 + e'''x^3 + \text{etc.} = Pe + Qar + Rbr + Scr + Tdr,$$

unde ex lege praescripta valores litterarum P, Q, R, S, T, quae a litteris arbitrariis a, b, c, d, e sunt immunes et tantum ab indicibus α, β, γ, δ, ε una cum quantitate x et ratione proposita $1:r$ pendent, ita determinantur, ut sit

$$\frac{P-1}{x} = \alpha P + \beta Tr + \gamma Sr + \delta Rr + \varepsilon Qr,$$
$$\frac{Q}{x} = \alpha Q + \beta P + \gamma Tr + \delta Sr + \varepsilon Rr,$$
$$\frac{R}{x} = \alpha R + \beta Q + \gamma P + \delta Tr + \varepsilon Sr,$$
$$\frac{S}{x} = \alpha S + \beta R + \gamma Q + \delta P + \varepsilon Tr,$$
$$\frac{T}{x} = \alpha T + \beta S + \gamma R + \delta Q + \varepsilon P,$$

ex quibus aequalitatibus quidem valores harum litterarum admodum perplex eliciuntur, ita ut denominator communis huiusmodi formam sit habiturus

$$1 - Ax - Bx^2 - Cx^3 - Dx^4 - Ex^5$$

indicium praebens series illas esse recurrentes ex eadem scala relationis oriundas. Verum quod hic potissimum est notandum, hunc denominatorem semper in factores simplices resolvere licet, qui inter se ita erunt similes, ut ex quinis ipsius $\sqrt[5]{r}$ valoribus simili modo formentur. Scilicet si brevitatis gratia ponatur

$$\alpha + \beta\sqrt[5]{r} + \gamma\sqrt[5]{r^2} + \delta\sqrt[5]{r^3} + \varepsilon\sqrt[5]{r^4} = s,$$

ubi etiam s quinos valores diversos sortitur, erit $1 - sx$ factor simplex illius denominatoris simul omnes quinque in se involvens. Hinc ergo singulas fractiones, quibus litterae illae P, Q, R, S, T exprimuntur, in quinque fractiones simplices resolvere licebit, quae ita concinne expressae reperiuntur

$$P = \frac{1}{5(1-sx)} + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots,$$

$$Q = \frac{1}{5(1-sx)\sqrt[5]{r}} + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots,$$

$$R = \frac{1}{5(1-sx)\sqrt[5]{r^2}} + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots,$$

$$S = \frac{1}{5(1-sx)\sqrt[5]{r^3}} + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots,$$

$$T = \frac{1}{5(1-sx)\sqrt[5]{r^4}} + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots,$$

ubi quaterna membra punctis indicata ex primis ipsi $\sqrt[5]{r}$ quatuor reliquos valores tribuendo sunt supplenda.

Hinc iam quinque serierum a numeris arbitrariis a, b, c, d, e incipientium termini generales formari possunt, qui etiam ponendo brevitatis gratia

$$a\sqrt[5]{r^4} + b\sqrt[5]{r^3} + c\sqrt[5]{r^2} + d\sqrt[5]{r} + e = k$$

(ubi quoque quantitas k quinque valores involvere est existimanda) sequenti modo concinne exprimuntur

$$a^{(n)} = \frac{k}{5\sqrt[5]{r^4}} s^n + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots,$$

$$b^{(n)} = \frac{k}{5\sqrt[5]{r^3}} s^n + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots,$$

$$c^{(n)} = \frac{k}{5\sqrt[5]{r^2}} s^n + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots,$$

$$d^{(n)} = \frac{k}{5\sqrt[5]{r}} s^n + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots,$$

$$e^{(n)} = \frac{k}{5} s^n + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots,$$

ubi quaterna membra omissa simili modo ut supra ex primis constitui oportet.

Hinc iam id, in quo cardo rei versatur, intelligitur; scilicet si series illae in infinitum continuentur, ut exponens n in infinitum excrescat, tum respectu eius membri, in quo ipsi $\sqrt[5]{r}$ valor realis positivus tribuitur, reliqua evanescere sicque manifesto numeros $a^{(n)} : b^{(n)} : c^{(n)} : d^{(n)} : e^{(n)} : ra^{(n)}$ progressionem geometricam constituere. Verum hic probe est notandum illam evanescentiam locum non habere, nisi indices α, β, γ, δ, ε sint positivi, quemadmodum hinc etiam casus supra tractatus resultat, si hi indices unitati aequales statuantur.

SCHOLION

24. Circa hanc solutionem generalem observari convenit, quodsi valores litterarum P, Q, R, S, T ex formulis inventis evolvantur earumque denominator communis ad nihilum redigatur, ut posito $x = \frac{1}{z}$ huiusmodi prodeat aequatio quinti gradus

$$z^5 - Az^4 - Bz^3 - Cz^2 - Dz - E = 0,$$

tum huius aequationis radicem fore

$$z = \alpha + \beta\sqrt[5]{r} + \gamma\sqrt[5]{r^2} + \delta\sqrt[5]{r^3} + \varepsilon\sqrt[5]{r^4},$$

in qua forma simul omnes quinque radices contineantur, si modo pro $\sqrt[5]{r}$ eius quinque valores successive substituantur. Cum igitur hae radices eam ipsam habeant formam, quam olim coniectura eram assecutus, hinc multo confidentius affirmare poterimus omnium aequationum cuiuscumque gradus radices eo

modo exprimi, quem coniectura mea indicat.[1]) Quodsi indices α, β, γ, δ, ε unitati aequentur, aequatio quinti gradus fit ex superioribus

$$z^5 - 5z^4 - 10(r-1)z^3 - 10(r-1)^2z^2 - 5(r-1)^3z - (r-1)^4 = 0,$$

cuius radix erit

$$z = 1 + \sqrt[5]{r} + \sqrt[5]{r^2} + \sqrt[5]{r^3} + \sqrt[5]{r^4}.$$

Seu posito $z = y + 1$ erit huius aequationis

$$y^5 = 10ry^3 + 10r(r+1)y^2 + 5r(rr+r+1)y + r(r^3+r^2+r+1)$$

radix

$$y = \sqrt[5]{r} + \sqrt[5]{r^2} + \sqrt[5]{r^3} + \sqrt[5]{r^4}.$$

---

1) Vide Commentationes 30 et 282 huius voluminis. Vide etiam epistolam EULERI d. 16. Decembris 1752 ad CHR. GOLDBACH scriptam, *Correspondance math. et phys. publiée par P. H. Fuss*, St.-Pétersbourg 1843, t. I, p. 595; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series III. F. R.

OBSERVATIONES CIRCA RADICES AEQUATIONUM[1]

Commentatio 406 indicis ENESTROEMIANI
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **15** (1770), 1771, p. 51—74
Summarium ibidem p. 11—13

SUMMARIUM

In hac dissertatione Ill. Auctor argumentum pertractat, quod ideo attentione sua dignum iudicavit, quia id compluribus speculationibus doctrinam serierum nova luce illustrantibus occasionem praebere potest. Proposita aequatione algebraica cuiusvis gradus rationali, quae generaliter ita repraesentari potest

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \text{etc.},$$

nota est Geometris elegans illa lex, qua summae omnium radicum summaeque dignitatum omnium radicum exprimuntur, ita ut, si $\int x^n$ denotet summam omnium radicum ad dignitatem n elevatarum, sit posito $n = 1, 2, 3$ etc.

---

1) Confer hac cum dissertatione Commentationes 153, 532, 631, 632, 643, 711 huius voluminis: *Demonstratio gemina theorematis* NEUTONIANI, *quo traditur relatio inter coefficientes cuiusvis aequationis algebraicae et summas potestatum radicum eiusdem,* Opuscula varii argumenti **2**, 1750, p. 108; *De serie* LAMBERTINA *plurimisque eius insignibus proprietatibus,* Acta acad. sc. Petrop. 1779: II, 1783, p. 29; *Analysis facilis et plana ad eas series maxime abstrusas perducens, quibus omnium aequationum algebraicarum non solum radices ipsae, sed etiam quaevis earum potestates exprimi possunt,* Nova acta acad. sc. Petrop. **4** (1786), 1789, p. 55; *De innumeris generibus serierum maxime memorabilium, quibus omnium aequationum algebraicarum non solum radices ipsae, sed etiam quaecumque earum potestates exprimi possunt,* Nova acta acad. sc. Petrop. **4** (1786), 1789, p. 74; *Methodus generalis investigandi radices omnium aequationum per approximationem,* Nova acta acad. sc. Petrop. **6** (1788), 1790, p. 16; *Methodus nova ac facilis omnium aequationum algebraicarum radices non solum ipsas, sed etiam quascumque earum potestates per series concinnas exprimendi,* Nova acta acad. sc. Petrop. **12** (1794), 1801, p. 71. P. St.

$$\int x = A,$$
$$\int x^2 = A\int x + 2B = A^2 + 2B,$$
$$\int x^3 = A\int x^2 + B\int x + 3C = A^3 + 3AB + 3C,$$

ubi igitur summae sequentes per praecedentes et litteras A, B, C etc. coniunctim vel illis eliminatis per solas has determinantur.

Ad explorandam legem, qua istae formulae progrediuntur, duo potissimum sunt consideranda; primum scilicet modus, quo litterae A, B, C etc. inter se combinantur; deinde vero unciae illae numericae, quibus singuli termini afficiuntur, in quarum potissimum indole perspicienda praecipua difficultas cernitur. In prima igitur dissertationis parte Ill. Auctor id negotii suscepit, ut formam erueret generalem, quae exprimat $\int x^n$ sive summam singularum radicum ad potestatem n elevatarum. Quam vero cum esset adeptus, statim id observavit, inventam seriem in infinitum excurrentem non repraesentare valorem ipsius $\int x^n$, nisi sub his binis conditionibus, primo ut exponens n sit numerus integer positivus, deinde vero ut ex ista serie omnes termini reiiciantur, in quibus littera A exponentem negativum esset adeptura. Nova vero hinc eaque momenti non exigui quaestio oritur, quisnam scilicet sit valor istius seriei, si binarum illarum conditionum ratio non habeatur, adeoque si n denotet numerum quemcumque et terminorum seriem inventam constituentium nullus excludatur. Resolutio huius quaestionis theorema subministravit elegantissimum et usus habiturum amplissimos, istam scilicet memoratam seriem, si ad binas illas conditiones non attendatur, non summam omnium radicum ad potestatem n elevatarum, sed potestatem ipsam n radicis maximae exprimere; ita ut ope huius theorematis propositae aequationis cuiuscumque

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \text{etc.}$$

radicem maximam non solum ipsam sed eius etiam potestatem quamcumque immo et logarithmum hyperbolicum per series infinitas commode exhibere liceat.

1. Si habeatur aequatio algebraica cuiusvis gradus ad rationalitatem perducta

$$x^m = Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} + Ex^{m-5} + \text{etc.},$$

quam etiam hac forma exhibere licet

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \text{etc.},$$

ac ponatur

$$\int x = \text{summae omnium radicum,}$$

$$\int x^2 = \text{summae quadratorum earundem radicum,}$$

$$\int x^3 = \text{summae cuborum,}$$

$$\int x^4 = \text{summae biquadratorum}$$

et ita porro,

notum est[1]) has summas ita a se invicem et a litteris A, B, C, D, E etc. pendere, ut sit

$$\int x = A,$$

$$\int x^2 = A\int x + 2B,$$

$$\int x^3 = A\int x^2 + B\int x + 3C,$$

$$\int x^4 = A\int x^3 + B\int x^2 + C\int x + 4D,$$

$$\int x^5 = A\int x^4 + B\int x^3 + C\int x^2 + D\int x + 5E$$

etc.

2. Ex hac ergo progressionis lege singulae hae summae potestatum ita se habebunt evolutae

1) Innotuerant formulae sequentes EULERO ex NEUTONI *Arithmetica universali*, 3. ed. (vide notam p. 21), p. 192; fugerunt eum et A. GIRARD, *Invention nouvelle en l'algèbre* (vide notam p. 21) et E. WARING, *Miscellanea analytica, de aequationibus algebraicis, et curvarum proprietatibus*, Cantabrigiae 1762; confer L. SAALSCHÜTZ, *Zur Geschichte der Relationen zwischen den Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung und ihren Koeffizienten*, Biblioth. Mathem. 9_3, 1908—1909, p. 65.
P. St.

$$\int x = A,$$

$$\int x^2 = A^2 + 2B,$$

$$\int x^3 = A^3 + 3AB + 3C,$$

$$\int x^4 = A^4 + 4A^2B + 4AC + 4D, \quad + 2B^2$$

$$\int x^5 = A^5 + 5A^3B + 5A^2C + 5AD + 5E, \quad + 5AB^2 + 5BC$$

$$\int x^6 = A^6 + 6A^4B + 6A^3C + 6A^2D + 6AE + 6F, \quad + 9A^2B^2 + 12ABC + 6BD \quad + 2B^3 + 3CC$$

$$\int x^7 = A^7 + 7A^5B + 7A^4C + 7A^3D + 7A^2E + 7AF + 7G. \quad + 14A^3B^2 + 21A^2BC + 14ABD + 7BE \quad + 7AB^3 + 7AC^2 + 7CD \quad + 7B^2C$$

Ulterius has formas non continuandas esse arbitror, cum harum contemplatio sufficiat ad legem, qua singulae formantur, explorandam.

3. Ut ordinem, quo in his formis singulae litterae A, B, C, D, E etc. inter se componuntur, facilius perspiciamus, litterae A tribuamus unam dimensionem, litterae B duas, litterae C tres, litterae D quatuor et ita porro; atque manifestum est in qualibet forma nonnisi eiusmodi occurrere terminos, in quibus dimensionum numerus sit exponenti potestatum radicum, quarum summa exhibetur, aequalis. Ita in forma $\int x^7$ singuli termini continent septem dimensiones atque adeo omnes termini per mutuam combinationem septem dimensiones adimplentes in ea reperiuntur, quod etiam de omnibus formis est tenendum. Imprimis autem observari convenit alias litterarum A, B, C, D etc. potestates in has formas non ingredi, nisi quarum exponentes sint numeri integri et positivi, unde pro quavis potestate summatoria omnes termini eam constituentes ex litterarum A, B, C, D etc. combinatione assignantur,

quorum quidem numerus semper est finitus, etiamsi ipsa aequatio proposita in infinitum excurrat.[1])

4. Cum igitur pro quavis potestate ipsi termini, quatenus ex litteris A, B, C, D etc. conflantur, nullam involvant difficultatem, totum negotium ad uncias numericas, quibus singuli termini sunt affecti, reducitur. Ad indolem autem harum unciarum explorandam seposita prima littera A terminos secundum reliquas litteras B, C, D, E etc. ita in ordines disponi conveniet, ut in primo harum litterarum [ordine] nulla, in secundo ordine singulae tantum, in tertio vero binae, in quarto ternae et ita porro reperiantur, hoc modo:

$$\int x = A,$$

$$\int x^2 = A^2 + 2B,$$

$$\begin{array}{rl} \int x^3 = A^3 & + 3AB, \\ & + 3C \end{array}$$

$$\begin{array}{rlll} \int x^4 = A^4 & + 4A^2B & + 2BB, \\ & + 4AC & \\ & + 4D & \end{array}$$

$$\begin{array}{rlll} \int x^5 = A^5 & + 5A^3B & + 5ABB, \\ & + 5A^2C & + 5BC \\ & + 5AD & \\ & + 5E & \end{array}$$

$$\begin{array}{rllll} \int x^6 = A^6 & + 6A^4B & + 9A^2BB & + 2B^3, \\ & + 6A^3C & + 12ABC & \\ & + 6A^2D & + 6BD & \\ & + 6AE & + 3CC & \\ & + 6F & & \end{array}$$

1) Confer exempli causa L. EULERI Commentationem 41 (indicis ENESTROEMIANI): *De summis serierum reciprocarum,* Comment. acad. sc. Petrop. 7 (1734/5), 1740, p. 123; *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series I, vol. 14. Vide etiam P. STÄCKEL, *Eine vergessene Abhandlung LEONHARD EULERS über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen,* Biblioth. Mathem. 8_3, 1907—1908, p. 42. P. St.

$$\begin{aligned}\int x^7 = A^7 &+ 7A^5B + 14A^3BB + 7AB^3,\\ &+ 7A^4C + 21A^2BC + 7B^2C\\ &+ 7A^3D + 14ABD\\ &+ 7A^2E + 7ACC\\ &+ 7AF + 7BE\\ &+ 7G + 7CD\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x^8 = A^8 &+ 8A^6B + 20A^4BB + 16A^2B^3 + 2B^4.\\ &+ 8A^5C + 32A^3BC + 24AB^2C\\ &+ 8A^4D + 24A^2BD + 8B^2D\\ &+ 8A^3E + 12A^2CC + 8BC^2\\ &+ 8A^2F + 16ABE\\ &+ 8AG + 16ACD\\ &+ 8H + 8BF\\ &\qquad + 8CE\\ &\qquad + 4DD\end{aligned}$$

5. In cuiusque formae ordine primo et secundo nulla plane occurrit difficultas nullumque est dubium, quin pro forma $\int x^n$ sit primus terminus A^n, secundus vero ordo ex his constet terminis

$$nA^{n-2}B + nA^{n-3}C + nA^{n-4}D + nA^{n-5}E + \text{etc.};$$

sequentium vero ordinum ratio minus est manifesta. Hanc autem circumstantiam perpendentes, quod exponens n in omnes quoque sequentes uncias tamquam factor ingrediatur, deinde etiam quod quaelibet litterarum B, C, D, E etc. combinationes simul permutationum numerum involvant, prouti in polynomii potestatibus occurrunt, si in singulis terminis hos binos factores seorsim exhibeamus, levi adhibita attentione deprehendemus in genere has formas ita expressum iri:

Ordo I *Ordo II* *Ordo III*

$$\int x^n = A^n + nA^{n-2}B + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}A^{n-4}BB$$

$$+ nA^{n-3}C + \frac{n(n-4)}{1\cdot 2}A^{n-5}2BC$$

$$+ nA^{n-4}D + \frac{n(n-5)}{1\cdot 2}A^{n-6}(2BD + CC)$$

$$+ nA^{n-5}E + \frac{n(n-6)}{1\cdot 2}A^{n-7}(2BE + 2CD)$$

$$+ nA^{n-6}F + \frac{n(n-7)}{1\cdot 2}A^{n-8}(2BF + 2CE + DD)$$

$$+ nA^{n-7}G + \frac{n(n-8)}{1\cdot 2}A^{n-9}(2BG + 2CF + 2DE)$$

etc. etc.

Ordo IV

$$+ \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-6}B^3$$

$$+ \frac{n(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-7}3B^2C$$

$$+ \frac{n(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-8}(3B^2D + 3BC^2)$$

$$+ \frac{n(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-9}(3B^2E + 6BCD + C^3)$$

$$+ \frac{n(n-8)(n-9)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-10}(3B^2F + 6BCE + 3BDD + 3CCD)$$

etc.

Ordo V

$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A^{n-8}B^4$$

$$+ \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A^{n-9}4B^3C$$

$$+ \frac{n(n-7)(n-8)(n-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A^{n-10}(4B^3D + 6B^2C^2)$$

$$+ \frac{n(n-8)(n-9)(n-10)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A^{n-11}(4B^3E + 12B^2CD + 4BC^3)$$

$$+ \frac{n(n-9)(n-10)(n-11)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A^{n-12}(4B^3F + 12B^2CE + 6B^2D^2 + 12BC^2D + C^4)$$

etc.

Ordo VI

$$+\frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}A^{n-10}B^5$$
$$+\frac{n(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}A^{n-11}5B^4C$$
$$+\frac{n(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}A^{n-12}(5B^4D+10B^3C^2)$$
$$+\frac{n(n-9)(n-10)(n-11)(n-12)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}A^{n-13}(5B^4E+20B^3CD+10B^3C^3)$$
$$+\frac{n(n-10)(n-11)(n-12)(n-13)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}A^{n-14}(5B^4F+20B^3CE+10B^3D^2+30B^2C^2D+5BC^4)$$

etc.

6. Hinc ordinem quemcumque in genere evolvere licebit; sit enim index ordinis $\lambda+1$ statuanturque membra huius ordinis

$$+\frac{n(n-\lambda-1)(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)\cdots(n-2\lambda+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\lambda}A^{n-2\lambda}\cdot O$$
$$+\frac{n(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)(n-\lambda-4)\cdots(n-2\lambda)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\lambda}A^{n-2\lambda-1}\cdot P$$
$$+\frac{n(n-\lambda-3)(n-\lambda-4)(n-\lambda-5)\cdots(n-2\lambda-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\lambda}A^{n-2\lambda-2}\cdot Q$$
$$+\frac{n(n-\lambda-4)(n-\lambda-5)(n-\lambda-6)\cdots(n-2\lambda-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\lambda}A^{n-2\lambda-3}\cdot R$$

etc.

atque valores litterarum O, P, Q, R etc. ita se habebunt, ut sit

$$O+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\text{etc.}=(B+Cz+Dz^2+Ez^3+\text{etc.})^\lambda,$$

unde evolutione facta colligimus

$$O=B^\lambda,$$
$$P=\frac{\lambda}{1}\cdot\frac{OC}{B},$$
$$Q=\frac{2\lambda}{2}\cdot\frac{OD}{B}+\frac{\lambda-1}{2}\cdot\frac{PC}{B},$$
$$R=\frac{3\lambda}{3}\cdot\frac{OE}{B}+\frac{2\lambda-1}{3}\cdot\frac{PD}{B}+\frac{\lambda-2}{3}\cdot\frac{QC}{B},$$
$$S=\frac{4\lambda}{4}\cdot\frac{OF}{B}+\frac{3\lambda-1}{4}\cdot\frac{PE}{B}+\frac{2\lambda-2}{4}\cdot\frac{QD}{B}+\frac{\lambda-3}{4}\cdot\frac{RC}{B},$$
$$T=\frac{5\lambda}{5}\cdot\frac{OG}{B}+\frac{4\lambda-1}{5}\cdot\frac{PF}{B}+\frac{3\lambda-2}{5}\cdot\frac{QE}{B}+\frac{2\lambda-3}{5}\cdot\frac{RD}{B}+\frac{\lambda-4}{5}\cdot\frac{SC}{B}$$

etc.

sive valoribus iam inventis substituendis

$$O = B^{\lambda},$$

$$P = \lambda B^{\lambda-1} C,$$

$$Q = \lambda B^{\lambda-1} D + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} B^{\lambda-2} C^2,$$

$$R = \lambda B^{\lambda-1} E + \frac{2\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} B^{\lambda-2} CD + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} B^{\lambda-3} C^3,$$

$$S = \lambda B^{\lambda-1} F + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} B^{\lambda-2}(2CE + DD) + \frac{3\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} B^{\lambda-3} C^2 D + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} B^{\lambda-4} C^4$$

etc.

7. De hac autem forma generali probe est tenendum ea summam singularum radicum ad dignitatem n elevatarum neutiquam exprimi, nisi primo exponens n sit numerus integer positivus, tum vero ex forma generali, quae in infinitum excurrit, omnes termini excludantur, in quibus littera A exponentem negativum esset adeptura. Hinc quaestio oritur maximi momenti, quinam futurus sit valor huius formae generalis, si omnes termini in infinitum retineantur, idque sive exponens n fuerit sive positivus sive negativus, sive integer sive fractus. Hanc igitur quaestionem, quoniam inde speculationes maxime notatu dignae et in doctrina serierum novam quamdam lucem accendentes oriuntur, hic accuratius evolvendam suscepi. Ostendam autem hac forma generali non summam potestatum exponentis n, quae ex singulis radicibus formantur, sed potius potestatem similem unius dumtaxat radicis eiusque maximae exprimi.

8. Quo hanc investigationem simpliciorem reddam, a casu huius aequationis

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{xx}$$

inchoabo, ita ut litterae C, D, E etc. omnes evanescant. Pro hoc ergo casu forma nostra generalis, in cuius valorem inquirimus, erit

$$A^n + nA^{n-2}B + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} A^{n-4} B^2 + \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A^{n-6} B^3 + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} A^{n-8} B^4 + \text{etc.}$$

Ponamus primo $n = 1$ et sit valor seriei $= s$, ut sit

$$s = A + \frac{B}{A^1} - \frac{2}{2}\cdot\frac{B^2}{A^3} + \frac{3\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{B^3}{A^5} - \frac{4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{B^4}{A^7} + \text{etc.},$$

quae revocatur ad hanc formam

$$s = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\cdot\frac{2B}{A} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{8B^2}{A^3} + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{32B^3}{A^5} - \text{etc.},$$

cuius seriei summa manifesto est

$$s = \frac{1}{2}A + \sqrt{\left(\frac{1}{4}AA + B\right)},$$

quae est aequationis propositae radix maior. Tum vero iam constat illius seriei generalis valorem esse

$$= \left(\frac{1}{2}A + \sqrt{\left(\frac{1}{4}AA + B\right)}\right)^n;$$

ex quo nullum amplius superest dubium, quin illa forma generalis potestatem exponentis n unius tantum radicis aequationis eiusque maioris exprimat, hoc saltem casu.

9. In genere autem eadem conclusio hoc modo confici poterit. Denotet $s^{(n)}$ totam illam expressionem generalem § 5 exhibitam et in infinitum extensam sintque $s^{(n-1)}$, $s^{(n-2)}$, $s^{(n-3)}$ etc. eiusdem valores, si loco n scribatur $n-1$, $n-2$, $n-3$ etc.; atque ex genesi illius expressionis intelligitur fore

$$s^{(n)} = As^{(n-1)} + Bs^{(n-2)} + Cs^{(n-3)} + Ds^{(n-4)} + \text{etc.};$$

verum ex ipsa aequatione proposita est quoque

$$x^m = Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} + \text{etc.},$$

unde, si hae duae aequationes sequenti modo repraesententur

$$1 = \frac{As^{(n-1)}}{s^{(n)}} + \frac{Bs^{(n-2)}}{s^{(n)}} + \frac{Cs^{(n-3)}}{s^{(n)}} + \frac{Ds^{(n-4)}}{s^{(n)}} + \text{etc.}$$

et

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \text{etc.},$$

quoniam hoc valet pro omnibus numeris n, sequitur fore

$$s^{(n)} = x s^{(n-1)} = x^2 s^{(n-2)} = x^3 s^{(n-3)} = x^4 s^{(n-4)} \text{ etc.}$$

Cum igitur posito $n = 0$ sit $s^{(0)} = A^0 = 1$, erit pro n scribendo successive numeros 1, 2, 3, 4 etc.

$$s^{(1)} = x, \quad s^{(2)} = x^2, \quad s^{(3)} = x^3, \quad s^{(4)} = x^4 \text{ etc.}$$

Quare evictum est in genere fore

$$s^{(n)} = x^n.$$

Hic autem pro x sumi debere aequationis propositae radicem maximam inde patet, quod sumto exponente n infinito, quo casu formae nostrae pars integra ab universa non est censenda discrepare, summa potestatum infinitesimarum ad potestatem infinitesimam radicis maximae solam reducitur.

10. En ergo theorema notatu dignissimum usumque habiturum amplissimum, quod proposita aequatione quacumque huius formae

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \text{etc.},$$

cuius radix maxima sit $x = m$, expressionis supra § 5 exhibitae et in infinitum continuatae valor sit m^n. Quare si sumatur $n = 1$, eadem expressio ipsam radicem maximam exprimet. Ubi imprimis omni attentione dignum occurrit, quod omnes potestates eiusdem radicis per similes expressiones infinitas exprimantur; quin etiam ponendo $n = 0$ ob $\frac{m^0 - A^0}{0} = l\frac{m}{A}$ logarithmus hyperbolicus maximae radicis m hoc modo exprimetur

$$\begin{aligned} lm = lA &+ \frac{B}{A^2} - \frac{3B^2}{2A^4} && + \frac{4 \cdot 5 B^3}{2 \cdot 3 A^6} \\ &+ \frac{C}{A^3} - \frac{4 \cdot 2BC}{2A^5} && + \frac{5 \cdot 6 \cdot 3 B^2 C}{2 \cdot 3 A^7} \\ &+ \frac{D}{A^4} - \frac{5(2BD + CC)}{2A^6} && + \frac{6 \cdot 7(3B^2D + 3BC^2)}{2 \cdot 3 A^8} \\ &+ \frac{E}{A^5} - \frac{6(2BE + 2CD)}{2A^7} && + \frac{7 \cdot 8(3B^2E + 6BCD + C^3)}{2 \cdot 3 A^9} \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

11. Quoniam ergo hinc cuiusque aequationis radicem maximam non solum ipsam sed etiam eius quamcumque potestatem per series infinitas commode exprimere licet, hinc primum pulcherrimam illam seriem, quam sagacissimi ingenii vir LAMBERTUS[1]) in Actorum Helveticorum volumine III. pro resolutione aequationum ex tribus tantum terminis constantium tradidit, deducere licet. Quemadmodum enim supra aequatio haec

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$$

dederat

$$x^n = A^n + nA^{n-2}B + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}A^{n-4}B^2 + \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-6}B^3 + \text{etc.},$$

ita haec aequatio

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{C}{x^3}$$

dabit

$$x^n = A^n + nA^{n-3}C + \frac{n(n-5)}{1\cdot 2}A^{n-6}C^2 + \frac{n(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-9}C^3 + \text{etc.}$$

haecque aequatio

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{D}{x^4}$$

$$x^n = A^n + nA^{n-4}D + \frac{n(n-7)}{1\cdot 2}A^{n-8}D^2 + \frac{n(n-10)(n-11)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-12}D^3 + \text{etc.};$$

ita concludimus pro hac aequatione

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{M}{x^m}$$

fore

$$x^n = A^n + nA^{n-m}M + \frac{n(n-2m+1)}{1\cdot 2}A^{n-2m}M^2$$
$$+ \frac{n(n-3m+2)(n-3m+1)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-3m}M^3 + \text{etc.}$$

Statuamus nunc $x = y^\lambda$ et $x^m = y^\mu$, tum vero pro M scribamus B et $\frac{n}{\lambda}$ loco n atque ob $m = \frac{\mu}{\lambda}$ pro resolutione huius aequationis generalis

$$1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu}$$

1) I. H. LAMBERT (1728—1777), *Observationes variae in mathesin puram*, Acta helvetica **3**, 1758, p. 128, vide praesertim p. 144; confer etiam LAMBERTI dissertationem *Observations analytiques*, Nouv. mém. de l'acad. d. sc. de Berlin, année 1770, 1772, p. 225. P. St.

habebimus

$$y^n = A^{\frac{n}{\lambda}} + \frac{n}{\lambda} A^{\frac{n-\mu}{\lambda}} B + \frac{n(n+\lambda-2\mu)}{1\cdot 2\lambda^2} A^{\frac{n-2\mu}{\lambda}} B^2 + \frac{n(n+2\lambda-3\mu)(n+\lambda-3\mu)}{1\cdot 2\cdot 3\lambda^3} A^{\frac{n-3\mu}{\lambda}} B^3$$
$$+ \frac{n(n+3\lambda-4\mu)(n+2\lambda-4\mu)(n+\lambda-4\mu)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\lambda^4} A^{\frac{n-4\mu}{\lambda}} B^4 + \text{etc.}$$

12. Si igitur aequationis

$$1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu}$$

radix ipsa desideretur y, poni oportet $n = 1$ ac fiet

$$y = A^{\frac{1}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} A^{\frac{1-\mu}{\lambda}} B + \frac{1+\lambda-2\mu}{2\lambda^2} A^{\frac{1-2\mu}{\lambda}} B^2 + \frac{(1+2\lambda-3\mu)(1+\lambda-3\mu)}{2\cdot 3\lambda^3} A^{\frac{1-3\mu}{\lambda}} B^3$$
$$+ \frac{(1+3\lambda-4\mu)(1+2\lambda-4\mu)(1+\lambda-4\mu)}{2\cdot 3\cdot 4\lambda^4} A^{\frac{1-4\mu}{\lambda}} B^4 + \text{etc.},$$

quae est ipsa series LAMBERTI loco allegato exhibita eoque magis notatu digna videtur, quod coefficientium lex satis quidem est regularis verumtamen ita comparata, ut, si series ipsa proponatur, nulla pateat via eius summam investigandi; quod eo magis est mirum, quod nihilominus huius seriei summa non solum constat sed adeo algebraice exhiberi potest, cum sit una radicum huius aequationis

$$1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu}$$

eaque maxima. Deinde vero huius seriei proprietas maximi sine dubio est momenti, quod omnes eius potestates similibus seriebus exprimantur.

13. Indolem harum singularium serierum e re erit in aliquot exemplis perspexisse. Sumamus ergo $\lambda = 3$ et $\mu = 2$, ut habeamus hanc aequationem cubicam

$$y^3 = A + By,$$

cuius propterea una radicum erit

$$y = A^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} A^{-\frac{1}{3}} B + 0 A^{-1} B^2 - \frac{2\cdot 1}{2\cdot 3} A^{-\frac{5}{3}} \left(\frac{B}{3}\right)^3 + \frac{4\cdot 1\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 4} A^{-\frac{7}{3}} \left(\frac{B}{3}\right)^4$$
$$- \frac{6}{2}\cdot -\frac{3}{3}\cdot \frac{0}{4}\cdot \frac{3}{5} A^{-3}\left(\frac{B}{3}\right)^5 - \frac{8}{2}\cdot -\frac{5}{3}\cdot -\frac{2}{4}\cdot \frac{1}{5}\cdot \frac{4}{6} A^{-\frac{11}{3}}\left(\frac{B}{3}\right)^6 + \text{etc.};$$

quae expressio quo clarior reddatur, sumamus $A = a^3$ et $B = 3b$, ut prodeat huius aequationis

$$y^3 = 3by + a^3$$

radix

$$y = a + \frac{b}{a} + \frac{4 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{b^4}{a^7} + \frac{10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{b^7}{a^{13}} + \frac{16 \cdot 13 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} \cdot \frac{b^{10}}{a^{19}} + \text{etc.}$$
$$- \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{b^3}{a^5} - \frac{8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{b^6}{a^{11}} - \frac{14 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} \cdot \frac{b^9}{a^{17}}$$
$$- \frac{20 \cdot 17 \cdot 14 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} \cdot \frac{b^{12}}{a^{23}} - \text{etc.},$$

quae ita concinnius repraesentatur

$$y = a + \frac{b}{a} + \frac{1}{3} \cdot \frac{b^4}{a^7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 10}{6 \cdot 7} \cdot \frac{b^7}{a^{13}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 10}{6 \cdot 7} \cdot \frac{13 \cdot 16}{9 \cdot 10} \cdot \frac{b^{10}}{a^{19}}$$
$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 10}{6 \cdot 7} \cdot \frac{13 \cdot 16}{9 \cdot 10} \cdot \frac{19 \cdot 22}{12 \cdot 13} \cdot \frac{b^{13}}{a^{25}} + \text{etc.}$$
$$- \frac{1}{3} \cdot \frac{b^3}{a^5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 8}{5 \cdot 6} \cdot \frac{b^6}{a^{11}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 8}{5 \cdot 6} \cdot \frac{11 \cdot 14}{8 \cdot 9} \cdot \frac{b^9}{a^{17}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 8}{5 \cdot 6} \cdot \frac{11 \cdot 14}{8 \cdot 9} \cdot \frac{17 \cdot 20}{11 \cdot 12} \cdot \frac{b^{12}}{a^{23}} - \text{etc.}$$

14. Hae series accuratiorem evolutionem merentur. Ponamus ergo pro priore

$$s = x + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 10}{6 \cdot 7}x^7 + \cdots + Mx^{3n+1} + Nx^{3n+4} + \text{etc.},$$

et cum esse debeat

$$\frac{N}{M} = \frac{6n+1}{3n+3} \cdot \frac{6n+4}{3n+4},$$

haec conditio adimpletur hac aequatione differentiali secundi gradus[1])

$$dds = 4x^3 dds + 6xxdxds - 2xsdx^2,$$

quae commode per $2xds - sdx$ multiplicata integrabilis evadit; reperitur enim integrando

$$xds^2 - sdxds + Cdx^2 = 4x^4 ds^2 - 4x^3 sdxds + xxssdx^2,$$

1) Quaestiones huius generis EULERUS in *Institutionum calculi integralis* volumine secundo, Petropoli 1769, (vide Sectionis primae capita VIII et XI) tractaverat; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 12. P. St.

ubi, cum sumto x infinite parvo fiat $s = x$ et $\frac{ds}{dx} = 1$, evidens est capi debere $C = 0$, ita ut sit

$$(xds - sdx)ds = 4x^3(xds - sdx)ds + xxssdx^2 = xx(2xds - sdx)^2$$

seu

$$\frac{ds^2}{ssdx^2} = \frac{ds}{xsdx} + \frac{x}{1-4x^3},$$

unde radicem extrahendo fit

$$\frac{ds}{sdx} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{1}{1-4x^3}},$$

ita ut habeamus

$$ls = \frac{1}{2}lx + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-4x^3)}} = \frac{1}{2}lx + \frac{1}{3}l\frac{2x\sqrt{x}}{1+\sqrt{(1-4x^3)}}.$$

Hinc ergo erit

$$s = x\sqrt[3]{\frac{2}{1+\sqrt{(1-4x^3)}}}.$$

15. Ponamus ergo $\frac{b}{aa} = x$, ut habeamus

$$\frac{y}{a} = 1 + x + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}\cdot\frac{7\cdot 10}{6\cdot 7}x^7 + \frac{1}{3}\cdot\frac{7\cdot 10}{6\cdot 7}\cdot\frac{13\cdot 16}{9\cdot 10}x^{10} + \text{etc.}$$
$$- \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot 8}{5\cdot 6}x^6 - \frac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot 8}{5\cdot 6}\cdot\frac{11\cdot 14}{8\cdot 9}x^9 - \text{etc.}$$

seu

$$\frac{y}{a} = s + 1 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot 8}{5\cdot 6}x^6 - \frac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot 8}{5\cdot 6}\cdot\frac{11\cdot 14}{8\cdot 9}x^9 - \text{etc.}$$

Ponamus summam seriei

$$1 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot 8}{5\cdot 6}x^6 - \text{etc.} = t$$

ac reperiemus ut ante, quoniam lex progressionis est eadem[1]),

$$ddt = 4x^3ddt + 6xxdxdt - 2xtdx^2;$$

1) Ponendo $t = 1 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot 8}{5\cdot 6}x^6 - \cdots - Mx^{3n} - Nx^{3n+3} -$ etc. lex progressionis est $\frac{N}{M} = \frac{(6n-1)(6n+2)}{(3n+2)(3n+3)}$; nihilo minus haec conditio eadem aequatione differentiali adimpletur, quae pro summa s reperta erat. P. St.

cuius integrale propterea est quoque

$$xdt^2 - tdxdt = 4x^4dt^2 - 4x^3tdxdt + xxttdx^2;$$

quia enim sumto x infinite parvo fit $t = 1$ et $\frac{dt}{dx} = 0$, constans addenda etiam evanescit. Porro ergo integrando adipiscimur

$$t = x\sqrt[3]{\frac{2}{1 - \sqrt{(1 - 4x^3)}}}$$

fietque $t = 1$, si $x = 0$. Quocirca pro radice aequationis

$$y^3 = 3by + a^3$$

habebimus

$$\frac{y}{a} = s + t = x\sqrt[3]{\frac{2}{1 + \sqrt{(1 - 4x^3)}}} + x\sqrt[3]{\frac{2}{1 - \sqrt{(1 - 4x^3)}}}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{1 - \sqrt{(1 - 4x^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt{(1 - 4x^3)}}{2}}$$

existente $x = \frac{b}{aa}$ ideoque

$$y = \sqrt[3]{\frac{a^3 - \sqrt{(a^6 - 4b^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{a^3 + \sqrt{(a^6 - 4b^3)}}{2}},$$

quam eandem expressionem regula CARDANI suppeditat.

16. Evolvamus aliud exemplum aequationis cubicae ponendo $\lambda = 1$ et $\mu = 3$, ut sit

$$y^3 = Ayy + B,$$

ac posito $\frac{B}{A^3} = x$ nostra forma dat

$$\frac{y}{A} = 1 + x - \frac{4}{2}x^2 + \frac{6 \cdot 7}{2 \cdot 3}x^3 - \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}x^5 - \text{etc.},$$

quae ad hanc legem reducitur continuitatis

$$\frac{y}{A} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + x - \frac{4}{2}x^2 + \frac{6 \cdot 7}{2 \cdot 3}x^3 \cdots \pm Mx^n \mp Nx^{n+1} \pm \text{etc.},$$

ut sit

$$N = \frac{3(3n - 1)(3n + 1)}{(2n + 1)(2n + 2)}M = \frac{27nn - 3}{4nn + 6n + 2}M.$$

Ponamus

$$\frac{y}{A} - \frac{1}{3} = s$$

et relatio inter s et x exprimetur per hanc aequationem differentialem secundi gradus

$$4xxdds + 2xdxds + 27x^3dds + 27x^2dxds - 3xsdx^2 = 0,$$

quae per $\frac{2ds}{x}$ multiplicata et integrata praebet

$$4xds^2 + 27xxds^2 - 3ssdx^2 = Cdx^2,$$

unde colligitur

$$\frac{ds}{\sqrt{(C+3ss)}} = \frac{dx}{\sqrt{(4x+27xx)}},$$

cuius integratio dat

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\,l(s\sqrt{3} + \sqrt{(C+3ss)}) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\,l\Big(\frac{2}{3\sqrt{3}} + 3x\sqrt{3} + \sqrt{(4x+27xx)}\Big),$$

unde porro elicitur haec aequatio algebraica

$$s = A\Big(1 + \frac{27x}{2} + 3\sqrt{\Big(3x + \frac{81xx}{4}\Big)}\Big)^{\frac{1}{3}} + B\Big(1 + \frac{27x}{2} - 3\sqrt{\Big(3x + \frac{81xx}{4}\Big)}\Big)^{\frac{1}{3}},$$

quae evoluta utique praebet

$$s^3 = 3ABs + (A^3 + B^3)\Big(1 + \frac{27x}{2}\Big) + 3(A^3 - B^3)\sqrt{\Big(3x + \frac{81xx}{4}\Big)};$$

aequatio autem assumta inter s et x erat

$$s^3 = \frac{1}{3}s + \frac{2}{27} + x,$$

quae in integrali illo completo continetur sumendo

$$A = B = \frac{1}{3}.$$

17. Evolutio haec elegantissima aequationum tribus tantum terminis constantium

$$1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu}$$

eo maiorem attentionem meretur, quod nulla via patet directa ex serie inventa in genere valorem summae y investigandi, etiamsi tandem haec summa maxime concinna aequatione algebraica exhiberi possit. Quod enim casus hic pro aequationibus quadraticis et cubicis expedire licuit, successus huic circumstantiae soli acceptus est referendus, quod harum aequationum resolutio est in potestate; unde non immerito suspicari licet, si methodus detegeretur huiusmodi series summandi, inde eximia subsidia ad resolutionem aequationum cuiuscumque gradus esse redundatura. Simili autem modo evolutio aequationum quaternis terminis constantium exhiberi potest latissime patens, quae autem ita est comparata, ut singuli termini continuo plura membra contineant, quorum tamen ordo satis est perspicuus.

18. Si enim in genere haec fuerit proposita aequatio quatuor constans terminis

$$1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu} + \frac{C}{y^\nu}$$

atque ponamus $y^n = P + Q + R + S + T +$ etc., hae partes P, Q, R, S, T etc. sequenti modo determinantur

$$P = A^{\frac{n}{\lambda}},$$

$$Q = \frac{n}{\lambda} A^{\frac{n-\mu}{\lambda}} B + \frac{n}{\lambda} A^{\frac{n-\nu}{\lambda}} C,$$

$$R = \frac{n(n+\lambda-2\mu)}{1\cdot 2\lambda^2} A^{\frac{n-2\mu}{\lambda}} BB + \frac{2n(n+\lambda-\mu-\nu)}{1\cdot 2\lambda^2} A^{\frac{n-\mu-\nu}{\lambda}} BC$$
$$+ \frac{n(n+\lambda-2\nu)}{1\cdot 2\lambda^2} A^{\frac{n-2\nu}{\lambda}} CC,$$

$$S = \frac{n(n+\lambda-3\mu)(n+2\lambda-3\mu)}{1\cdot 2\cdot 3\lambda^3} A^{\frac{n-3\mu}{\lambda}} B^3$$
$$+ \frac{3n(n+\lambda-2\mu-\nu)(n+2\lambda-2\mu-\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\lambda^3} A^{\frac{n-2\mu-\nu}{\lambda}} B^2 C$$
$$+ \frac{3n(n+\lambda-\mu-2\nu)(n+2\lambda-\mu-2\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\lambda^3} A^{\frac{n-\mu-2\nu}{\lambda}} BC^2$$
$$+ \frac{n(n+\lambda-3\nu)(n+2\lambda-3\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\lambda^3} A^{\frac{n-3\nu}{\lambda}} C^3,$$

$$T = \frac{n(n+\lambda-4\mu)(n+2\lambda-4\mu)(n+3\lambda-4\mu)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\lambda^4} A^{\frac{n-4\mu}{\lambda}} B^4$$
$$+ \frac{4n(n+\lambda-3\mu-\nu)(n+2\lambda-3\mu-\nu)(n+3\lambda-3\mu-\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\lambda^4} A^{\frac{n-3\mu-\nu}{\lambda}} B^3 C$$
$$+ \frac{6n(n+\lambda-2\mu-2\nu)(n+2\lambda-2\mu-2\nu)(n+3\lambda-2\mu-2\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\lambda^4} A^{\frac{n-2\mu-2\nu}{\lambda}} B^2 C^2$$
$$+ \frac{4n(n+\lambda-\mu-3\nu)(n+2\lambda-\mu-3\nu)(n+3\lambda-\mu-3\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\lambda^4} A^{\frac{n-\mu-3\nu}{\lambda}} B C^3$$
$$+ \frac{n(n+\lambda-4\nu)(n+2\lambda-4\nu)(n+3\lambda-4\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\lambda^4} A^{\frac{n-4\nu}{\lambda}} C^4$$

etc.

19. Hinc iam, quotcumque aequatio contineat terminos

$$1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu} + \frac{C}{y^\nu} + \frac{D}{y^\xi} + \text{etc.},$$

in genere valor potestatis indefinitae y^n assignari poterit; aequabitur enim seriei ex infinito terminorum numero conflatae, qui ex omnibus quantitatum B, C, D etc. combinationibus nascuntur. Sufficiet igitur in genere terminum huic combinationi $B^\beta C^\gamma D^\delta$ etc. respondentem definivisse, ubi pro β, γ, δ etc. successive omnes numeri integri positivi a cyphra 0, 1, 2, 3 etc. in infinitum substitui sunt intelligendi. Ad hunc autem terminum inveniendum primo indagari debet numerus combinationum formae $B^\beta C^\gamma D^\delta$ etc., quem statuamus $= N$, et posita exponentium summa $\beta + \gamma + \delta +$ etc. $= p$ notum est fore

$$N = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}{1\cdot 2\cdots \beta\cdot 1\cdot 2\cdots \gamma\cdot 1\cdot 2\cdots \delta \text{ etc.}}.$$

Deinde ponamus brevitatis gratia $\beta\mu + \gamma\nu + \delta\xi +$ etc. $= q$ atque terminus quaesitus formae $B^\beta C^\gamma D^\delta$ etc. conveniens erit

$$N\cdot\frac{n}{\lambda}\cdot\frac{n+\lambda-q}{2\lambda}\cdot\frac{n+2\lambda-q}{3\lambda}\cdot\frac{n+3\lambda-q}{4\lambda}\cdots\frac{n+(p-1)\lambda-q}{p\lambda} A^{\frac{n-q}{\lambda}} B^\beta C^\gamma D^\delta \text{ etc.}$$

Omnes ergo hi termini iunctim sumti verum valorem potestatis y^n determinabunt.

Evolutio aequationis $1 = \frac{A}{y} + By^3$

20. Ut exemplum aequationis biquadraticae proferam, hanc aequationem, quae istam formam dat

$$By^4 = y - A,$$

evolvendam suscipio. Cum igitur sit $\lambda = 1$ et $\mu = -3$, hanc adipiscimur seriem

$$y = A + A^4B + \frac{8}{2}A^7B^2 + \frac{11\cdot 12}{2\cdot 3}A^{10}B^3 + \frac{14\cdot 15\cdot 16}{2\cdot 3\cdot 4}A^{13}B^4$$
$$+ \frac{17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}A^{16}B^5 + \text{etc.}$$

In hac serie quilibet terminus ita pendet a praecedente, ut quisque terminus per praecedentem divisus praebeat quotum huius formae

$$4\,\frac{(4n-3)(4n-2)(4n-1)}{3n(3n-1)(3n+1)}A^3B,$$

ex quo summatio huius seriei perducitur ad aequationem differentialem tertii gradus, quae facto $A = \frac{3}{4}u$ et $B = \frac{1}{4}$, ut aequatio proposita sit

$$y^4 = 4y - 3u,$$

ita se habebit

$$32(1-u^3)d^3y - 144uududdy - 86udu^2dy + 5ydu^3 = 0,$$

sumto scilicet elemento du constante. Quemadmodum autem illa aequatio in hac contineatur, non perspicitur.

21. Observo autem hanc aequationem integrabilem reddi, si multiplicetur per y; singuli enim termini, quatenus fieri potest, integrati praebent, ut sequitur:

$$\int yd^3y = yddy - \tfrac{1}{2}dy^2 \text{ (per } 32),$$

$$\int u^3yd^3y = u^3yddy - \tfrac{1}{2}u^3dy^2 - 3uuydudy + 3uy^2du^2$$
$$+ \tfrac{9}{2}\int uududy^2 - 3\int yydu^3 \text{ (per } -32),$$

$$\int uuyduddy = uuydudy - uyydu^2 - \int uududy^2 + \int yydu^3 \text{ (per } -144),$$

$$\int udu^2ydy = \tfrac{1}{2}uy^2du^2 - \tfrac{1}{2}\int yydu^3 \text{ (per } -86),$$

$$\int yydu^3 = \int yydu^3 \text{ (per } 5),$$

unde nascitur haec forma integrata

$$16(1-u^3)(2yddy-dy^2)-48uuydudy+5uy^2du^2=Cdu^2,$$

quae ponendo

$$y=zz$$

ob $yy=z^4$, $ydy=2z^3dz$ et $yddy+dy^2=yddy+4zzdz^2=2z^3ddz+6zzdz$ ·

ideoque

$$2yddy=4z^3ddz+4zzdz^2 \quad \text{seu} \quad 2yddy-dy^2=4z^3ddz$$

induit hanc formam

$$64(1-u^3)z^3ddz-96uuz^3dudz+5uz^4du^2=Cdu^2$$

vel

$$64(1-u^3)ddz-96uududz+5uzdu^2=\frac{Cdu^2}{z^3},$$

quae ergo hanc aequationem integralem $z^8=4zz-3u$ in se complectitur; idque casu, quo constans $C=-9$, propterea quod est

$$y=\frac{3}{4}u+\frac{3^4}{4^5}u^4+\frac{3^7}{4^8}u^7+\text{etc.}$$

ideoque sumto u infinite parvo $z=\frac{1}{2}\sqrt{3u}$.

22. Cum nulla via pateat hanc aequationem differentialem secundi gradus ulterius reducendi, operae pretium erit investigare, quomodo et quatenus ea cum aequatione finita $z^8=4zz-3u$ conveniat. In hunc finem repraesentemus aequationem differentialem hac forma

$$Lz^3ddz+Mz^3dudz+Nz^4du^2=Cdu^2,$$

ut sit

$$L=64(1-u^3),\quad M=-96uu \quad \text{et} \quad N=5u;$$

at aequatio finita differentiata dat

$$8z^7dz=8zdz-3du \quad \text{seu} \quad 8dz(u-zz)=zdu,$$

unde fit porro differentiando

$$8ddz(u-zz)=16zdz^2-7dudz=\frac{9z^3-7uz}{8(u-zz)^2}du^2.$$

Cum ergo sit

$$\frac{dz}{du}=\frac{z}{8(u-zz)} \quad \text{et} \quad \frac{ddz}{du^2}=\frac{9z^3-7uz}{64(u-zz)^3},$$

prodibit facta substitutione haec aequatio

$$\frac{(1-u^3)z^4(9zz-7u)}{(u-zz)^3}-\frac{12uuz^4}{u-zz}+5uz^4=C$$

seu

$$(1-u^3)z^4(9zz-7u)-(7uu+5uzz)z^4(u-zz)^2-C(u-zz)^3=0,$$

quae evoluta et ope aequationis $z^8=4zz-3u$ ad potestates ipsius z octava minores depressa perducit ad hanc

$$(9+C)z^6-3(9+C)uz^4+3(9+C)uuzz-(9+C)u^3=0,$$

cui valor $C=-9$ manifesto satisfacit.

23. Plus autem hinc concludere non licet quam aequationem hanc

$$z^8=4zz-3u$$

contineri in hac aequatione differentio-differentiali

$$64(1-u^3)z^3ddz-96uuz^3dudz+5uz^4du^2=Cdu^2$$

casu, quo $C=-9$. Interim tamen ne hoc quidem casu integrale completum exhibere licet, in quod praeterea duae quantitates constantes ingrediantur. Multo minus autem in genere, quicumque valor ipsi C tribuatur, integrationem sperare poterimus, cum ne casu quidem $C=0$ [aequatio] methodis cognitis integrationem admittat. Ex quo intelligimus, si aequationes algebraicae, quarum radices hic ad series infinitas perduximus, tertium gradum superent, serierum inde natarum summas nullius methodi adhuc cognitae ope investigari posse.

24. Coronidis loco adiungam problema inversum, quo proposita huiusmodi aequatione cubica

$$y^3+py+q=0$$

investigari oporteat aequationem differentialem secundi ordinis huius formae

$$ddy+Qdy+Ry=0,$$

in qua illa contineatur. Quae investigatio semper succedit, differentiatione enim bis instituta indeque hic loco dy et ddy valoribus substitutis, ut termini prodeant solam quantitatem y eiusque potestates continentes, quas ope aequationis $y^3 + py + q = 0$ infra tertiam deprimere licebit. Quo facto seorsim ad nihilum redigantur partes cum ab y liberae, tum vero ipsam y eiusque quadratum yy continentes, ubi commode eveniet, ut, simulac binis conditionibus fuerit satisfactum, tertia sponte adimpleatur. Hoc autem modo calculum instituendo reperietur

$$Q = \frac{18ppqdp^2 - 2(8p^3 - 27qq)dpdq - 54pqdq^2}{(3qdp - 2pdq)(4p^3 + 27qq)} + \frac{2pddq - 3qddp}{3qdp - 2pdq},$$

$$R = \frac{6p(dq^3 + pdp^2dq - qdp^3)}{(3qdp - 2pdq)(4p^3 + 27qq)} + \frac{dqddp - dpddq}{3qdp - 2pdq}.$$

Haec autem aequatio per

$$\frac{4p^3 + 27qq}{(3qdp - 2pdq)^2}(2pdy - ydp)$$

multiplicata integrabilis redditur indeque porro pro y aequatio cubica latius patens quam proposita elicietur.

25. Aequatio differentialis secundi gradus magis fit concinna, si ponatur $qq = \frac{4p^3x}{27}$; fiet enim

$$ddy - dy\left(\frac{ddx}{dx} + \frac{dp}{p} - \frac{dx}{2x} - \frac{dx}{2(1+x)}\right)$$
$$+ y\left(\frac{dpddx}{2pdx} - \frac{ddp}{2p} + \frac{3dp^2}{4pp} - \frac{dpdx}{4px} - \frac{dpdx}{4p(1+x)} - \frac{dx^2}{36x(1+x)}\right) = 0,$$

quae per

$$\frac{x(1+x)}{ppdx^2}(2pdy - ydp)$$

multiplicata et integrata praebet[1])

$$\frac{x(1+x)}{pdx^2}\left(dy - \frac{ydp}{2p}\right)^2 = \frac{C}{36} + \frac{yy}{36p};$$

1) Editio princeps: $\frac{x(1+x)}{pdx^2}\left(dy - \frac{ydp}{2p}\right)^2 = \frac{C}{18} + \frac{yy}{18p}$. Correxit P. St.

et ponendo $y = z\sqrt{p}$ hinc reperitur[1])

$$\frac{6\,dz}{\sqrt{(C+zz)}} = \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}},$$

quae denuo integrata dat

$$\left(z + \sqrt{(C+zz)}\right)^6 = D\left(\tfrac{1}{2} + x + \sqrt{x(1+x)}\right) = \tfrac{1}{2}D\left(\sqrt{x} + \sqrt{(1+x)}\right)^2,$$

unde tandem eruitur

$$z = \frac{y}{\sqrt{p}} = A\left(\sqrt{x} + \sqrt{(1+x)}\right)^{\frac{1}{3}} + B\left(\sqrt{x} - \sqrt{(1+x)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ac cubo sumendo

$$z^3 = -3ABz + (A^3 + B^3)\sqrt{x} + (A^3 - B^3)\sqrt{(1+x)}.$$

---

1) Editio princeps: $\dfrac{3\,dz\sqrt{2}}{\sqrt{(C+zz)}} = \dfrac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$ *quae denuo integrata dat:*

$$\left(z + \sqrt{(C+zz)}\right)^3 = D\left(\tfrac{1}{2} + x + \sqrt{x(1+x)}\right)$$

unde tandem eruitur:

$$z = \frac{y}{\sqrt{p}} = A\left(\tfrac{1}{2} + x + \sqrt{x(1+x)}\right)^{\frac{1}{3}} + B\left(\tfrac{1}{2} + x - \sqrt{x(1+x)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ac cubo sumendo

$$z^3 = \frac{3}{4}ABz + (A^3 + B^3)\left(\tfrac{1}{2} + x\right) + (A^3 - B^3)\sqrt{x(1+x)}.$$

Correxit P. St.

PROBLEMA ALGEBRAICUM OB AFFECTIONES PRORSUS SINGULARES MEMORABILE

Commentatio 407 indicis Enestroemiani
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **15** (1770), 1771, p. 75—106
Summarium ibidem p. 13—15

SUMMARIUM

Problema, quod in hac dissertatione resolvitur, cum quadratis magicis multum habet affinitatis, sed ob affectiones prorsus singulares longe magis est memorabile. Inveniendae nimirum sunt novem quantitates A, B, C, D etc., quae sint eius indolis, ut in quadratum hoc modo dispositae

$$\begin{matrix} A, & B, & C, \\ D, & E, & F, \\ G, & H, & I \end{matrix}$$

duodecim his conditionibus satisfaciant

$$\begin{array}{ll} 1.\ A^2 + D^2 + G^2 = 1, & 4.\ AB + DE + GH = 0, \\ 2.\ B^2 + E^2 + H^2 = 1, & 5.\ AC + DF + GI = 0, \\ 3.\ C^2 + F^2 + I^2 = 1, & 6.\ BC + EF + HI = 0, \\ 7.\ A^2 + B^2 + C^2 = 1, & 10.\ AD + BE + CF = 0, \\ 8.\ D^3 + E^2 + F^2 = 1, & 11.\ AG + BH + CI = 0, \\ 9.\ G^2 + H^2 + I^2 = 1, & 12.\ DG + EH + FI = 0. \end{array}$$

Prima observatio, quam Ill. Auctor de hoc problemate affert, in eo consistit, ut id ad classem problematum indeterminatorum referat; id quod eo magis paradoxum videri omnino debet, cum numerus conditionum adimplendarum superet numerum quantitatum incognitarum, unde problema potius pro plus quam determinato habendum foret; verum natura

problematis penitus perspecta demonstrari potest adimpletis sex prioribus conditionibus sex posterioribus necessario satisfieri adeoque tres illarum quantitatum arbitrio nostro relinqui. Haec vero ipsa elegans affectio, qua problematis evolutio multo redditur simplicior, tantum abest, ut sit obvia, ut potius Ill. Auctor eam sub forma insignis theorematis proponat, quod demonstratu difficillimum censeri debeat. Praeterea ipsum problema non pro inani lusu ingenii est habendum, sed in doctrina de natura superficierum amplissimi usus est. Quem postquam ostendisset Ill. Auctor, primo completam theorematis modo memorati demonstrationem tradit, deinde vero problematis solutionem ex theoriâ angulorum petitam sistit; quae quidem in se est elegantissima, sed eo defectu laborat, ut ex ea vix quicquam subsidii pro resolvendis aliis huius generis quaestionibus magis complicatis repeti queat. Hanc ob rem Ill. Auctor solutionem generalem investigare aggreditur eamque non modo ad casum propositum novem quantitatum, sed ad complicatiores quoque, quos 16, 25 etc. quantitates incognitae ingrediuntur, accommodat, immo et ostendit, quomodo ad duodecim priores conditiones novem aliae adiici potuissent, quae vero itidem re ipsa in sex prioribus necessario involvuntur. Coronidis loco Ill. Auctor problematis solutionem ex methodo DIOPHANTEA petitam in numeris rationalibus pro casu 9 numerorum subiungit. Ad casum vero 16 numerorum ista methodus difficulter accommodatur; alio tamen modo eoque prorsus singulari Ill. Auctor et pro hoc casu solutionem latissime patentem nactus est; in quam tamen cum nonnisi divinando inciderit, si quis methodum directam ad talem solutionem manuducentem investigaverit, is non Algebrae solum communi, sed methodo etiam Diophanteae insignia incrementa attulisse foret censendus.

Problema, cuius affectiones hic contemplandas suscipio, ita se habet:

Invenire novem numeros ita in quadratum disponendos

$$\begin{matrix} A, & B, & C, \\ D, & E, & F, \\ G, & H, & I, \end{matrix}$$

ut satisfiat duodecim sequentibus conditionibus

1. $AA + DD + GG = 1,$ 4. $AB + DE + GH = 0,$

2. $BB + EE + HH = 1,$ 5. $AC + DF + GI = 0,$

3. $CC + FF + II = 1,$ 6. $BC + EF + HI = 0,$

$$7.\ AA + BB + CC = 1, \qquad 10.\ AD + BE + CF = 0,$$
$$8.\ DD + EE + FF = 1, \qquad 11.\ AG + BH + CI = 0,$$
$$9.\ GG + HH + II = 1, \qquad 12.\ DG + EH + FI = 0.$$

Circa hoc problema sequentia observo.

1. Cum numerus conditionum implendarum superet numerum quantitatum determinandarum, problema hoc plus quam determinatum videtur. Utcumque enim conditiones praescriptae perpendantur, nulla alia relatio, qua aliquae in reliquis iam contineantur, in iis deprehenditur, nisi quod summa conditionum 7., 8., 9. conveniat cum summa conditionum 1., 2., 3.; unde unica harum duodecim conditionum in reliquis iam contineri videtur; qua remota tamen adhuc undecim conditiones relinquuntur, quae binario numerum quantitatum incognitarum excedunt. Hic equidem tantum de eiusmodi relatione loquor, quae has conditiones consideranti occurrit; revera enim aliquot necessariae relationes inter eas intercedunt, quae autem vix ante animadvertuntur, quam problema perfecte fuerit solutum.

2. Deinde observo hoc problema non solum non esse plus quam determinatum, sed adeo esse indeterminatum, ita ut novem numerorum quaesitorum tres pro lubitu accipere liceat nihiloque minus omnibus conditionibus praescriptis satisfieri queat. Dummodo enim sex prioribus conditionibus fuerit satisfactum, reliquae sex sponte implentur atque omnino fieri non potest, ut sex prioribus satisfiat, quin simul omnibus satisfiat. Quocirca problema propositum eiusdem prorsus indolis maneret, etiamsi sex posteriores conditiones plane omitterentur; ac tum ei insigne theorema istud adiungi posset:

Quodsi novem numeri A, B, C, D, E, F, G, H, I ita fuerint comparati, ut sex prioribus conditionibus satisfaciant, tum etiam necessario sex posterioribus satisfacient.

Quod theorema pro difficillimo demonstratu venditare non dubito neque video, quomodo demonstratio adornari queat, nisi solutio problematis fuerit explorata.

3. Neque vero hoc problema pro otiosa speculatione seu mero lusu ingenii est habendum, sed potius in doctrina de superficierum natura est maximi momenti. Cum enim natura superficiei per aequationem inter ternas coordi-

natas tribus axibus inter se normalibus parallelas exprimi soleat, talis aequatio mutandis axibus in infinitum variari potest, etiamsi axium communis intersectio in eodem puncto statuatur. Quoniam igitur eadem superficies infinitis aequationibus diversis inter ternas coordinatas definiri potest, plurimum interest earum characterem communem nosse, qui in eo consistit, ut, si coordinatae ternis quibusdam axibus datis parallelae sint x, y, z, quae autem aliis quibuscumque axibus constituuntur parallelae, fuerint X, Y, Z, earum relatio mutua semper huiusmodi formulis contineatur

$$X = Ax + By + Cz, \quad Y = Dx + Ey + Fz, \quad Z = Gx + Hy + Iz;$$

qui novem coefficientes ita comparati sint necesse est, ut inde fiat

$$XX + YY + ZZ = xx + yy + zz,$$

quandoquidem his formulis quadratum intervalli, quo superficiei punctum ab initio coordinatarum distat, exprimitur. Quod fieri nequit, nisi hae sex aequationes habeant locum

$$AA + DD + GG = 1, \quad BB + EE + HH = 1, \quad CC + FF + II = 1,$$
$$AB + DE + GH = 0, \quad AC + DF + GI = 0, \quad BC + EF + HI = 0,$$

quae sunt ipsae sex priores conditiones nostri problematis.

4. Quocumque autem modo hoc problema secundum Algebrae praecepta tentetur, ob tantum incognitarum numerum semper ad calculos vehementer intricatos pervenitur, ex quibus neutiquam solutionem commodam expectare liceat. Theoriam quidem angulorum in subsidium vocando haud difficulter solutio satis concinna obtinetur, verum haec methodus vix ad alias huius generis quaestiones magis complicatas traduci poterit; veluti si circa 16, 25, 36 etc. numeros pariter in quadratum disponendos similis quaestio instituatur, ut summa quadratorum per singulas columnas tam verticales quam horizontales sumtorum unitati aequetur, simul vero summae productorum secundum binas columnas itidem tam verticales quam horizontales ad nihilum redigantur. Methodum ergo etiam ad has quaestiones patentem, quae utique in Analysi maximi momenti est putanda, deinceps sum expositurus, postquam demonstrationem theorematis § 2 memorati atque solutionem problematis initio propositi ope sinuum et cosinuum tradidero.

DEMONSTRATIO THEOREMATIS § 2 PROPOSITI

5. Assumo ergo novem numeros nostros $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ ita esse comparatos, ut sit

$$1.\ AA+DD+GG=1, \qquad 4.\ AB+DE+GH=0,$$
$$2.\ BB+EE+HH=1, \qquad 5.\ AC+DF+GI=0,$$
$$3.\ CC+FF+II=1, \qquad 6.\ BC+EF+HI=0,$$

quarum tres posteriores ita repraesento

$$4.\ AB=-DE-GH,$$
$$5.\ AC=-DF-GI,$$
$$6.\ BC=-EF-HI;$$

unde concludo fore

$$\frac{4\cdot 5}{6}.\quad \frac{AABC}{BC}=AA=-\frac{(DE+GH)(DF+GI)}{EF+HI},$$

qui valor ipsius AA in prima aequatione positus dat

$$-(DE+GH)(DF+GI)+(EF+HI)(DD+GG)=EF+HI$$

factaque evolutione

$$-DEGI-DFGH+DDHI+EFGG=EF+HI,$$

cuius aequationis primum membrum manifesto in hos factores resolvitur

$$(DH-EG)(DI-FG)=EF+HI.$$

6. Cum igitur sit $EF+HI=-BC$, erit

$$BC=(EG-DH)(DI-FG)$$

similique modo colligetur fore

$$AC=(FH-EI)(EG-DH)$$

et

$$AB=(DI-FG)(FH-EI),$$

quarum duarum posteriorum productum per primam divisum praebet

$$AA = (FH - EI)^2$$

hincque

$$A = \pm (FH - EI);$$

quia autem singulos numeros tam negative quam positive capere licet, ambiguitas signi nullam variationem inferre est censenda, unde sumto superiori habebimus

$$A = FH - EI, \quad B = DI - FG, \quad C = EG - DH.$$

Cum autem ex rei natura columnas verticales inter se permutare liceat, hinc per analogiam concludimus fore

$$D = BI - CH, \quad E = CG - AI, \quad F = AH - BG,$$

$$G = CE - BF, \quad H = AF - CD, \quad I = BD - AE.$$

7. En ergo novem novas determinationes, quae in sex conditionibus praescriptis necessario involvuntur et quas insuper ad duodecim conditiones initio propositas adiicere potuissemus. Verum hae ipsae novem determinationes, quas sequenti modo indicabo

$$13.\ A = FH - EI, \quad 16.\ D = BI - CH, \quad 19.\ G = CE - BF,$$

$$14.\ B = DI - FG, \quad 17.\ E = CG - AI, \quad 20.\ H = AF - CD,$$

$$15.\ C = EG - DH, \quad 18.\ F = AH - BG, \quad 21.\ I = BD - AE,$$

facile ad conditiones sex posteriores initio propositas deducunt. Nam formulae 13. per D, 14. per E et 15. per F multiplicatae et in unam summam collectae dant

$$AD + BE + CF = + DFH + DEI + EFG - DEI - EFG - DFH = 0,$$

quae est ipsa conditio 10. initio proposita, similique modo 13. G + 14. H + 15. I dabit conditionem 11. et 16. G + 17. H + 18. I conditionem 12., ita ut sit

$$10.\ AD + BE + CF = 0,$$

$$11.\ AG + BH + CI = 0,$$

$$12.\ DG + EH + FI = 0.$$

8. Denique si in formula 13. valores litterarum E et F ex formulis 17 et 18. substituantur, emergit haec aequatio

$$A = AHH - BGH - CGI + AII = A(HH + II) - G(BH + CI);$$

at ex aequatione 11. est $BH + CI = -AG$, unde colligitur

$$A = A(GG + HH + II)$$

ideoque vel $A = 0$ vel $GG + HH + II = 1$. Cum autem simili modo ex formulis 14., 15., 16., 17. et 18. eliciantur aequationes

$$B = B(GG + HH + II),$$

$$C = C(GG + HH + II),$$

$$D = D(GG + HH + II),$$

$$E = E(GG + HH + II)$$

et

$$F = F(GG + HH + II)$$

neque litterae A, B, C, D, E, F omnes simul evanescant, necesse est sit

$$GG + HH + II = 1,$$

quae est conditio 9.; hocque modo ostenditur esse

$$7.\quad AA + BB + CC = 1,$$

$$8.\quad DD + EE + FF = 1,$$

$$9.\quad GG + HH + II = 1;$$

quae est demonstratio completa theorematis propositi.

SOLUTIO PROBLEMATIS INITIO PROPOSITI

9. Statuamus $A = \cos.\zeta$, et cum conditiones 1. et 7. praebeant

$$DD + GG = \sin.\zeta^2 \quad \text{et} \quad BB + CC = \sin.\zeta^2,$$

his in genere satisfaciemus ponendo

$$B = \sin.\zeta\cos.\eta, \quad C = \sin.\zeta\sin.\eta, \quad D = \sin.\zeta\cos.\theta, \quad G = \sin.\zeta\sin\theta.$$

Considerentur iam conditiones 17. et 21., quae factis his substitutionibus induent has formas

17. $E = \sin.\zeta^2 \sin.\eta \sin.\theta - I \cos.\zeta$ seu $E + I \cos.\zeta = \sin.\zeta^2 \sin.\eta \sin.\theta$,

21. $I = \sin.\zeta^2 \cos.\eta \cos.\theta - E \cos.\zeta$ seu $I + E \cos.\zeta = \sin.\zeta^2 \cos.\eta \cos.\theta$.

Hinc 17.—21. cos. ζ et 21.—17. cos. ζ dant

$$E(1 - \cos.\zeta^2) = \sin.\zeta^2 (\sin.\eta \sin.\theta - \cos.\zeta \cos.\eta \cos.\theta),$$
$$I(1 - \cos.\zeta^2) = \sin.\zeta^2 (\cos.\eta \cos.\theta - \cos.\zeta \sin.\eta \sin.\theta),$$

unde colligitur

$$E = \sin.\eta \sin.\theta - \cos.\zeta \cos.\eta \cos.\theta$$

et

$$I = \cos.\eta \cos.\theta - \cos.\zeta \sin.\eta \sin.\theta.$$

10. Simili modo conditiones 18. et 20. modo ante demonstratae factis substitutionibus suppeditant has aequationes

18. $F = H \cos.\zeta - \sin.\zeta^2 \cos.\eta \sin.\theta$ seu $F - H \cos.\zeta = -\sin.\zeta^2 \cos.\eta \sin.\theta$,

20. $H = F \cos.\zeta - \sin.\zeta^2 \sin.\eta \cos.\theta$ seu $H - F \cos.\zeta = -\sin.\zeta^2 \sin.\eta \cos.\theta$,

unde formae 18. + 20. cos. ζ et 20. + 18. cos. ζ producunt

$$F(1 - \cos.\zeta^2) = -\sin.\zeta^2 (\cos.\eta \sin.\theta + \cos.\zeta \sin.\eta \cos.\theta),$$
$$H(1 - \cos.\zeta^2) = -\sin.\zeta^2 (\sin.\eta \cos.\theta + \cos.\zeta \cos.\eta \sin.\theta);$$

unde ob $1 - \cos.\zeta^2 = \sin.\zeta^2$ elicitur

$$F = -\cos.\eta \sin.\theta - \cos.\zeta \sin.\eta \cos.\theta$$

et

$$H = -\sin.\eta \cos.\theta - \cos.\zeta \cos.\eta \sin.\theta$$

sicque novem numeri conditionibus praescriptis satisfacientes ita sunt definiti, ut tres anguli ζ, η, θ arbitrio nostro relinquantur, in quo criterium solutionis completae cernitur.[1])

---

1) Eulerus formulas hac paragrapho evolutas iam exposuerat in Appendice de superficiebus *Introductioni in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, addita, t. II, p. 369; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series I, vol. 9. Iisdem formulis postea usus erat in disquisitionibus mechanicis, vide imprimis Commentationem 336 (indicis Enestroemiani): *Du mouvement d'un corps solide quelconque lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile,* Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin [16] (1760), 1767, p. 176, praesertim p. 197. *Leonhardi Euleri Opera omnia,* series II, vol. 6. P. St.

11. Solutio ergo completa nostri problematis ita se habet, ut novem numeri quaesiti sequentes sortiantur valores

$$A = \cos.\zeta, \qquad B = \sin.\zeta\cos.\eta,$$
$$D = \sin.\zeta\cos.\theta, \qquad E = \sin.\eta\sin.\theta - \cos.\zeta\cos.\eta\cos.\theta,$$
$$G = \sin.\zeta\sin.\theta, \qquad H = -\sin.\eta\cos.\theta - \cos.\zeta\cos.\eta\sin.\theta,$$

$$C = \sin.\zeta\sin.\eta,$$
$$F = -\cos.\eta\sin.\theta - \cos.\zeta\sin.\eta\cos.\theta,$$
$$I = \cos.\eta\cos.\theta - \cos.\zeta\sin.\eta\sin.\theta.$$

Quibus valoribus non solum sex conditiones priores, quibus problema determinatur, sed etiam sex posteriores atque adeo etiam novem novae § 7 exhibitae adimplentur. Haecque solutio istum praestat usum, ut inde facili negotio solutiones in numeris rationalibus, quotcumque libuerit, reperire liceat; tres scilicet angulos ζ, η, θ ita capi opus est, ut eorum tam sinus quam cosinus rationaliter exprimantur. Hinc solutio satis simplex prodibit sumendo

$$\cos.\zeta = \frac{3}{5}, \quad \sin.\zeta = \frac{4}{5}, \quad \cos.\eta = \frac{3}{5}, \quad \sin.\eta = \frac{4}{5}, \quad \cos.\theta = \frac{5}{13}, \quad \sin.\theta = \frac{12}{13}.$$

METHODUS GENERALIS HUIUSMODI PROBLEMATA RESOLVENDI

12. Methodus generalis, quam hic sum traditurus, ex principio supra § 3 memorato est petita, ubi ostendi problema propositum eo redire, ut ex ternis variabilibus x, y, z aliae tres X, Y, Z per huiusmodi formulas $\alpha x + \beta y + \gamma z$ ita determinentur, ut fiat

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

haecque determinatio maxime sit generalis; tum enim coefficientes trium harum formularum $\alpha x + \beta y + \gamma z$ pro novis variabilibus X, Y, Z resultantium erunt ipsi illi novem numeri, qui in problemate desiderantur. Hic igitur duae conditiones probe sunt perpendendae, quarum altera est, ut valores ipsarum X, Y, Z simpliciter per huiusmodi formulas $\alpha x + \beta y + \gamma z$ exprimantur, altera vero, ut tum fiat $X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Nisi enim illa conditio adesset, quaestio foret per methodum DIOPHANTEAM solutu facilis, dum tantum trium quadratorum summa in tria alia quadrata resolvi deberet, id quod nihil habet difficultatis.

13. Quoniam vero rem eo deducere animus est, ut methodus ad quaestiones continuo magis complicatas extendi queat, a casu simplicissimo exordiar, quo propositis tantum duabus variabilibus x et y ex iis aliae duae X et Y per huiusmodi formulas $\alpha x + \beta y$ definiri debeant, ut fiat

$$X^2 + Y^2 = x^2 + y^2.$$

Hunc in finem posito

$$X = \alpha x + \beta y \quad \text{et} \quad Y = \gamma x + \delta y$$

necesse est fiat

$$\alpha\alpha + \gamma\gamma = 1, \quad \beta\beta + \delta\delta = 1, \quad \alpha\beta + \gamma\delta = 0.$$

Statuamus ergo $\alpha = \cos.\zeta$ et $\beta = \cos.\eta$, ut habeatur $\gamma = \sin.\zeta$ et $\delta = \sin.\eta$ sicque duabus prioribus conditionibus satisfiat; tum vero tertia dabit

$$\cos.\zeta \cos.\eta + \sin.\zeta \sin.\eta = \cos.(\zeta - \eta) = 0,$$

ex quo erit $\zeta - \eta = 90^0$ ideoque $\eta = \zeta - 90^0$ ac propterea $\cos.\eta = \sin.\zeta$ et $\sin.\eta = -\cos.\zeta$. Unde patet, si capiatur

$$X = x\cos.\zeta + y\sin.\zeta \quad \text{et} \quad Y = x\sin.\zeta - y\cos.\zeta,$$

fore $X^2 + Y^2 = x^2 + y^2$.

14. Hoc lemmate praemisso ex propositis tribus variabilibus x, y, z primo alias tres x', y', z' ita definio, ut sit

$$x' = x\cos.\zeta + y\sin.\zeta, \quad y' = x\sin.\zeta - y\cos.\zeta \quad \text{et} \quad z' = z;$$

hoc enim modo certo erit

$$x'x' + y'y' + z'z' = xx + yy + zz.$$

Deinde ex his simili modo alias tres x'', y'', z'' deduco, ut sit

$$x'' = x', \quad y'' = y'\cos.\eta + z'\sin.\eta, \quad z'' = y'\sin.\eta - z'\cos.\eta,$$

atque hinc tandem quaesitas X, Y, Z ita definio

$$X = z''\cos.\theta + x''\sin.\theta, \quad Y = y'', \quad Z = z''\sin.\theta - x''\cos.\theta;$$

sic enim utique fiet

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = x''x'' + y''y'' + z''z'' = x'x' + y'y' + z'z' = xx + yy + zz.$$

15. Ex hac autem triplici positione sequitur fore

$$x'' = x \cos.\zeta + y \sin.\zeta,$$
$$y'' = x \sin.\zeta \cos.\eta - y \cos.\zeta \cos.\eta + z \sin.\eta,$$
$$z'' = x \sin.\zeta \sin.\eta - y \cos.\zeta \sin.\eta - z \cos.\eta,$$

tum vero

$$X = x(\sin.\zeta \sin.\eta \cos.\theta + \cos.\zeta \sin.\theta) - y(\cos.\zeta \sin.\eta \cos.\theta - \sin.\zeta \sin.\theta) - z \cos.\eta \cos.\theta,$$
$$Y = x \sin.\zeta \cos.\eta - y \cos.\zeta \cos.\eta + z \sin.\eta,$$
$$Z = x(\sin.\zeta \sin.\eta \sin.\theta - \cos.\zeta \cos.\theta) - y(\cos.\zeta \sin.\eta \sin.\theta + \sin.\zeta \cos.\theta) - z \cos.\eta \sin.\theta,$$

quae formulae cum ante inventis conveniunt.

16. Hanc solutionem esse generalem vel inde patet, quod ea complectatur tres angulos arbitrarios ζ, η, θ, qui per tres transformationes, quas instituimus, sunt introducti. Vis enim huius methodi in hoc consistit, ut quavis transformatione duae tantum quantitates varientur, dum scilicet in earum locum duae aliae una cum angulo arbitrario introducuntur tertia manente immutata. Hinc duae operationes iam quidem solutionem problematis suppeditant, sed nondum completam ob defectum unius quantitatis arbitrariae. Quamobrem tot transformationes institui oportet, donec tot huiusmodi quantitates arbitrariae fuerint ingressae, quot ad maximam solutionis extensionem requiruntur. Supra autem iam observavi, cum quaestio circa novem numeros versetur ac tantum sex conditiones praescribantur, tres eorum manere indeterminatos, quemadmodum etiam in solutione hic data ob angulos ζ, η, θ arbitrio nostro relictos tres numeri A, B, D pro lubitu accipi possunt.

17. Hinc autem dubium nasci posset, quod, cum qualibet transformatione novus angulus introducatur, aucto transformationum numero nostri problematis solutio multo adhuc generalior obtineri posset. Verum tamen qui huius rei periculum facere voluerit, mox animadvertet novum angulum introductum cum aliquo praecedentium in unum coalescere, ita ut, quotcumque transformationes suscipiantur, numerus angulorum vere arbitrariorum non ultra ternarium augeri queat. Adiiciamus enim insuper hanc transformationem ponendo

$$X' = X, \quad Y' = Y \cos.\lambda - Z \sin.\lambda \quad \text{et} \quad Z' = Y \sin.\lambda + Z \cos.\lambda$$

fietque

$$X'=x(\sin.\zeta\sin.\eta\cos.\theta+\cos.\zeta\sin.\theta)+y(\sin.\zeta\sin.\theta-\cos.\zeta\sin.\eta\cos.\theta)-z\cos.\eta\cos.\theta,$$

$$\begin{aligned}Y'=x\,&(\sin.\zeta\cos.\eta\cos.\lambda-\sin.\zeta\sin.\eta\sin.\theta\sin.\lambda+\cos.\zeta\cos.\theta\sin.\lambda)\\ -y\,&(\cos.\zeta\cos.\eta\cos.\lambda-\cos.\zeta\sin.\eta\sin.\theta\sin.\lambda-\sin.\zeta\cos.\theta\sin.\lambda)\\ &+z(\sin.\eta\cos.\lambda+\cos.\eta\sin.\theta\sin.\lambda),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z'=x\,&(\sin.\zeta\cos.\eta\sin.\lambda+\sin.\zeta\sin.\eta\sin.\theta\cos.\lambda-\cos.\zeta\cos.\theta\cos.\lambda)\\ -y\,&(\cos.\zeta\cos.\eta\sin.\lambda+\cos.\zeta\sin.\eta\sin.\theta\cos.\lambda+\sin.\zeta\cos.\theta\cos.\lambda)\\ &+z(\sin.\eta\sin.\lambda-\cos.\eta\sin.\theta\cos.\lambda).\end{aligned}$$

Ubi etsi quatuor anguli adsunt ζ, η, θ et λ, tamen inde non plures tribus coefficientes pro lubitu assignare licet; quod quidem non facile perspicitur et nonnisi per plures ambages ostendi posse videtur, cum tamen ex rei natura res sit prorsus manifesta.

18. Etiamsi maxime arduum videatur has quatuor quantitates indeterminatas ad tres revocare haecque investigatio omnino singulares calculi evolutiones postulet, tamen ratio in eo sita haud difficulter deprehenditur, quod bis inter easdem quantitates cognomines y et z transformatio sit instituta. Scilicet in secunda quantitates y', z' in y'', z'' ope anguli η et in quarta quantitates cognomines Y et Z ope anguli λ in Y' et Z' sunt transformatae. Quae duae transformationes si immediate se exciperent ponendo exempli gratia primum

$$y'=y\cos.\zeta+z\sin.\zeta,\quad z'=y\sin.\zeta-z\cos.\zeta,$$

tum vero

$$y''=y'\cos.\eta+z'\sin.\eta,\quad z''=y'\sin.\eta-z'\cos.\eta,$$

coniunctim prodiret

$$y''=\quad y\cos.(\zeta-\eta)+z\sin.(\zeta-\eta)$$

et

$$z''=-y\sin.(\zeta-\eta)+z\cos.(\zeta-\eta)$$

sicque duplex illa transformatio manifesto unicae ope anguli $\zeta-\eta$ factae aequivaleret. Quod etiam evenire est intelligendum, etiamsi huiusmodi binae transformationes inter quantitates cognomines non immediate se excipiant.

19. Hinc, cum quaelibet transformatio inter duas tantum quantitates variabiles instituatur, hanc regulam stabiliri convenit, ut hae transformationes semper inter binas variabiles diversi nominis suscipiantur; quo pacto numerus transformationum ita determinatur, ut plures forent inutiles. Ita cum in nostro problemate tres habeantur quantitates variabiles litteris x, y, z indicatae, plures quam tres transformationes locum habere nequeunt, dum una inter x et y, alia inter x et z et tertia inter y et z instituitur hoc modo

$$\begin{array}{lll} x' = x\cos.\zeta + y\sin.\zeta, & x'' = x'\cos.\eta + z'\sin.\eta, & x''' = x'', \\ y' = x\sin.\zeta - y\cos.\zeta, & y'' = y', & y''' = y''\cos.\theta + z''\sin.\theta, \\ z' = z, & z'' = x'\sin.\eta - z'\cos.\eta, & z''' = y''\sin.\theta - z''\cos.\theta. \end{array}$$

Ubi in prima quantitas nominis z, in secunda nominis y, in tertia vero nominis x invariata relinquitur.

20. Hanc regulam observantes methodum hanc per istiusmodi transformationes procedentem facile ad eiusmodi problemata accommodare poterimus, quibus plures quam tres quantitates variabiles proponuntur, quas simili modo in alias totidem transformari oporteat, ut quadratorum summa maneat eadem. Pluribus scilicet transformationibus inter binas tantum instituendis opus erit, ubi tantum erit cavendum, ne inter binas cognomines bis transformatio instituatur. Quo observato solutio non ante erit completa, quam inter omnes binas diversi nominis tales transformationes fuerint absolutae; cuiusmodi diversae combinationes habebuntur sex, si quatuor propositae sint quantitates, decem vero, si quinque, et ita porro. Cuiusmodi problemata aliquot cum solutionibus hic subiungam.

PROBLEMA

Quatuor quantitates v, x, y, z ita in alias per huiusmodi formulas

$$\alpha v + \beta x + \gamma y + \delta z$$

transformare, ut summa quadratorum maneat eadem, vel ponendo

$$\begin{aligned} V &= Av + Bx + Cy + Dz, \\ X &= Ev + Fx + Gy + Hz, \\ Y &= Iv + Kx + Ly + Mz, \\ Z &= Nv + Ox + Py + Qz \end{aligned}$$

hos sedecim coefficientes ita definire, ut fiat

$$VV + XX + YY + ZZ = vv + xx + yy + zz,$$

quem in finem sequentibus decem conditionibus satisfieri oportet

1. $AA + EE + II + NN = 1,$
2. $BB + FF + KK + OO = 1,$
3. $CC + GG + LL + PP = 1,$
4. $DD + HH + MM + QQ = 1;$
5. $AB + EF + IK + NO = 0,$
6. $AC + EG + IL + NP = 0,$
7. $AD + EH + IM + NQ = 0,$
8. $BC + FG + KL + OP = 0,$
9. $BD + FH + KM + OQ = 0,$
10. $CD + GH + LM + PQ = 0.$[1]

21. Cum hic sedecim numeri ex decem conditionibus inveniendi proponantur, evidens est eorum sex arbitrio nostro relinqui seu, quod eodem redit, solutionem completam sex quantitates arbitrarias complecti debere. Methodum autem ante expositam sequentes revera solutionem sex transformationibus absolvi deprehendimus, quae ita repraesentari possunt:

I.

$$x^{\mathrm{I}} = x \cos.\alpha + y \sin.\alpha,$$
$$y^{\mathrm{I}} = x \sin.\alpha - y \cos.\alpha,$$
$$z^{\mathrm{I}} = z,$$
$$v^{\mathrm{I}} = v;$$

II.

$$x^{\mathrm{II}} = x^{\mathrm{I}} \cos.\beta + z^{\mathrm{I}} \sin.\beta,$$
$$y^{\mathrm{II}} = y^{\mathrm{I}},$$
$$z^{\mathrm{II}} = x^{\mathrm{I}} \sin.\beta - z^{\mathrm{I}} \cos.\beta,$$
$$v^{\mathrm{II}} = v^{\mathrm{I}};$$

III.

$$x^{\mathrm{III}} = x^{\mathrm{II}} \cos.\gamma + v^{\mathrm{II}} \sin.\gamma,$$
$$y^{\mathrm{III}} = y^{\mathrm{II}},$$
$$z^{\mathrm{III}} = z^{\mathrm{II}},$$
$$v^{\mathrm{III}} = x^{\mathrm{II}} \sin.\gamma - v^{\mathrm{II}} \cos.\gamma;$$

IV.

$$x^{\mathrm{IV}} = x^{\mathrm{III}},$$
$$y^{\mathrm{IV}} = y^{\mathrm{III}} \cos.\delta + z^{\mathrm{III}} \sin.\delta,$$
$$z^{\mathrm{IV}} = y^{\mathrm{III}} \sin.\delta - z^{\mathrm{III}} \cos.\delta,$$
$$v^{\mathrm{IV}} = v^{\mathrm{III}};$$

1) Quod problema EULERUS litteris $\frac{9}{20}$ martio 1770 missis cum LAGRANGE communicavit; vide *L. EULERI Opera postuma,* t. I, Petropoli 1862, p. 574 et *Oeuvres de LAGRANGE,* publiées par les soins de M. I.-A. SERRET, t. XIV, Paris 1892, p. 219; *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series III. P. St.

V.

$$x^{V} = x^{IV},$$
$$y^{V} = y^{IV}\cos.\varepsilon + v^{IV}\sin.\varepsilon,$$
$$z^{V} = z^{IV},$$
$$v^{V} = y^{IV}\sin.\varepsilon - v^{IV}\cos.\varepsilon;$$

VI.

$$x^{VI} = x^{V} = X,$$
$$y^{VI} = y^{V} = Y,$$
$$z^{VI} = z^{V}\cos.\zeta + v^{V}\sin.\zeta = Z,$$
$$v^{VI} = z^{V}\sin.\zeta - v^{V}\cos.\zeta = V.$$

In quas formulas revera sex anguli arbitrarii ingrediuntur, ut solutionis completae indoles postulat.

22. Iam perspicuum est ope harum reductionum novas quantitates X, Y, Z, V ita per primum assumtas x, y, z, v expressum iri, ut fiat

$$X = Ax + By + Cz + Dv$$

similiterque etiam reliquae; unde facta evolutione coefficientes ipsarum x, y, z, v in quatuor formis pro X, Y, Z, V oriundis ipsos eos sedecim numeros praebebunt, qui requiruntur pro solutione problematis propositi. Quae cum per se sint manifesta, non opus esse arbitror singulos valores harum sedecim litterarum evolvere. Ceterum cum in harum sex transformationum prima binae litterae x et y, in secunda x et z, in tertia x et v, in quarta y et z, in quinta y et v et in sexta z et v sint transformatae, quae sunt omnes combinationes possibiles, in hoc ipso etiam continetur criterium solutionis completae.

23. Quoniam autem hic occurrunt quatuor quantitates x, y, z, v, in singulis operationibus duae transformationes binarum institui possunt, quo pacto evolutio valorum quaesitorum non mediocriter sublevatur; ubi iterum cavendum, ne inter easdem binas litteras plus una transformatione suscipiatur. Sic autem totum negotium tribus operationibus absolvi poterit hoc modo:

I.

$$x' = x\cos.\alpha + y\sin.\alpha,$$
$$y' = x\sin.\alpha - y\cos.\alpha,$$
$$z' = z\cos.\beta + v\sin.\beta,$$
$$v' = z\sin.\beta - v\cos.\beta;$$

II.

$$x'' = x'\cos.\gamma + z'\sin.\gamma,$$
$$y'' = y'\cos.\delta + v'\sin.\delta,$$
$$z'' = x'\sin.\gamma - z'\cos.\gamma,$$
$$v'' = y'\sin.\delta - v'\cos.\delta;$$

III.

$$x''' = x'' \cos.\varepsilon + v'' \sin.\varepsilon = X,$$

$$y''' = y'' \cos.\zeta + z'' \sin.\zeta = Y,$$

$$z''' = y'' \sin.\zeta - z'' \cos.\zeta = Z,$$

$$v''' = x'' \sin.\varepsilon - v'' \cos.\varepsilon = V.$$

Harum formularum evolutio pro sedecim numeris quaesitis sequentes praebet valores

$$A = \begin{Bmatrix} + \cos.\alpha \cos.\gamma \cos.\varepsilon \\ + \sin.\alpha \sin.\delta \sin.\varepsilon \end{Bmatrix}, \qquad B = \begin{Bmatrix} + \sin.\alpha \cos.\gamma \cos.\varepsilon \\ - \cos.\alpha \sin.\delta \sin.\varepsilon \end{Bmatrix},$$

$$C = \begin{Bmatrix} + \cos.\beta \sin.\gamma \cos.\varepsilon \\ - \sin.\beta \cos.\delta \sin.\varepsilon \end{Bmatrix}, \qquad D = \begin{Bmatrix} + \sin.\beta \sin.\gamma \cos.\varepsilon \\ + \cos.\beta \cos.\delta \sin.\varepsilon \end{Bmatrix};$$

$$E = \begin{Bmatrix} + \sin.\alpha \cos.\delta \cos.\zeta \\ + \cos.\alpha \sin.\gamma \sin.\zeta \end{Bmatrix}, \qquad F = \begin{Bmatrix} - \cos.\alpha \cos.\delta \cos.\zeta \\ + \sin.\alpha \sin.\gamma \sin.\zeta \end{Bmatrix},$$

$$G = \begin{Bmatrix} + \sin.\beta \sin.\delta \cos.\zeta \\ - \cos.\beta \cos.\gamma \sin.\zeta \end{Bmatrix}, \qquad H = \begin{Bmatrix} - \cos.\beta \sin.\delta \cos.\zeta \\ - \sin.\beta \cos.\gamma \sin.\zeta \end{Bmatrix};$$

$$I = \begin{Bmatrix} + \sin.\alpha \cos.\delta \sin.\zeta \\ - \cos.\alpha \sin.\gamma \cos.\zeta \end{Bmatrix}, \qquad K = \begin{Bmatrix} - \cos.\alpha \cos.\delta \sin.\zeta \\ - \sin.\alpha \sin.\gamma \cos.\zeta \end{Bmatrix},$$

$$L = \begin{Bmatrix} + \sin.\beta \sin.\delta \sin.\zeta \\ + \cos.\beta \cos.\gamma \cos.\zeta \end{Bmatrix}, \qquad M = \begin{Bmatrix} - \cos.\beta \sin.\delta \sin.\zeta \\ + \sin.\beta \cos.\gamma \cos.\zeta \end{Bmatrix};$$

$$N = \begin{Bmatrix} + \cos.\alpha \cos.\gamma \sin.\varepsilon \\ - \sin.\alpha \sin.\delta \cos.\varepsilon \end{Bmatrix}, \qquad O = \begin{Bmatrix} + \sin.\alpha \cos.\gamma \sin.\varepsilon \\ + \cos.\alpha \sin.\delta \cos.\varepsilon \end{Bmatrix},$$

$$P = \begin{Bmatrix} + \cos.\beta \sin.\gamma \sin.\varepsilon \\ + \sin.\beta \cos.\delta \cos.\varepsilon \end{Bmatrix}, \qquad Q = \begin{Bmatrix} + \sin.\beta \sin.\gamma \sin.\varepsilon \\ - \cos.\beta \cos.\delta \cos.\varepsilon \end{Bmatrix}.$$

24. Circa hos autem sedecim valores, quibus decem conditiones in problemate allatae implentur, hanc insignem proprietatem locum habere observo, ut iisdem quoque sequentibus decem conditionibus satisfiat

$$\begin{array}{ll} & 15.\ AE+BF+CG+DH=0,\\ 11.\ AA+BB+CC+DD=1, & 16.\ AI+BK+CL+DM=0,\\ 12.\ EE+FF+GG+HH=1, & 17.\ AN+BO+CP+DQ=0,\\ 13.\ II+KK+LL+MM=1, & 18.\ EI+FK+GL+HM=0,\\ 14.\ NN+OO+PP+QQ=1; & 19.\ EN+FO+GP+HQ=0,\\ & 20.\ IN+KO+LP+MQ=0.\end{array}$$

Quod est theorema prorsus memorabile ac simile ei, quod initio circa novem tantum numeros demonstravi. Eo autem modo, quo ibi demonstrationem adornavi, hic quidem ob litterarum multitudinem uti non licebit; sed quoniam ad hos valores generales successive pervenire docui, demonstratio ita convenientissime conficietur, ut, si haec proprietas in valoribus quibusque antecedentibus locum habuerit, eadem quoque in sequentibus per transformationem inde derivatis locum habere ostendatur.

25. Consideremus igitur valores quoscumque intermedios, qui per quatuor primitivas quantitates x, y, z, v ita definiantur, ut sit

$$x^{(n)}=\mathfrak{A}x+\mathfrak{B}y+\mathfrak{C}z+\mathfrak{D}v,\quad y^{(n)}=\mathfrak{E}x+\mathfrak{F}y+\mathfrak{G}z+\mathfrak{H}v,$$
$$z^{(n)}=\mathfrak{I}x+\mathfrak{K}y+\mathfrak{L}z+\mathfrak{M}v,\quad v^{(n)}=\mathfrak{N}x+\mathfrak{O}y+\mathfrak{P}z+\mathfrak{Q}v,$$

ubi coefficientes ita sint comparati, ut supra memoratis conditionibus satisfaciant, scilicet ut sit

$$\begin{array}{ll} & \mathfrak{A}\mathfrak{E}+\mathfrak{B}\mathfrak{F}+\mathfrak{C}\mathfrak{G}+\mathfrak{D}\mathfrak{H}=0,\\ \mathfrak{A}\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathfrak{B}+\mathfrak{C}\mathfrak{C}+\mathfrak{D}\mathfrak{D}=1, & \mathfrak{A}\mathfrak{I}+\mathfrak{B}\mathfrak{K}+\mathfrak{C}\mathfrak{L}+\mathfrak{D}\mathfrak{M}=0,\\ \mathfrak{E}\mathfrak{E}+\mathfrak{F}\mathfrak{F}+\mathfrak{G}\mathfrak{G}+\mathfrak{H}\mathfrak{H}=1, & \mathfrak{A}\mathfrak{N}+\mathfrak{B}\mathfrak{O}+\mathfrak{C}\mathfrak{P}+\mathfrak{D}\mathfrak{Q}=0,\\ \mathfrak{I}\mathfrak{I}+\mathfrak{K}\mathfrak{K}+\mathfrak{L}\mathfrak{L}+\mathfrak{M}\mathfrak{M}=1, & \mathfrak{E}\mathfrak{I}+\mathfrak{F}\mathfrak{K}+\mathfrak{G}\mathfrak{L}+\mathfrak{H}\mathfrak{M}=0,\\ \mathfrak{N}\mathfrak{N}+\mathfrak{O}\mathfrak{O}+\mathfrak{P}\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}=1; & \mathfrak{E}\mathfrak{N}+\mathfrak{F}\mathfrak{O}+\mathfrak{G}\mathfrak{P}+\mathfrak{H}\mathfrak{Q}=0,\\ & \mathfrak{I}\mathfrak{N}+\mathfrak{K}\mathfrak{O}+\mathfrak{L}\mathfrak{P}+\mathfrak{M}\mathfrak{Q}=0;\end{array}$$

quae conditiones utique in prima positione locum habent, ubi est

$$x^{(n)}=x,\quad y^{(n)}=y,\quad z^{(n)}=z,\quad v^{(n)}=v,$$

siquidem tum habetur

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{A}=1, & \mathfrak{E}=0, & \mathfrak{J}=0, & \mathfrak{N}=0, \\ \mathfrak{B}=0, & \mathfrak{F}=1, & \mathfrak{K}=0, & \mathfrak{O}=0, \\ \mathfrak{C}=0, & \mathfrak{G}=0, & \mathfrak{L}=1, & \mathfrak{P}=0, \\ \mathfrak{D}=0, & \mathfrak{H}=0, & \mathfrak{M}=0, & \mathfrak{Q}=1. \end{array}$$

26. Ponamus ex illis valoribus per transformationem sequentes ita derivari

$$\begin{array}{ll} x^{(n+1)} = x^{(n)}\cos.\theta + y^{(n)}\sin.\theta, & x^{(n+1)} = \mathfrak{A}'x + \mathfrak{B}'y + \mathfrak{C}'z + \mathfrak{D}'v, \\ y^{(n+1)} = x^{(n)}\sin.\theta - y^{(n)}\cos.\theta, & y^{(n+1)} = \mathfrak{E}'x + \mathfrak{F}'y + \mathfrak{G}'z + \mathfrak{H}'v, \\ z^{(n+1)} = z^{(n)}, & z^{(n+1)} = \mathfrak{J}'x + \mathfrak{K}'y + \mathfrak{L}'z + \mathfrak{M}'v, \\ v^{(n+1)} = v^{(n)}; & v^{(n+1)} = \mathfrak{N}'x + \mathfrak{O}'y + \mathfrak{P}'z + \mathfrak{Q}'v \end{array}$$

eritque

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}\cos.\theta + \mathfrak{E}\sin.\theta, & \mathfrak{E}' = \mathfrak{A}\sin.\theta - \mathfrak{E}\cos.\theta, & \mathfrak{J}' = \mathfrak{J}, & \mathfrak{N}' = \mathfrak{N}, \\ \mathfrak{B}' = \mathfrak{B}\cos.\theta + \mathfrak{F}\sin.\theta, & \mathfrak{F}' = \mathfrak{B}\sin.\theta - \mathfrak{F}\cos.\theta, & \mathfrak{K}' = \mathfrak{K}, & \mathfrak{O}' = \mathfrak{O}, \\ \mathfrak{C}' = \mathfrak{C}\cos.\theta + \mathfrak{G}\sin.\theta, & \mathfrak{G}' = \mathfrak{C}\sin.\theta - \mathfrak{G}\cos.\theta, & \mathfrak{L}' = \mathfrak{L}, & \mathfrak{P}' = \mathfrak{P}, \\ \mathfrak{D}' = \mathfrak{D}\cos.\theta + \mathfrak{H}\sin.\theta, & \mathfrak{H}' = \mathfrak{D}\sin.\theta - \mathfrak{H}\cos.\theta, & \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}, & \mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}. \end{array}$$

Unde quidem hae conditiones iam sponte implentur

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}'\mathfrak{J}' + \mathfrak{K}'\mathfrak{K}' + \mathfrak{L}'\mathfrak{L}' + \mathfrak{M}'\mathfrak{M}' &= 1, \\ \mathfrak{N}'\mathfrak{N}' + \mathfrak{O}'\mathfrak{O}' + \mathfrak{P}'\mathfrak{P}' + \mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}' &= 1, \\ \mathfrak{J}'\mathfrak{N}' + \mathfrak{K}'\mathfrak{O}' + \mathfrak{L}'\mathfrak{P}' + \mathfrak{M}'\mathfrak{Q}' &= 0. \end{aligned}$$

27. Reliquis vero etiam conditionibus satisfieri facile ostenditur; erit enim

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'\mathfrak{B}' + \mathfrak{C}'\mathfrak{C}' + \mathfrak{D}'\mathfrak{D}' = \begin{cases} + (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\mathfrak{D})\cos.\theta^2 \\ + (\mathfrak{E}\mathfrak{E} + \mathfrak{F}\mathfrak{F} + \mathfrak{G}\mathfrak{G} + \mathfrak{H}\mathfrak{H})\sin.\theta^2 \\ + 2(\mathfrak{A}\mathfrak{E} + \mathfrak{B}\mathfrak{F} + \mathfrak{C}\mathfrak{G} + \mathfrak{D}\mathfrak{H})\sin.\theta\cos.\theta \end{cases}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} + 1\cdot\cos.\theta^2 \\ + 1\cdot\sin.\theta^2 \\ + 0\cdot\sin.\theta\cos.\theta \end{array} \right\} = 1,$$

quod simili modo de summa quadratorum secundae columnae

$$\mathfrak{E}'\mathfrak{E}' + \mathfrak{F}'\mathfrak{F}' + \mathfrak{G}'\mathfrak{G}' + \mathfrak{H}'\mathfrak{H}'$$

ostenditur. Deinde etiam res manifesta est circa summam productorum

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{J}' + \mathfrak{B}'\mathfrak{K}' + \mathfrak{C}'\mathfrak{L}' + \mathfrak{D}'\mathfrak{M}' = \left\{\begin{array}{l} -(\mathfrak{A}\mathfrak{J} + \mathfrak{B}\mathfrak{K} + \mathfrak{C}\mathfrak{L} + \mathfrak{D}\mathfrak{M})\cos.\theta \\ +(\mathfrak{E}\mathfrak{J} + \mathfrak{F}\mathfrak{K} + \mathfrak{G}\mathfrak{L} + \mathfrak{H}\mathfrak{M})\sin.\theta \end{array}\right\} = 0$$

pariterque etiam circa has summas

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{N}' + \mathfrak{B}'\mathfrak{O}' + \mathfrak{C}'\mathfrak{P}' + \mathfrak{D}'\mathfrak{Q}' = 0,$$

$$\mathfrak{E}'\mathfrak{J}' + \mathfrak{F}'\mathfrak{K}' + \mathfrak{G}'\mathfrak{L}' + \mathfrak{H}'\mathfrak{M}' = 0$$

et

$$\mathfrak{E}'\mathfrak{N}' + \mathfrak{F}'\mathfrak{O}' + \mathfrak{G}'\mathfrak{P}' + \mathfrak{H}'\mathfrak{Q}' = 0.$$

Unde tantum relinquitur haec

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{E}' + \mathfrak{B}'\mathfrak{F}' + \mathfrak{C}'\mathfrak{G}' + \mathfrak{D}'\mathfrak{H}' = \left\{\begin{array}{l} +(\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\mathfrak{D})\sin.\theta\cos.\theta \\ -(\mathfrak{E}\mathfrak{E} + \mathfrak{F}\mathfrak{F} + \mathfrak{G}\mathfrak{G} + \mathfrak{H}\mathfrak{H})\sin.\theta\cos.\theta \\ +(\mathfrak{A}\mathfrak{E} + \mathfrak{B}\mathfrak{F} + \mathfrak{C}\mathfrak{G} + \mathfrak{D}\mathfrak{H})\sin.\theta^2 \\ -(\mathfrak{A}\mathfrak{E} + \mathfrak{B}\mathfrak{F} + \mathfrak{C}\mathfrak{G} + \mathfrak{D}\mathfrak{H})\cos.\theta^2 \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{l} +\sin.\theta\cos.\theta \\ -\sin.\theta\cos.\theta \\ +0\cdot\sin.\theta^2 \\ -0\cdot\cos.\theta^2 \end{array}\right\} = 0.$$

28. Cum igitur harum decem conditionum veritas in positione prima, uti iam ostendi, sit manifesta, etiam in positione secunda per transformationem binarum inde deducta quoque subsistet hincque etiam in omnibus sequentibus positionibus simili modo ex praecedentibus deductis. Quocirca etiam solutio generalis sex transformationibus uti in § 21 absoluta ita erit comparata, ut non solum decem conditionibus in problemate praescriptis, sed etiam alteris illis decem § 24 commemoratis satisfaciat; hocque ita, ut decem prioribus conditionibus satisfieri nequeat, quin simul decem posterioribus satisfiat. Atque hinc iam facile colligitur eandem proprietatem etiam in problematibus, ubi similis quaestio circa 25, 36 pluresque numeros instituitur, semper locum habere debere. Progredior igitur ad sequens

PROBLEMA

Invenire 25 numeros A, B, C, D etc. ita in formam quadrati disponendos

$$\begin{matrix} A, & B, & C, & D, & E, \\ F, & G, & H, & I, & K, \\ L, & M, & N, & O, & P, \\ Q, & R, & S, & T, & U, \\ V, & W, & X, & Y, & Z, \end{matrix}$$

ut summae quadratorum ex singulis columnis tam verticalibus quam horizontalibus desumtorum unitati aequentur, summae productorum autem ex binis columnis sive verticalibus sive horizontalibus formatorum evanescant.

29. Ex praecedentibus intelligitur hoc problema eo reduci, ut sumtis istis 25 numeris pro coefficientibus quinque variabiles u, v, x, y, z per huiusmodi formulas in alias transformentur

$$\begin{aligned} U &= Au + Bv + Cx + Dy + Ez, \\ V &= Fu + Gv + Hx + Iy + Kz, \\ X &= Lu + Mv + Nx + Oy + Pz, \\ Y &= Qu + Rv + Sx + Ty + Uz, \\ Z &= Vu + Wv + Xx + Yy + Zz, \end{aligned}$$

ut fiat

$$UU + VV + XX + YY + ZZ = uu + vv + xx + yy + zz.$$

Quod ergo problema, cum quinque quantitates decem combinationes diversas binarum admittant, per decem transformationes successive in binis instituendas resolvetur hoc modo:

I.	II.
$u^{\text{I}} = u \cos.\alpha + v \sin.\alpha,$	$u^{\text{II}} = u^{\text{I}} \cos.\beta + x^{\text{I}} \sin.\beta,$
$v^{\text{I}} = u \sin.\alpha - v \cos.\alpha,$	$v^{\text{II}} = v^{\text{I}},$
$x^{\text{I}} = x,$	$x^{\text{II}} = u^{\text{I}} \sin.\beta - x^{\text{I}} \cos.\beta,$
$y^{\text{I}} = y,$	$y^{\text{II}} = y^{\text{I}},$
$z^{\text{I}} = z;$	$z^{\text{II}} = z^{\text{I}};$

III.

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{III}} &= u^{\mathrm{II}} \cos.\gamma + y^{\mathrm{II}} \sin.\gamma, \\ v^{\mathrm{III}} &= v^{\mathrm{II}}, \\ x^{\mathrm{III}} &= x^{\mathrm{II}}, \\ y^{\mathrm{III}} &= u^{\mathrm{II}} \sin.\gamma - y^{\mathrm{II}} \cos.\gamma, \\ z^{\mathrm{III}} &= z^{\mathrm{II}}; \end{aligned}$$

IV.

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{IV}} &= u^{\mathrm{III}} \cos.\delta + z^{\mathrm{III}} \sin.\delta, \\ v^{\mathrm{IV}} &= v^{\mathrm{III}}, \\ x^{\mathrm{IV}} &= x^{\mathrm{III}}, \\ y^{\mathrm{IV}} &= y^{\mathrm{III}}, \\ z^{\mathrm{IV}} &= u^{\mathrm{III}} \sin.\delta - z^{\mathrm{III}} \cos.\delta; \end{aligned}$$

V.

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{V}} &= u^{\mathrm{IV}}, \\ v^{\mathrm{V}} &= v^{\mathrm{IV}} \cos.\varepsilon + x^{\mathrm{IV}} \sin.\varepsilon, \\ x^{\mathrm{V}} &= v^{\mathrm{IV}} \sin.\varepsilon - x^{\mathrm{IV}} \cos.\varepsilon, \\ y^{\mathrm{V}} &= y^{\mathrm{IV}}, \\ z^{\mathrm{V}} &= z^{\mathrm{IV}}; \end{aligned}$$

VI.

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{VI}} &= u^{\mathrm{V}}, \\ v^{\mathrm{VI}} &= v^{\mathrm{V}} \cos.\zeta + y^{\mathrm{V}} \sin.\zeta, \\ x^{\mathrm{VI}} &= x^{\mathrm{V}}, \\ y^{\mathrm{VI}} &= v^{\mathrm{V}} \sin.\zeta - y^{\mathrm{V}} \cos.\zeta, \\ z^{\mathrm{VI}} &= z^{\mathrm{V}}; \end{aligned}$$

VII.

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{VII}} &= u^{\mathrm{VI}}, \\ v^{\mathrm{VII}} &= v^{\mathrm{VI}} \cos.\eta + z^{\mathrm{VI}} \sin.\eta, \\ x^{\mathrm{VII}} &= x^{\mathrm{VI}}, \\ y^{\mathrm{VII}} &= y^{\mathrm{VI}}, \\ z^{\mathrm{VII}} &= v^{\mathrm{VI}} \sin.\eta - z^{\mathrm{VI}} \cos.\eta; \end{aligned}$$

VIII.

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{VIII}} &= u^{\mathrm{VII}}, \\ v^{\mathrm{VIII}} &= v^{\mathrm{VII}}, \\ x^{\mathrm{VIII}} &= x^{\mathrm{VII}} \cos.\theta + y^{\mathrm{VII}} \sin.\theta, \\ y^{\mathrm{VIII}} &= x^{\mathrm{VII}} \sin.\theta - y^{\mathrm{VII}} \cos.\theta, \\ z^{\mathrm{VIII}} &= z^{\mathrm{VII}}; \end{aligned}$$

IX.

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{IX}} &= u^{\mathrm{VIII}}, \\ v^{\mathrm{IX}} &= v^{\mathrm{VIII}}, \\ x^{\mathrm{IX}} &= x^{\mathrm{VIII}} \cos.\varkappa + z^{\mathrm{VIII}} \sin.\varkappa, \\ y^{\mathrm{IX}} &= y^{\mathrm{VIII}}, \\ z^{\mathrm{IX}} &= x^{\mathrm{VIII}} \sin.\varkappa - z^{\mathrm{VIII}} \cos.\varkappa; \end{aligned}$$

X.

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{X}} &= u^{\mathrm{IX}} &&= U, \\ v^{\mathrm{X}} &= v^{\mathrm{IX}} &&= V, \\ x^{\mathrm{X}} &= x^{\mathrm{IX}} &&= X, \\ y^{\mathrm{X}} &= y^{\mathrm{IX}} \cos.\lambda + z^{\mathrm{IX}} \sin.\lambda &&= Y, \\ z^{\mathrm{X}} &= y^{\mathrm{IX}} \sin.\lambda - z^{\mathrm{IX}} \cos.\lambda &&= Z. \end{aligned}$$

30. His ergo operationibus decem anguli arbitrarii introducuntur, in quo character solutionis completae seu generalis consistit. Cum enim conditiones ex columnis verticalibus petitae problemati solvendo sufficiant indeque alterae conditiones ad columnas horizontales spectantes sponte impleantur, quadra-

torum summae praebent 5, producta vero ex binis 10 aequationes, ita ut omnino 15 conditionibus sit satisfaciendum; quare cum 25 numeri investigandi proponantur, ex iis 10 adhuc manebunt indeterminati; in quo etiam solutio hic data egregie consentit, dum plures quam decem transformationes, quae quidem circa binas quantitates diversas instituantur, locum habere nequeunt.

31. Quo illarum formularum evolutio facilior reddatur, qualibet operatione duae transformationes coniungi possunt, prorsus ut in solutione praecedentis problematis est factum. Has autem coniunctiones ita capi convenit, ut quantitas solitaria nullam mutationem patiens in omnibus sit diversa; id quod evenit, si binae praecedentium transformationum hoc modo coniungantur

$$(\mathrm{I}, \mathrm{VIII}), \quad (\mathrm{II}, \mathrm{VII}), \quad (\mathrm{III}, \mathrm{IX}), \quad (\mathrm{IV}, \mathrm{VI}), \quad (\mathrm{V}, \mathrm{X}),$$

unde sequentes quinque transformationes oriuntur:

I.

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{I}} &= u \cos.\alpha + v \sin.\alpha, \\ v^{\mathrm{I}} &= u \sin.\alpha - v \cos.\alpha, \\ x^{\mathrm{I}} &= x \cos.\beta + y \sin.\beta, \\ y^{\mathrm{I}} &= x \sin.\beta - y \cos.\beta, \\ z^{\mathrm{I}} &= z; \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{II}} &= u^{\mathrm{I}} \cos.\gamma + x^{\mathrm{I}} \sin.\gamma, \\ v^{\mathrm{II}} &= v^{\mathrm{I}} \cos.\delta + z^{\mathrm{I}} \sin.\delta, \\ x^{\mathrm{II}} &= u^{\mathrm{I}} \sin.\gamma - x^{\mathrm{I}} \cos.\gamma, \\ y^{\mathrm{II}} &= y^{\mathrm{I}}, \\ z^{\mathrm{II}} &= v^{\mathrm{I}} \sin.\delta - z^{\mathrm{I}} \cos.\delta; \end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{III}} &= u^{\mathrm{II}} \cos.\varepsilon + y^{\mathrm{II}} \sin.\varepsilon, \\ v^{\mathrm{III}} &= v^{\mathrm{II}}, \\ x^{\mathrm{III}} &= x^{\mathrm{II}} \cos.\zeta + z^{\mathrm{II}} \sin.\zeta, \\ y^{\mathrm{III}} &= u^{\mathrm{II}} \sin.\varepsilon - y^{\mathrm{II}} \cos.\varepsilon, \\ z^{\mathrm{III}} &= x^{\mathrm{II}} \sin.\zeta - z^{\mathrm{II}} \cos.\zeta; \end{aligned}$$

IV.

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{IV}} &= u^{\mathrm{III}} \cos.\eta + z^{\mathrm{III}} \sin.\eta, \\ v^{\mathrm{IV}} &= v^{\mathrm{III}} \cos.\theta + y^{\mathrm{III}} \sin.\theta, \\ x^{\mathrm{IV}} &= x^{\mathrm{III}}, \\ y^{\mathrm{IV}} &= v^{\mathrm{III}} \sin.\theta - y^{\mathrm{III}} \cos.\theta, \\ z^{\mathrm{IV}} &= u^{\mathrm{III}} \sin.\eta - z^{\mathrm{III}} \cos.\eta; \end{aligned}$$

V.

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{V}} &= u^{\mathrm{IV}}, \\ v^{\mathrm{V}} &= v^{\mathrm{IV}} \cos.\varkappa + x^{\mathrm{IV}} \sin.\varkappa, \\ x^{\mathrm{V}} &= v^{\mathrm{IV}} \sin.\varkappa - x^{\mathrm{IV}} \cos.\varkappa, \\ y^{\mathrm{V}} &= y^{\mathrm{IV}} \cos.\lambda + z^{\mathrm{IV}} \sin.\lambda, \\ z^{\mathrm{V}} &= y^{\mathrm{IV}} \sin.\lambda - z^{\mathrm{IV}} \cos.\lambda. \end{aligned}$$

32. Simili modo problemata huius generis circa 36 pluresque numeros, quorum quidem multitudo est numerus quadratus, resolvi possunt; ubi pro calculo contrahendo non solum duas, sed etiam tres ac deinceps plures transformationes in una operatione complecti licebit. Atque hic perpetuo pul-

cherrimus consensus inter solutionem generalem ex omnibus combinationibus eliciendam ac rei naturam deprehendetur. Posito enim in genere quantitatum quaesitarum numero $= nn$ quadratorum summae unitati aequandae praebent n conditiones, productorum autem ex binis nihilo aequandae $\frac{nn-n}{2}$ sicque coniunctim $\frac{nn+n}{2}$ conditiones, quo numero a numero quaesitorum nn ablato restat $\frac{nn-n}{2}$, ac propterea totidem ex quaesitis manebunt indeterminati seu solutio generalis totidem quantitates arbitrarias complecti debet; secundum regulam autem supra expositam in hunc finem $\frac{nn-n}{2}$ transformationibus est utendum, quibus ergo praecise tot anguli arbitrarii in calculum introducuntur.

PROBLEMATIS INITIO PROPOSITI SOLUTIO GENERALIS IN NUMERIS RATIONALIBUS

33. Coronidis loco solutionem problematis nostri e methodo DIOPHANTEA petitam subiungam, quae sequenti modo satis concinne exhiberi potest.

Sumantur pro lubitu quatuor numeri p, q, r, s ac posita quadratorum eorum summa

$$pp + qq + rr + ss = u$$

novem numeri quaesiti ita determinati reperiuntur[1])

$$A = \frac{pp+qq-rr-ss}{u}, \quad B = \frac{2qr+2ps}{u}, \quad C = \frac{2qs-2pr}{u},$$

$$D = \frac{2qr-2ps}{u}, \quad E = \frac{pp-qq+rr-ss}{u}, \quad F = \frac{2pq+2rs}{u},$$

$$G = \frac{2qs+2pr}{u}, \quad H = \frac{2rs-2pq}{u}, \quad I = \frac{pp-qq-rr+ss}{u}.$$

1) Solutiones sequentes ex formulis § 34 exhibitis oriuntur ponendo $a=p$, $b=q$, $c=-r$, $d=-s$ et per $p^2+q^2+r^2+s^2=u$ dividendo. Falso igitur A. CAYLEY (*Sur quelques propriétés des déterminants gauches,* Journal für r. u. a. Mathematik **32**, 1846, p. 119, praesertim p. 121; vide etiam eiusdem *Collected mathematical papers,* vol. 1, Cambridge 1889, p. 332) asseruit O. RODRIGUES primum has formas invenisse (*Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide,* Journal de mathématiques 5_1, 1840, p. 380, praesertim p. 405). Debemus quidem illi methodum directam expressiones EULERIANAS obtinendi. Sed etiam hic viam ingressus est, quam EULERUS straverat in commentatione 478 (indicis ENESTROEMIANI): *Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum,* Novi comment. acad. sc. Petrop. **20** (1775), 1776, p. 189; *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series II, vol. 6. P. St.

Hinc simplicissimi numeri, qui quidem inter se omnes sint inaequales, colliguntur sequentes in quadratum dispositi

$+\frac{47}{57}$	$+\frac{28}{57}$	$-\frac{16}{57}$
$+\frac{4}{57}$	$+\frac{23}{57}$	$+\frac{52}{57}$
$+\frac{32}{57}$	$-\frac{44}{57}$	$+\frac{17}{57}$

hic est $p = 6$, $q = 4$, $r = 2$, $s = 1$.

$+\frac{53}{63}$	$+\frac{26}{63}$	$-\frac{22}{63}$
$-\frac{2}{63}$	$+\frac{43}{63}$	$+\frac{46}{63}$
$+\frac{34}{63}$	$-\frac{38}{63}$	$+\frac{37}{63}$

ubi est $p = 7$, $q = 3$, $r = 2$, $s = 1$.

En adhuc alia fere aeque simplicia exempla [1])

$+\frac{51}{71}$	$-\frac{42}{71}$	$+\frac{26}{71}$
$-\frac{18}{71}$	$+\frac{19}{71}$	$+\frac{66}{71}$
$-\frac{46}{71}$	$-\frac{54}{71}$	$+\frac{3}{71}$

$+\frac{31}{99}$	$+\frac{38}{99}$	$+\frac{86}{99}$
$-\frac{58}{99}$	$+\frac{79}{99}$	$-\frac{14}{99}$
$-\frac{74}{99}$	$-\frac{46}{99}$	$+\frac{47}{99}$

PRO CASU SEDECIM NUMERORUM

34. Si pro casu sedecim numerorum simili modo in quadratum disponendorum solutio in rationalibus desideretur, unde facile numeros non nimis magnos reperire liceat, methodus supra data ad hunc finem difficulter accommodatur. Alio autem modo prorsus singulari sequentem solutionem latissime

1) Capiantur primo loco $p = 6$, $q = 5$, $r = -3$, $s = -1$, secundo loco $p = -8$, $q = -1$, $r = 5$, $s = -3$. Exempla quidem, quae exhibuit editio princeps, corrigenda erant. P. St.

patentem sum nactus, ubi sumtis pro lubitu octo numeris a, b, c, d, p, q, r, s sedecim numeri in quadratum dispositi ita se habent

$+ap+bq+cr+ds$	$+aq-bp+cs-dr$	$+ar-bs-cp+dq$	$+as+br-cq-dp$
$+aq-bp-cs+dr$	$-ap-bq+cr+ds$	$-as-br-cq-dp$	$+ar-bs+cp-dq$
$+ar+bs-cp-dq$	$+as-br-cq+dp$	$-ap+bq-cr+ds$	$-aq-bp-cs-dr$
$+as-br+cq-dp$	$-ar-bs-cp-dq$	$+aq+bp-cs-dr$	$-ap+bq+cr-ds$

ubi summa quadratorum in singulis columnis sive horizontalibus sive verticalibus prodit ubique eadem

$$=(aa+bb+cc+dd)(pp+qq+rr+ss).$$

Quare ut hae summae unitati aequentur, hanc expressionem quadratum reddi per eiusque radicem singulos numeros dividi oportet. Tum vero hi sedecim numeri etiam hac gaudent proprietate, ut summa productorum ex binis columnis sive horizontalibus sive verticalibus sumtorum ubique evanescat.[1])

35. Hinc ergo facile plurima exempla in numeris satis exiguis deduci possunt, inter quae sequens ideo notatu dignum videtur, quod omnes numeri sint inter se inaequales[2])

1) Formas columnae verticalis primae EULERUS iam anno 1748, quo anno in *Introductione in analysin infinitorum* immutationem coordinatarum tractaverat, cum CHR. GOLDBACH communicavit, *Correspondance math. et phys.*, publiée par P.-H. FUSS, t. I, St.-Pétersbourg 1843, p. 453; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series III. Mentionem earum fecit etiam in Commentationibus 242 et 445 (indicis ENESTROEMIANI): *Demonstratio theorematis FERMATIANI omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum,* Novi comment. acad. sc. Petrop. 5 (1754/5), 1760, p. 13, et *Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata,* Nova acta eruditorum 1773, p. 193, atque Acta acad. sc. Petrop. 1777: II, 1780, p. 48; *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series I, vol. 2, p. 338, imprimis p. 369, et vol. 3, p. 218, imprimis p. 229. P. St.

2) Numeri sequentes signis columnae verticalis secundae mutatis ex aequatione $1530=51\cdot 30$ obtinentur, scilicet ponendo $a=5$, $b=5$, $c=1$, $d=0$; $p=4$, $q=3$, $r=2$, $s=1$. P. St.

						quadrata			
+37	+4	+1	+12		1369	16	1	144	1530
−6	+33	−18	+9		36	1089	324	81	1530
+11	+8	−7	−36		121	64	49	1296	1530
−2	+19	+34	−3		4	361	1156	9	1530
				summae	1530	1530	1530	1530	summae

Ac de productis binorum res est manifesta, cum sit

$$-6\cdot 37+4\cdot 33-1\cdot 18+9\cdot 12=0,$$
$$+4\cdot 37-6\cdot 33+8\cdot 11-2\cdot 19=0$$
etc.

Generales autem formas inspicienti facile patebit per eas omnes illas viginti conditiones § 20 et § 24 allatas perfecte impleri, siquidem summae quaternorum quadratorum ad unitatem revocentur.

36. Solutio haec eo maiorem attentionem meretur, quod ad eam nulla certa methodo, sed potius quasi divinando sum perductus; et quoniam ea adeo octo numeros arbitrarios implicat, qui quidem facta reductione ad unitatem ad septem rediguntur, vix dubitare licet, quin ista solutio sit universalis et omnes prorsus solutiones possibiles in se complectatur. Si quis ergo viam directam ad hanc solutionem manuducentem investigaverit, insignia certe subsidia Analysi attulisse erit censendus. Utrum autem similes solutiones pro amplioribus quadratis, quae numeris 25, 36 et maioribus constant, expectare liceat, vix affirmare ausim. Non solum autem hinc Algebra communis, sed etiam Methodus DIOPHANTEA maxima incrementa adeptura videtur.[1]

---

1) Quas EULERUS desideraverat formulas, detexit A. CAYLEY; vide dissertationem p. 309 laudatam nec non eius partem alteram: *Recherches ultérieures sur les déterminants gauches*, eodem loco, 50, 1855, p. 299 (*Collected mathematical papers*, vol. 2, Cambridge 1889, p. 202); qua in dissertatione haec EULERI commentatio laudatur. P. St.

PROBLEMA CURIOSUM

Invenire sedecim numeros ita in quadratum disponendos

A	B	C	D
E	F	G	H
I	K	L	M
N	O	P	Q

ut non solum summae quadratorum per columnas tam horizontales quam verticales sumtorum, sed etiam eae, quae per diagonales sumuntur, scilicet

$$A^2+F^2+L^2+Q^2 \quad et \quad D^2+G^2+K^2+N^2,$$

sint omnes inter se aequales ac praeterea producta binorum ita sumtorum, ut supra est praeceptum, evanescant, scilicet

$$AE+BF+CG+DH=0, \qquad AB+EF+IK+NO=0,$$
$$AI+BK+CL+DM=0, \qquad AC+EG+IL+NP=0,$$
$$AN+BO+CP+DQ=0, \qquad AD+EH+IM+NQ=0,$$
$$EI+FK+GL+HM=0, \qquad BC+FG+KL+OP=0,$$
$$EN+FO+GP+HQ=0, \qquad BD+FH+KM+OQ=0,$$
$$IN+KO+LP+MQ=0; \qquad CD+GH+LM+PQ=0.$$

SOLUTIO

Hic ergo proponuntur 22 conditiones, quibus satisfieri oportet; omissis autem duabus ad diagonales spectantibus sequens forma generalis reliquas omnes adimplet

$+ap+bq+cr+ds$	$+ar-bs-cp+dq$	$-as-br+cq+dp$	$+aq-bp+cs-dr$
$-aq+bp+cs-dr$	$+as+br+cq+dp$	$+ar-bs+cp-dq$	$+ap+bq-cr-ds$
$+ar+bs-cp-dq$	$-ap+bq-cr+ds$	$+aq+bp+cs+dr$	$+as-br-cq+dp$
$-as+br-cq+dp$	$-aq-bp+cs+dr$	$-ap+bq+cr-ds$	$+ar+bs+cp+dq$

Ubi summa quaternorum quadratorum ex columnis tam horizontalibus quam verticalibus sumtorum est

$$(aa+bb+cc+dd)(pp+qq+rr+ss);$$

cui ut etiam summae quadratorum per diagonales sumtorum aequentur, sequentes binas aequationes confici oportet

$$+abpq+abrs+acpr+acqs+adps+adqr+bcqr$$
$$+bcps+bdqs+bdpr+cdrs+cdpq=0,$$
$$-abpq-abrs+acpr+acqs-adps-adqr-bcqr$$
$$-bcps+bdqs+bdpr-cdrs-cdpq=0,$$

ex quibus deducuntur hae duae

$$(ac+bd)(pr+qs)=0,$$
$$(ab+cd)(pq+rs)+(ad+bc)(ps+qr)=0.$$

Unde hae duae determinationes eliciuntur

$$\text{I.}\quad pr+qs=0$$

et

$$\text{II.}\quad \frac{a}{c}=\frac{-d(pq+rs)-b(ps+qr)}{b(pq+rs)+d(ps+qr)},$$

ita ut adhuc sex litterae arbitrio nostro relinquantur.

Evolvamus exemplum sumendo $p=6$, $q=3$, $r=1$, $s=-2$; unde cum fiat $\frac{a}{c}=\frac{-16d+9b}{16b-9d}$, sit $d=0$, $b=1$, $a=9$, $c=16$ et quadratum omnibus conditionibus satisfaciens erit

+73	−85	+65	−11
−53	+31	+107	+41
−89	−67	+1	−67
−29	−65	−35	+103

ubi summae quaternorum quadratorum secundum columnas tam horizontales quam verticales itidemque secundum diagonales sumtorum prodeunt $=16900$, ex quo, si hi numeri dividerentur per 130, hae summae omnes ad unitatem redigerentur.

Si quem hic offendant numeri 65 et 67 bis occurrentes, adiungam aliud huiusmodi quadratum minoribus adeo numeris expressum

+ 68	— 29	+ 41	— 37
— 17	+ 31	+ 79	+ 32
+ 59	+ 28	— 23	+ 61
— 11	— 77	+ 8	+ 49

ubi quaternorum quadratorum summa est 8515.[1])

Notetur denique in his quadratis etiam quadrata tam numerorum angularium quam mediorum eandem summam producere.

1) Quod exemplum EULERUS litteris anno 1770 missis cum LAGRANGE communicavit; vide notam p. 300. Prodit autem ex aequatione $8515 = 65 \cdot 131$, scilicet ponendo $a = 5$, $b = -5$, $c = -9$, $d = 0$; $p = 4$, $q = 6$, $r = 3$, $s = -2$. P. St.

NOVA RATIO QUANTITATES IRRATIONALES PROXIME EXPRIMENDI

Commentatio 450 indicis ENESTROEMIANI
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 18 (1773), 1774, p. 136—170
Summarium ibidem p. 17—19

SUMMARIUM

Notissimum est omnem quantitatem irrationalem simplicem ad hanc formam $(1+x)^n$ reduci posse. Sit enim N numerus quicumque ad potestatem exponentis fracti $\frac{\mu}{\nu} = n$ elevandus; ei semper hanc formam tribuere licebit

$$N = a^\nu + b,$$

unde fit

$$N^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu \left(1 + \frac{b}{a^\nu}\right)^{\frac{\mu}{\nu}};$$

sicque sola expressio $\left(1+\frac{b}{a^\nu}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$ irrationalitatem continet, quae, si ponatur $\frac{b}{a^\nu} = x$, ad formam $(1+x)^n$ reducitur, quae more consueto per evolutionem binomii NEUTONIANAM in seriem infinitam convertitur; idque duplici modo, primum scilicet directe

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2}x^2 + \text{etc.},$$

secundo autem ob

$$(1+x)^n = \frac{1}{(1+x)^{-n}}$$

erit quoque

$$(1+x)^n = \frac{1}{1 - nx + \frac{n\cdot n+1}{1\cdot 2}x^2 - \text{etc.}},$$

ex quarum duarum expressionum multiplicatione posito n pro $2n$ derivatur tertia

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{n}{2}x + \frac{n \cdot n - 2}{2 \cdot 4}x^2 + \text{etc.}}{1 - \frac{n}{2}x + \frac{n \cdot n + 2}{2 \cdot 4}x^2 - \text{etc.}},$$

cui quidem postremae formulae infinite multae aliae similes formulam $(1+x)^n$ exprimentes possunt exhiberi. Fingatur enim

$$(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.}}{1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 + \text{etc.}}$$

atque evidens est, si vel numerator vel denominator pro lubitu assumatur, alterius coefficientes inde determinari. Quamquam vero problema hoc intuitu est indeterminatum atque infinitas admittit solutiones, ad id tamen imprimis est attendendum, ut utraque series reddatur quam maxime convergens. Id ut obtineatur, denominatori finitum quendam terminorum numerum tribuere licebit atque ita quidem, ut inde unus pluresve numeratoris termini ordine sese excipientes plane evanescant. Hoc igitur negotium Ill. Auctor in hac dissertatione uberius pertractat atque in tribus primis problematibus formulam propositam $(1+x)^n$ in series maxime convergentes ita resolvere docet, ut denominator sit vel binomium $1 - \alpha x$ vel trinomium $1 - \alpha x + \beta x^2$ vel quadrinomium $1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3$; ex quorum casuum particularium consideratione facile derivare licet solutionem generalem, si scilicet pro denominatore assumatur multinomium quodcumque. Resultant ex hac investigatione formulae notatu quam maxime dignae, quarum ope Ill. Auctor radicem quadraticam ex quovis numero proposito non quadrato similique modo radicem cubicam ex quovis numero non cubo proxime assignare et pro extractione radicum altiorum potestatum analogas formulas quantumvis exactas formare docet. Immo ulterius quoque earundem usus patet, siquidem non logarithmum modo numeri cuiuscumque propositi, sed quantitatem quoque exponentialem e^x harum formularum ope proxime exprimere licet designante e istum numerum, cuius logarithmus hyperbolicus unitati aequatur. Quod ut perspicuum fiat, sufficit perpendisse quantitatis $1+x$ logarithmum hyperbolicum esse $\frac{(1+x)^n - 1}{n}$ existente $n = 0$ et $e^x = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, si pro n sumatur numerus infinitus.

1. Omnem quantitatem irrationalem simplicem ad hanc formam $(1+x)^n$ reduci posse constat, siquidem exponens n numerum quemcumque fractum designare assumatur; quicumque enim numerus N ad exponentem fractum $n = \frac{\mu}{\nu}$ elevandus proponatur, eum semper ad hanc formam

$$a^\nu + b$$

revocare licet, unde formula proposita fit

$$(a^\nu + b)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu \left(1 + \frac{b}{a^\nu}\right)^{\frac{\mu}{\nu}};$$

sicque irrationalitas continetur in expressione $\left(1 + \frac{b}{a^\nu}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$, quae cum formula proposita $(1+x)^n$ congruit ponendo $\frac{b}{a^\nu} = x$ et $\frac{\mu}{\nu} = n$. Ac si pro a fractiones velimus admittere ac b aeque negative ac positive sumere, quantitas $\frac{b}{a^\nu}$ hoc modo iam quovis casu satis parva effici potest, unde etiam more consueto formula $(1+x)^n$ in seriem admodum convergentem resolvitur.

2. Per evolutionem scilicet binomii NEUTONIANAM haec formula $(1+x)^n$ duplici modo in seriem infinitam convertitur, primum nempe directe

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \text{etc.},$$

tum vero, quia est

$$(1+x)^n = \frac{1}{(1+x)^{-n}},$$

erit quoque

$$(1+x)^n = \frac{1}{1 - \frac{n}{1}x + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \text{etc.}}.$$

Hinc vero porro has expressiones invicem multiplicando et pro $2n$ scribendo n derivabitur tertia expressio multo magis convergens

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{n}{2}x + \frac{n(n-2)}{2\cdot 4}x^2 + \frac{n(n-2)(n-4)}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \text{etc.}}{1 - \frac{n}{2}x + \frac{n(n+2)}{2\cdot 4}x^2 - \frac{n(n+2)(n+4)}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \text{etc.}}.$$

3. Attendenti autem facile patebit infinitas expressiones huic postremae similes exhiberi posse, quae singulae aequales sint formulae propositae $(1+x)^n$; si enim ponamus

$$(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \text{etc.}}{1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 + \delta x^4 - \varepsilon x^5 + \zeta x^6 - \text{etc.}},$$

determinatio coefficientium praebet problema indeterminatum atque adeo, si vel numerator vel denominator ad lubitum assumitur, alterius coefficientes

inde determinantur. Hinc quaestio nascitur maximi momenti, quomodo tam numerator quam denominator determinari debeant, ut ambo simul maxime convergant; atque hic quidem denominatori finitum terminorum numerum tribuere licet, ubi quaestio huc redit, quomodo coefficientes denominatoris assumi oporteat, ut pro numeratore resultet series maxime convergens.

4. Quodsi autem in denominatore datus terminorum numerus constituatur, numerator erit series maxime convergens, si unus pluresve eius termini se ordine excipientes plane evanescant; tum enim sequentes termini tam fient exigui, si quidem fuerit $x < 1$, ut sine notabili errore reiici queant. Atque hic notari convenit, si pro denominatore sumatur binomium $1 - \alpha x$, quemlibet numeratoris terminum ad nihilum redigi posse; sin autem denominator statuatur trinomium, bini termini successivi numeratoris in nihilum redigi poterunt; terni vero et ita porro, si pro denominatore quadrinomium vel multinomium assumatur. Tum vero etiam perspicuum est advergentiam eo fore maiorem, quo longius numeratoris termini evanescentes ab initio distent; unde sequentia problemata resolvenda occurrunt.

PROBLEMA 1

5. *Binomii potestatem $(1 + x)^n$ transformare in talem expressionem maxime convergentem*

$$(1 + x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \text{etc.}}{1 - \alpha x}$$

denominatore existente binomio.

SOLUTIO

Si potestas $(1 + x)^n$ in seriem evolvatur eaque per denominatorem $1 - \alpha x$ multiplicetur, orietur sequens aequatio conficienda

$$\begin{array}{llllll}
0 = 1 + \frac{n}{1}x & + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 & + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 & + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 & + \text{etc.} \\
\quad - \alpha & - \frac{n}{1}\alpha & - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha & - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha & - \text{etc.} \\
\quad - 1 - A & - B & - C & - D & - \text{etc.}
\end{array}$$

Iam prouti numeratoris terminus vel secundus vel tertius vel quartus etc. evanescere debet, sequentes coefficientium determinationes obtinebuntur:

I. Si $A=0$, habetur statim $\alpha=\frac{n}{1}$ et sequentes numeratoris termini erunt

$$B=-\frac{n(n+1)}{1\cdot 2},\quad C=-\frac{2n(n-1)(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3},\quad D=-\frac{3n(n-1)(n-2)(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\quad \text{etc.}$$

II. Si $B=0$, habetur statim $\alpha=\frac{n-1}{2}$ et pro numeratore

$$A=\frac{n+1}{2\cdot 1},\quad C=-\frac{1(n+1)n(n-1)}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3},\quad D=-\frac{2(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\quad \text{etc.}$$

III. Si $C=0$, habetur $\alpha=\frac{n-2}{3}$ et pro numeratore

$$A=\frac{2(n+1)}{3\cdot 1},\quad B=\frac{1(n+1)n}{3\cdot 1\cdot 2},\quad D=-\frac{1(n+1)n(n-1)(n-2)}{3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\quad \text{etc.}$$

IV. Si $D=0$, habetur $\alpha=\frac{n-3}{4}$ et pro numeratore

$$A=\frac{3(n+1)}{4\cdot 1},\quad B=\frac{2(n+1)n}{4\cdot 1\cdot 2},\quad C=\frac{1(n+1)n(n-1)}{4\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\quad \text{etc.}$$

Hinc iam in genere patet, si quilibet alius sequentium terminorum in numeratore debeat evanescere, haberi primo

$$\alpha=\frac{n-\omega}{\omega+1}$$

et pro numeratore

$$A=\frac{\omega}{\omega+1}\cdot\frac{n+1}{1},\quad B=\frac{\omega-1}{\omega+1}\cdot\frac{(n+1)n}{1\cdot 2},\quad C=\frac{\omega-2}{\omega+1}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$D=\frac{\omega-3}{\omega+1}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\quad E=\frac{\omega-4}{\omega+1}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},$$

cuius progressionis lex est manifesta.

COROLLARIUM 1

6. Quodsi iam in numeratore termini, qui evanescentem sequuntur, omittantur, habebuntur expressiones finitae ac rationales continuo propius valorem $(1+x)^n$ exhibentes; ita si primo ponatur $A=0$, habebitur ista appropinquatio

$$(1+x)^n=\frac{1}{1-nx},$$

quae, etsi a veritate parum recedit, tamen magis aberrat quam sequentes.

COROLLARIUM 2

7. Sit $B = 0$ et secundus casus praebebit hanc appropinquationem

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{n+1}{2\cdot 1}x}{1 - \frac{n-1}{2}x} = \frac{1 + \frac{n+1}{2}x}{1 - \frac{n-1}{2}x}.$$

Hinc, si sit $n = \frac{\mu}{\nu}$, erit

$$(1+x)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1 + \frac{\mu+\nu}{2\nu}x}{1 - \frac{\mu-\nu}{2\nu}x}.$$

COROLLARIUM 3

8. Sit $C = 0$ et tertius casus dabit

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{2(n+1)}{3\cdot 1}x + \frac{1(n+1)n}{3\cdot 1\cdot 2}x^2}{1 - \frac{n-2}{3}x},$$

unde, si fuerit $n = \frac{\mu}{\nu}$, erit

$$(1+x)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1 + \frac{2(\mu+\nu)}{3\cdot 1\nu}x + \frac{1(\mu+\nu)\mu}{3\cdot 1\cdot 2\nu^2}x^2}{1 - \frac{\mu-2\nu}{3\nu}x}.$$

COROLLARIUM 4

9. Sit $D = 0$ et quartus casus dat

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{3(n+1)}{4\cdot 1}x + \frac{2(n+1)n}{4\cdot 1\cdot 2}x^2 + \frac{1(n+1)n(n-1)}{4\cdot 1\cdot 2\cdot 3}x^3}{1 - \frac{n-3}{4}x}$$

ideoque, si $n = \frac{\mu}{\nu}$, erit

$$(1+x)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1 + \frac{3(\mu+\nu)}{4\cdot 1\nu}x + \frac{2(\mu+\nu)\mu}{4\cdot 1\cdot 2\nu^2}x^2 + \frac{1(\mu+\nu)\mu(\mu-\nu)}{4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\nu^3}x^3}{1 - \frac{\mu-3\nu}{4\nu}x};$$

unde perspicuum est, quomodo huiusmodi formulae ulterius continuari debent, quamobrem plures hic non exhibeo.

COROLLARIUM 5

10. In genere autem habebitur haec forma

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{(\omega-1)(n+1)}{\omega\cdot 1}x + \frac{(\omega-2)(n+1)n}{\omega\cdot 1\cdot 2}x^2 + \frac{(\omega-3)(n+1)n(n-1)}{\omega\cdot 1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \text{etc.}}{1 - \frac{n-\omega+1}{\omega}x},$$

ubi pro ω sumi potest numerus quicumque; haecque expressio si in infinitum continuetur, non solum ad veritatem appropinquat, sed ipsum verum valorem formulae $(1+x)^n$ exhibebit.

COROLLARIUM 6

11. Si sumatur $\omega = n+1$, denominator in unitatem abibit orieturque nota series NEUTONIANA

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \text{etc.}$$

Sin autem pro ω capiatur numerus infinitus, erit

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{n+1}{1}x + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \text{etc.}}{1+x},$$

cuius ratio quoque ex binomio NEUTONIANO est manifesta.

COROLLARIUM 7

12. Si ponatur $\omega = n$, habebitur

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{(n+1)(n-1)}{1\cdot n}x + \frac{(n+1)(n-2)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(n+1)(n-1)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{(n+1)(n-1)(n-2)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{n}x}$$

vel numeratorem et denominatorem per n multiplicando

$$(1+x)^n = \frac{n + \frac{(n+1)(n-1)}{1}x + \frac{(n+1)n(n-2)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(n+1)n(n-1)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \text{etc.}}{n-x}.$$

COROLLARIUM 8

13. Si ponatur $\omega = x$, fiet denominator $= x - n$ et obtinetur[1])

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{n+1}{1}(x-1) + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}x(x-2) + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^2(x-3) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^3(x-4) + \text{etc.}}{x-n}$$

similique modo ex hac expressione innumerabiles series deduci possunt, quarum ratio aliunde non tam facile perspici poterit; unde haec investigatio doctrinam serierum non mediocriter amplificare videtur.

PROBLEMA 2

14. *Binomii potestatem* $(1+x)^n$ *transformare in huiusmodi seriem maxime convergentem*

$$(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \text{etc.}}{1 - \alpha x + \beta x^2}$$

denominatore existente trinomio.

SOLUTIO

Resoluta potestate $(1+x)^n$ in seriem more consueto confici oportebit sequentem aequationem

$$\begin{array}{llllll}
0 = 1 + \frac{n}{1}x & + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 & + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 & + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 & + \text{etc.} \\
\quad\;\; - \alpha & - \frac{n}{1}\alpha & - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha & - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha & - \text{etc.} \\
 & + \beta & + \frac{n}{1}\beta & + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\beta & + \text{etc.} \\
\;\; - 1 - A & - B & - C & - D & - \text{etc.}
\end{array}$$

atque hic denominatorem $1 - \alpha x + \beta x^2$ ita definire licet, ut in numeratore bini termini successive evanescant, unde is eo magis convergens reddetur.

1) Ratio seriei facile perspicitur; est enim

$$(1+x)^n(x-n) = (1+x)^{n+1} - \frac{d(1+x)^{n+1}}{dx}.$$ P. St.

I. Sit $A=0$ et $B=0$; erit $\alpha=\frac{n}{1}$ et $\beta=\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$, unde habetur

$$C=\frac{n}{1}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}-\frac{(n-1)n}{2\cdot 1}+\frac{(n+1)n}{1\cdot 2}\right)=\frac{1(n+2)(n+1)n}{3\cdot 1\cdot 2\cdot 1},$$

$$D=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{(n-2)(n-3)}{3\cdot 4}-\frac{(n-2)n}{3\cdot 1}+\frac{(n+1)n}{1\cdot 2}\right)=\frac{2(n+2)(n+1)n(n-1)}{4\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2},$$

$$E=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{(n-3)(n-4)}{4\cdot 5}-\frac{(n-3)n}{4\cdot 1}+\frac{(n+1)n}{1\cdot 2}\right)=\frac{3(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{5\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}$$

et in genere erit

$$N=\cdots\left(\frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{(\nu+1)(\nu+2)}-\frac{(n-\nu)n}{(\nu+1)1}+\frac{(n+1)n}{1\cdot 2}\right)=\cdots\frac{\nu(n+2)(n+1)}{(\nu+2)\cdot 1\cdot 2},$$

ex quo generali valore illi speciales facile derivantur.

II. Sit $B=0$ et $C=0$; erit pro α et β

$$\beta-\frac{n}{1}\alpha+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}=0,$$

$$\beta-\frac{n-1}{\cdot 2}\alpha+\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}=0;$$

hinc

$$\alpha=\frac{2(n-1)}{3},\qquad \beta=\frac{n(n-1)}{2\cdot 3}.$$

Pro numeratore vero habebitur

$$A=\frac{n}{1}-\frac{2(n-1)}{3}=\frac{n+2}{3},$$

$$D=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{(n-2)(n-3)}{3\cdot 4}-\frac{2(n-2)(n-1)}{3\cdot 3}+\frac{n(n-1)}{2\cdot 3}\right)$$
$$=\frac{1\cdot 2(n+2)(n+1)n(n-1)}{3\cdot 4\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2},$$

$$E=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{(n-3)(n-4)}{4\cdot 5}-\frac{2(n-3)(n-1)}{4\cdot 3}+\frac{n(n-1)}{2\cdot 3}\right)$$
$$=\frac{2\cdot 3(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{4\cdot 5\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3},$$

$$F=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{(n-4)(n-5)}{5\cdot 6}-\frac{2(n-4)(n-1)}{5\cdot 3}+\frac{n(n-1)}{2\cdot 3}\right)$$
$$=\frac{3\cdot 4(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5\cdot 6\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

et in genere

$$N = \cdots \left(\frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{(\nu+1)(\nu+2)} - \frac{2(n-\nu)(n-1)}{(\nu+1)\cdot 3} + \frac{n(n-1)}{2\cdot 3}\right) = \cdots \frac{\nu(\nu-1)(n+2)(n+1)}{(\nu+2)(\nu+1)\cdot 2\cdot 3}.$$

III. Sit $C=0$ et $D=0$ ac pro denominatore erit

$$\beta - \frac{n-1}{2}\alpha + \frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3} = 0,$$

$$\beta - \frac{n-2}{3}\alpha + \frac{(n-2)(n-3)}{3\cdot 4} = 0;$$

hinc

$$\alpha = \frac{n-2}{2}, \qquad \beta = \frac{(n-1)(n-2)}{3\cdot 4}$$

hincque pro numeratore

$$A = \frac{n}{1} - \frac{n-2}{2} = \frac{n+2}{2},$$

$$B = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} - \frac{n(n-2)}{1\cdot 2} + \frac{(n-1)(n-2)}{3\cdot 4} = \frac{(n+2)(n+1)}{3\cdot 4},$$

$$E = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{(n-3)(n-4)}{4\cdot 5} - \frac{(n-3)(n-2)}{4\cdot 2} + \frac{(n-1)(n-2)}{3\cdot 4}\right)$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot 3}.$$

Quia autem sufficit terminos, qui evanescentes antecedant, nosse, sequentes non determino, quia eorum lex deinceps patebit.

IV. Sit $D=0$ et $E=0$; erit pro denominatore

$$\beta - \frac{n-2}{3}\alpha + \frac{(n-2)(n-3)}{3\cdot 4} = 0,$$

$$\beta - \frac{n-3}{4}\alpha + \frac{(n-3)(n-4)}{4\cdot 5} = 0;$$

hinc

$$\alpha = \frac{2(n-3)}{5}, \qquad \beta = \frac{(n-2)(n-3)}{4\cdot 5};$$

at pro numeratore reperietur

$$A = \frac{n}{1} - \frac{2(n-3)}{5} = \frac{3(n+2)}{5},$$

$$B = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} - \frac{2n(n-3)}{1\cdot 5} + \frac{(n-2)(n-3)}{4\cdot 5} = \frac{3(n+2)(n+1)}{5\cdot 4},$$

$$C = \frac{n}{1}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3} - \frac{2(n-1)(n-3)}{2\cdot 5} + \frac{(n-2)(n-3)}{4\cdot 5}\right) = \frac{(n+2)(n+1)n}{5\cdot 4\cdot 3}.$$

V. Sit $E=0$ et $F=0$ atque ex allatis facile concludimus fore primo

$$\alpha=\frac{2(n-4)}{6},\qquad \beta=\frac{(n-3)(n-4)}{5\cdot 6},$$

tum vero

$$A=\frac{4(n+2)}{6},\qquad B=\frac{6(n+2)(n+1)}{6\cdot 5},\qquad C=\frac{4(n+2)(n+1)n}{6\cdot 5\cdot 4}$$

et

$$D=\frac{1(n+2)(n+1)n(n-1)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}.$$

Generaliter ergo denique has eliciemus determinationes

$$\alpha=\frac{2(n-\omega)}{\omega+2},\qquad \beta=\frac{(n-\omega)(n-\omega+1)}{(\omega+2)(\omega+1)};$$

$$A=\frac{\omega}{1}\cdot\frac{n+2}{\omega+2},$$

$$B=\frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{(n+2)(n+1)}{(\omega+2)(\omega+1)},$$

$$C=\frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{(n+2)(n+1)n}{(\omega+2)(\omega+1)\omega},$$

$$D=\frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{(\omega+2)(\omega+1)\omega(\omega-1)},$$

$$E=\frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)(\omega-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{(\omega+2)(\omega+1)\omega(\omega-1)(\omega-2)}$$

etc.

Unde etiam coefficientes terminorum post evanescentes sequentium facile formantur.

COROLLARIUM 1

15. Quando pro denominatore in genere est

$$\alpha=\frac{2(n-\omega)}{\omega+2}\quad\text{et}\quad \beta=\frac{(n-\omega)(n-\omega+1)}{(\omega+2)(\omega+1)}$$

pro numeratore habebimus

$$A = \frac{\omega}{\omega+2} \cdot \frac{n+2}{1},$$

$$B = \frac{\omega(\omega-1)}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{1\cdot 2},$$

$$C = \frac{(\omega-1)(\omega-2)}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$D = \frac{(\omega-2)(\omega-3)}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

$$E = \frac{(\omega-3)(\omega-4)}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

etc.

Quorum valorum analogia ad eos, qui in primo problemate sunt inventi, iam satis luculenter ordinem sequentium, ubi denominator pluribus constabit terminis, declarat.

COROLLARIUM 2

16. Neglectis terminis in numeratore post evanescentes sequentibus habebimus approximationes sequentes:

Si $\omega = 0$, erit

$$(1+x)^n = \frac{1}{1 - nx + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}xx},$$

quae quidem in hoc genere plurimum a veritate discrepat.

COROLLARIUM 3

17. Ponamus $\omega = 1$ eritque proxime

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{n+2}{3}x}{1 - \frac{2(n-1)}{3}x + \frac{n(n-1)}{2\cdot 3}xx};$$

sin autem $\omega = 2$, erit adhuc propius

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{2(n+2)}{4}x + \frac{(n+2)(n+1)}{4\cdot 3}xx}{1 - \frac{2(n-2)}{4}x + \frac{(n-2)(n-1)}{4\cdot 3}xx};$$

et si $\omega = 3$, erit

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{3(n+2)}{5}x + \frac{3(n+2)(n+1)}{5\cdot 4}xx + \frac{(n+2)(n+1)n}{5\cdot 4\cdot 3}x^3}{1 - \frac{2(n-3)}{5}x + \frac{(n-3)(n-2)}{5\cdot 4}xx};$$

si $\omega = 4$, erit

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{4(n+2)}{6}x + \frac{6(n+2)(n+1)}{6\cdot 5}xx + \frac{4(n+2)(n+1)n}{6\cdot 5\cdot 4}x^3 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}x^4}{1 - \frac{2(n-4)}{6}x + \frac{(n-4)(n-3)}{6\cdot 5}xx};$$

si $\omega = 5$, erit

$$(1+x)^n = \frac{\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{5(n+2)}{7}x + \frac{10(n+2)(n+1)}{7\cdot 6}x^2 + \frac{10(n+2)(n+1)n}{7\cdot 6\cdot 5}x^3 + \frac{5(n+2)(n+1)n(n-1)}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}x^4 \\ \qquad + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}x^5 \end{array}\right\}}{1 - \frac{2(n-5)}{7}x + \frac{(n-5)(n-4)}{7\cdot 6}xx}.$$

Quae expressiones ex coefficientibus potestatum binomii expedite ulterius continuantur. Quo longius vero continuantur, eo minus a veritate aberrabunt.

COROLLARIUM 4

18. Generaliter autem hanc formulae $(1+x)^n$ transformationem commodius exhibere non licet, quam ut dicamus esse

$$(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{etc.}}{1 - \alpha x + \beta xx}$$

existentibus coefficientium valoribus

$$\alpha = \frac{2(n-\omega)}{\omega+2}, \qquad \beta = \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)}{(\omega+2)(\omega+1)};$$

$$A = \frac{(\omega+1)\omega}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{n+2}{1},$$

$$B = \frac{\omega(\omega-1)}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{1\cdot 2},$$

$$C = \frac{(\omega-1)(\omega-2)}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$D = \frac{(\omega-2)(\omega-3)}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

$$E = \frac{(\omega-3)(\omega-4)}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

etc.

COROLLARIUM 5

19. Hic iterum patet, cum quantitas ω ab arbitrio nostro pendeat, si capiatur $\omega = n$, prodire $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \text{etc.}$$

Sin autem sit $\omega = \infty$, erit $\alpha = -2$ et $\beta = 1$; unde

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{n+2}{1}x + \frac{(n+2)(n+1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \text{etc.}}{1+2x+xx}$$

seu

$$(1+x)^n = \frac{(1+x)^{n+2}}{(1+x)^2},$$

cuius ratio est manifesta.

PROBLEMA 3

20. *Binomii potestatem* $(1+x)^n$ *transformare in huiusmodi seriem maxime convergentem*

$$(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \text{etc.}}{1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3}$$

denominatore existente quadrinomio.

SOLUTIO

Sequens ergo aequatio construi debet

$$\begin{array}{llllll}
0 = 1 + \frac{n}{1}x & + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 & + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 & + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 & + \text{etc.} \\
\quad\; -\alpha & - \frac{n}{1}\alpha & - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha & - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha & - \text{etc.} \\
 & + \beta & + \frac{n}{1}\beta & + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\beta & + \text{etc.} \\
 & & - \gamma & - \frac{n}{1}\gamma & - \text{etc.} \\
-1 - A & - B & - C & - D & - \text{etc.}
\end{array}$$

Hic iam effici potest, ut in serie coefficientium A, B, C, D etc. terni successivi evanescant. Sumantur ergo terni quicumque successive evanescentes et obtinebuntur tres huiusmodi aequationes

$$\gamma-\frac{n-\omega+2}{\omega-1}\beta+\frac{(n-\omega+2)(n-\omega+1)}{(\omega-1)\omega}\alpha-\frac{(n-\omega+2)(n-\omega+1)(n-\omega)}{(\omega-1)\omega(\omega+1)}=0,$$
$$\gamma-\frac{n-\omega+1}{\omega}\beta+\frac{(n-\omega+1)(n-\omega)}{\omega(\omega+1)}\alpha-\frac{(n-\omega+1)(n-\omega)(n-\omega-1)}{\omega(\omega+1)(\omega+2)}=0,$$
$$\gamma-\frac{n-\omega}{\omega+1}\beta+\frac{(n-\omega)(n-\omega-1)}{(\omega+1)(\omega+2)}\alpha-\frac{(n-\omega)(n-\omega-1)(n-\omega-2)}{(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3)}=0.$$

Hinc differentiis sumendis habebitur

$$\frac{n+1}{(\omega-1)\omega}\beta-\frac{2(n+1)(n-\omega+1)}{(\omega-1)\omega(\omega+1)}\alpha+\frac{3(n+1)(n-\omega+1)(n-\omega)}{(\omega-1)\omega(\omega+1)(\omega+2)}=0,$$
$$\frac{n+1}{\omega(\omega+1)}\beta-\frac{2(n+1)(n-\omega)}{\omega(\omega+1)(\omega+2)}\alpha+\frac{3(n+1)(n-\omega)(n-\omega-1)}{\omega(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3)}=0$$

sive

$$\beta-\frac{2(n-\omega+1)}{\omega+1}\alpha+\frac{3(n-\omega+1)(n-\omega)}{(\omega+1)(\omega+2)}=0,$$
$$\beta-\frac{2(n-\omega)}{\omega+2}\alpha+\frac{3(n-\omega)(n-\omega-1)}{(\omega+2)(\omega+3)}=0,$$

quarum aequationum differentia dat

$$\frac{2(n+2)}{(\omega+1)(\omega+2)}\alpha-\frac{2\cdot 3(n+2)(n-\omega)}{(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3)}=0;$$

hincque fit

$$\alpha=\frac{3(n-\omega)}{\omega+3},\quad \beta=\frac{3(n-\omega)(n-\omega+1)}{(\omega+3)(\omega+2)}\quad \text{et}\quad \gamma=\frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}.$$

His autem valoribus pro denominatore inventis pro numeratore reperientur

$$A=\frac{\omega}{\omega+3}\cdot\frac{n+3}{1},$$
$$B=\frac{\omega(\omega-1)}{(\omega+3)(\omega+2)}\cdot\frac{(n+3)(n+2)}{1\cdot 2},$$
$$C=\frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3},$$
$$D=\frac{(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$
$$E=\frac{(\omega-2)(\omega-3)(\omega-4)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},$$
$$F=\frac{(\omega-3)(\omega-4)(\omega-5)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$
etc.

ac denominator formabitur ex his valoribus

$$\alpha = \frac{3(n-\omega)}{\omega+3},$$

$$\beta = \frac{3(n-\omega)(n-\omega+1)}{(\omega+3)(\omega+2)},$$

$$\gamma = \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}.$$

Quibus substitutis erit

$$(1+x)^n = \frac{1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\text{etc.}}{1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3}.$$

COROLLARIUM 1

21. Manifestum hic est, quicumque numerus integer positivus pro ω assumatur, in numeratore semper terminos ternos successivos in nihilum abire. Ita si sit $\omega = 0$, erit

$$(1+x)^n = \frac{1 + * + * + * - \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \frac{4(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \text{etc.}}{1-\frac{n}{1}x+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3},$$

unde reiectis in numeratore terminis, qui post evanescentes sequuntur, erit proxime

$$(1+x)^n = \frac{1}{1-\frac{n}{1}x+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3}.$$

COROLLARIUM 2

22. Simili modo ponendo $\omega = 1$ erit proxime

$$(1+x)^n = \frac{1+\frac{n+3}{4}x}{1-\frac{3(n-1)}{4}x+\frac{3(n-1)n}{4\cdot 3}x^2-\frac{(n-1)n(n+1)}{4\cdot 3\cdot 2}x^3};$$

at si sumatur $\omega = 2$, erit

$$(1+x)^n = \frac{1+\frac{2(n+3)}{5}x+\frac{(n+3)(n+2)}{5\cdot 4}x^2}{1-\frac{3(n-2)}{5}x+\frac{3(n-2)(n-1)}{5\cdot 4}x^2-\frac{(n-2)(n-1)n}{5\cdot 4\cdot 3}x^3};$$

posito vero $\omega = 3$ erit

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{3(n+3)}{6}x + \frac{3(n+3)(n+2)}{6\cdot 5}x^2 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6\cdot 5\cdot 4}x^3}{1 - \frac{3(n-3)}{6}x + \frac{3(n-3)(n-2)}{6\cdot 5}x^2 - \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6\cdot 5\cdot 4}x^3}.$$

COROLLARIUM 3

23. Postrema haec formula ideo est notatu digna, quod numerator et denominator pari terminorum numero constat et quod alter in alterum abit, si exponens n sumatur negative. Haec ergo expressio conferenda est cum similibus ex problematibus superioribus ortis

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{(n+1)}{2}x}{1 - \frac{(n-1)}{2}x} \quad (\S\ 7),$$

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{2(n+2)}{4}x + \frac{(n+2)(n+1)}{4\cdot 3}x^2}{1 - \frac{2(n-2)}{4}x + \frac{(n-2)(n-1)}{4\cdot 3}x^2} \quad (\S\ 17),$$

unde simul ordo huiusmodi formularum facile colligitur.

PROBLEMA 4

24. *Binomii potestatem* $(1+x)^n$ *transformare in huiusmodi progressionem maxime convergentem*

$$(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \text{etc.}}{1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 + \delta x^4 - \varepsilon x^5 + \zeta x^6 - \text{etc.}}$$

denominatore existente multinomio quocumque.

SOLUTIO

Si solutiones praecedentium problematum consulamus, levi attentione adhibita inde sequentem solutionem generalem colligimus:

$$A = \frac{\omega}{\omega+\varphi}\cdot\frac{n+\varphi}{1},$$

$$B = \frac{\omega(\omega-1)}{(\omega+\varphi)(\omega+\varphi-1)}\cdot\frac{(n+\varphi)(n+\varphi-1)}{1\cdot 2},$$

$$C = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{(\omega+\varphi)(\omega+\varphi-1)(\omega+\varphi-2)}\cdot\frac{(n+\varphi)(n+\varphi-1)(n+\varphi-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$D = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{(\omega+\varphi)(\omega+\varphi-1)(\omega+\varphi-2)(\omega+\varphi-3)}\cdot\frac{(n+\varphi)(n+\varphi-1)(n+\varphi-2)(n+\varphi-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

etc.

Deinde vero pro denominatore:

$$\alpha = \frac{\varphi}{1}\cdot\frac{n-\omega}{\omega+\varphi},$$

$$\beta = \frac{\varphi(\varphi-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{(n-\omega)(n-\omega+1)}{(\omega+\varphi)(\omega+\varphi-1)},$$

$$\gamma = \frac{\varphi(\varphi-1)(\varphi-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)}{(\omega+\varphi)(\omega+\varphi-1)(\omega+\varphi-2)},$$

$$\delta = \frac{\varphi(\varphi-1)(\varphi-2)(\varphi-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)(n-\omega+3)}{(\omega+\varphi)(\omega+\varphi-1)(\omega+\varphi-2)(\omega+\varphi-3)}$$

etc.

Qui valores ad praecedentium formam propius reducuntur, ut sit

$$\alpha = \frac{\varphi}{\varphi+\omega}\cdot\frac{n-\omega}{1},$$

$$\beta = \frac{\varphi(\varphi-1)}{(\varphi+\omega)(\varphi+\omega-1)}\cdot\frac{(n-\omega)(n-\omega+1)}{1\cdot 2},$$

$$\gamma = \frac{\varphi(\varphi-1)(\varphi-2)}{(\varphi+\omega)(\varphi+\omega-1)(\varphi+\omega-2)}\cdot\frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\delta = \frac{\varphi(\varphi-1)(\varphi-2)(\varphi-3)}{(\varphi+\omega)(\varphi+\omega-1)(\varphi+\omega-2)(\varphi+\omega-3)}\cdot\frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)(n-\omega+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

etc.

Etsi autem ex hac lege etiam denominator in infinitum continuari possit, tamen ex principio, unde eum deduximus, patet eum non ultra terminos evanescentes produci debere, siquidem pro φ sumatur numerus positivus integer.

COROLLARIUM 1

25. Denominator ergo ex numeratore formari potest, si numeri φ et ω inter se permutentur et loco n scribatur $-n$. At posito $-n$ pro $+n$ formula $(1+x)^n$ abit in $(1+x)^{-n}$; unde si fuerit $(1+x)^n = \frac{P}{Q}$, erit $(1+x)^{-n} = \frac{Q}{P}$, ex quo ratio huius conversionis eo clarius perspicitur.

COROLLARIUM 2

26. Cum igitur numerator et denominator inter se permutari possint, etiam numeratorem apud terminos evanescentes abrumpere licet; tum vero denominatorem in infinitum continuari oportet, ut fractio obtineatur potestati $(1+x)^n$ aequalis.

COROLLARIUM 3

27. Si sumatur $\varphi = \omega$, numerator et denominator multo magis inter se assimilantur ac tantum ratione signi exponentis n a se invicem discrepabunt. Erit autem tunc

$$A = \frac{\omega}{2\omega}\cdot\frac{n+\omega}{1},$$

$$B = \frac{\omega(\omega-1)}{2\omega(2\omega-1)}\cdot\frac{(n+\omega)(n+\omega-1)}{1\cdot 2},$$

$$C = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{2\omega(2\omega-1)(2\omega-2)}\cdot\frac{(n+\omega)(n+\omega-1)(n+\omega-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$D = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{2\omega(2\omega-1)(2\omega-2)(2\omega-3)}\cdot\frac{(n+\omega)(n+\omega-1)(n+\omega-2)(n+\omega-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

etc.;

$$\alpha = \frac{\omega}{2\omega}\cdot\frac{n-\omega}{1},$$

$$\beta = \frac{\omega(\omega-1)}{2\omega(2\omega-1)}\cdot\frac{(n-\omega)(n-\omega+1)}{1\cdot 2},$$

$$\gamma = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{2\omega(2\omega-1)(2\omega-2)}\cdot\frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\delta = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{2\omega(2\omega-1)(2\omega-2)(2\omega-3)}\cdot\frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)(n-\omega+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

etc.

COROLLARIUM 4

28. Hinc formulae superiores (§ 23) ad approximandum perquam idoneae derivantur:

$$(1+x)^n = \frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{1}x}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{1}x},$$

$$(1+x)^n = \frac{1+\frac{2}{4}\cdot\frac{n+2}{1}x+\frac{2\cdot 1}{4\cdot 3}\cdot\frac{(n+2)(n+1)}{1\cdot 2}x^2}{1-\frac{2}{4}\cdot\frac{n-2}{1}x+\frac{2\cdot 1}{4\cdot 3}\cdot\frac{(n-2)(n-1)}{1\cdot 2}x^2},$$

$$(1+x)^n = \frac{1+\frac{3}{6}\cdot\frac{n+3}{1}x+\frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}\cdot\frac{(n+3)(n+2)}{1\cdot 2}x^2+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3}{1-\frac{3}{6}\cdot\frac{n-3}{1}x+\frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}\cdot\frac{(n-3)(n-2)}{1\cdot 2}x^2+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}\cdot\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3};$$

quae quomodo ulterius continuari debeant, sponte patet.

SCHOLION 1

29. Hae formulae eo magis sunt notatu dignae, quo minus earum ratio patet; nam etsi tam in numeratore quam denominatore lex progressionis est perspicua, secundum quam uterque in infinitum continuatur, tamen iam animadvertimus alterutrum tantum in infinitum produci oportere altero ex finito terminorum numero constante; ibi scilicet quovis casu terminari debet, ubi termini aliquot evanescere incipiunt, etiamsi deinceps iterum termin finitae magnitudinis occurrant. Haec autem ita sunt interpretanda, si in valoribus litterarum A, B, C etc., α, β, γ etc. factor numeratoris evanescens a factore denominatoris evanescente tolli censeatur, ita ut fractio $\frac{\omega-m}{2\omega-2m}$ casu $\omega=m$ unitati aequalis statuatur. Sin autem, uti calculi ratio exigit, haec fractio tantum semissi unitatis aequalis capiatur, tum continui ratio non amplius infringitur; ac si hac lege retenta tam numerator quam denominator etiam ultra terminos evanescentes in infinitum continuatur, fractio resultans formulae $(1+x)^n$ perfecte erit aequalis. Quod idem in genere est tenendum, dummodo inter numeros φ et ω certa ratio statuatur, ita ut, si $\varphi=\lambda\omega$, fractionis $\frac{\omega-m}{(\lambda+1)\omega-(\lambda+1)m}$ [valor] etiam casu $\omega=m$ sumatur $=\frac{1}{\lambda+1}$, ex quo haec cautio neutiquam principio continuitatis adversari est putanda.

SCHOLION 2

30. Quo haec clarius perspiciantur, consideremus casum $\omega = 0$ et ob $\frac{\omega}{2\omega} = \frac{1}{2}$ erit numerator nostrae fractionis

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{1} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \text{etc.}$$

et denominator

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{1} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \text{etc.};$$

manifestum autem est numeratoris valorem esse $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+x)^n$, denominatoris vero $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+x)^{-n}$ illumque ergo per hunc divisum praebere $(1+x)^n$. Simili modo si ponatur $\omega = 1$, erit

pro numeratore

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{1},$$

$$B = 0,$$

$$C = -\frac{1}{4} \cdot \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$D = -\frac{2}{4} \cdot \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$E = -\frac{3}{4} \cdot \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

etc.

pro denominatore

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{1},$$

$$\beta = 0,$$

$$\gamma = -\frac{1}{4} \cdot \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$\delta = -\frac{2}{4} \cdot \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$\varepsilon = -\frac{3}{4} \cdot \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

etc.

atque hinc colligitur fore

$$\text{numeratorem} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(n+1)x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(n-1)x\right)(1+x)^n,$$

$$\text{denominatorem} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(n-1)x + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(n+1)x\right)(1+x)^{-n};$$

quorum ille per hunc divisus manifesto praebet formulam propositam $(1+x)^n$. Sin autem in denominatore termini litteris γ, δ, ε etc. affecti omitterentur,

tum in numeratore loco fractionis $\frac{\omega-1}{2\omega-2}=\frac{0}{0}$ unitas statui deberet ob legem supra stabilitam, unde valores C, D, E etc. duplo prodirent maiores; foretque numeratoris valor $=\left(1-\frac{1}{2}(n-1)x\right)(1+x)^n$, denominator vero $=1-\frac{1}{2}(n-1)x$, qua fractione iterum veritas obtinetur. Videamus ergo, quomodo per huiusmodi formulas tam quantitates radicales quam exponentiales et logarithmi commode vero proxime exhiberi queant, quando quidem constat tam logarithmos quam exponentiales quantitates ad formam $(1+x)^n$ revocari posse.

PROBLEMA 5

31. *Radicem quadratam ex quovis numero non-quadrato proposito per formulas ante exhibitas proxime assignare.*

SOLUTIO

Sit numerus propositus non-quadratus $=aa+b$ et ponatur $\frac{b}{aa}=x$; erit

$$aa+b=aa(1+x)$$

ideoque

$$\sqrt{(aa+b)}=a(1+x)^{\frac{1}{2}}.$$

Habebimus ergo $n=\frac{1}{2}$ et ex praecedente problemate formulae continuo magis ad $\sqrt{(aa+b)}$ appropinquantes erunt

$$\sqrt{(aa+b)}=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{b}{a^2}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a^2}}a,$$

$$\sqrt{(aa+b)}=\frac{1+\frac{2}{4}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{b}{a^2}+\frac{2\cdot 1}{4\cdot 3}\cdot\frac{5\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{b^2}{a^4}}{1+\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{b}{a^2}+\frac{2\cdot 1}{4\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{b^2}{a^4}}a,$$

$$\sqrt{(aa+b)}=\frac{1+\frac{3}{6}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{b}{a^2}+\frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}\cdot\frac{7\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{b^2}{a^4}+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}\cdot\frac{7\cdot 5\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{b^3}{a^6}}{1+\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{b}{a^2}+\frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}\cdot\frac{5\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{b^2}{a^4}+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{b^3}{a^6}}a$$

etc.

Evolutis autem his factoribus et posito brevitatis ergo $\frac{b}{aa}=x$ consequemur formas sequentes:

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1+\frac{3}{4}x}{1+\frac{1}{4}x}a,$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1+\frac{5}{4}x+\frac{5}{16}xx}{1+\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}xx}a,$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1+\frac{7}{4}x+\frac{7}{8}xx+\frac{7}{64}x^3}{1+\frac{5}{4}x+\frac{3}{8}xx+\frac{1}{64}x^3}a,$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1+\frac{9}{4}x+\frac{27}{16}xx+\frac{15}{32}x^3+\frac{9}{256}x^4}{1+\frac{7}{4}x+\frac{15}{16}xx+\frac{5}{32}x^3+\frac{1}{256}x^4}a,$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1+\frac{11}{4}x+\frac{11}{4}xx+\frac{77}{64}x^3+\frac{55}{256}x^4+\frac{11}{1024}x^5}{1+\frac{9}{4}x+\frac{7}{4}xx+\frac{35}{64}x^3+\frac{15}{256}x^4+\frac{1}{1024}x^5}a$$

etc.

Sin autem ponamus $\frac{x}{4} = y$ seu $y = \frac{b}{4aa}$, erit

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1+3y}{1+y}a,$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1+5y+5yy}{1+3y+yy}a,$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1+7y+14yy+7y^3}{1+5y+6yy+y^3}a,$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1+9y+27yy+30y^3+9y^4}{1+7y+15yy+10y^3+y^4}a,$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1+11y+44yy+77y^3+55y^4+11y^5}{1+9y+28yy+35y^3+15y^4+y^5}a$$

etc.

COROLLARIUM 1

32. Si formularum harum numeratores et denominatores attentius contemplemur, non difficulter observabimus utrosque constituere progressionem recurrentem secundi ordinis et quemlibet terminum ita dependere a binis

praecedentibus, ut, si terni termini ordine sint P, Q, R, semper sit

$$R = (1 + 2y)\,Q - yyP$$

seu scala relationis[1]) habeatur $1 + 2y$, $-yy$.

COROLLARIUM 2

33. Si pro y statuamus valorem $\frac{b}{4aa}$ et numeratorem denominatoremque a fractionibus liberemus, habebimus sequentes formulas

$$\sqrt{(aa + b)} = \frac{4a^2 + 3b}{4a^2 + b}\,a,$$

$$\sqrt{(aa + b)} = \frac{16a^4 + 20a^2b + 5bb}{16a^4 + 12a^2b + bb}\,a,$$

$$\sqrt{(aa + b)} = \frac{64a^6 + 112a^4b + 56a^2b^2 + 7b^3}{64a^6 + 80a^4b + 24a^2b^2 + b^3}\,a,$$

$$\sqrt{(aa + b)} = \frac{256a^8 + 576a^6b + 432a^4b^2 + 120a^2b^3 + 9b^4}{256a^8 + 448a^6b + 240a^4b^2 + 40a^2b^3 + b^4}\,a$$

etc.

COROLLARIUM 3

34. In his formulis iterum tam numeratores quam denominatores seriem constituunt recurrentem, cuius scala relationis est $2(2aa + b)$, $-bb$, ita ut, si P, Q, R denotent tres terminos se invicem excipientes, futurum sit

$$R = 2(2aa + b)\,Q - bbP.$$

At seriei numeratorum duo termini initiales sunt 1 et $4aa + 3b$, denominatorum vero 1 et $4aa + b$, unde reliqui facile reperiuntur.

---

1) De seriebus recurrentibus atque indicibus seu scalis relationum vide A. DE MOIVRE (1667—1754), *De fractionibus algebraicis radicalitate immunibus ad fractiones simpliciores reducendis, deque summandis terminis quarumdam serierum aequali intervallo a se distantibus*, Philosophical transactions (London) **32** (1722/3), 1724, numb. 373, p. 162, imprimis p. 176. Vide etiam eiusdem auctoris *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, Londini 1730, p. 27, nec non L. EULERI *Introductionem in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, t. I cap. IV, XIII, XVII; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 8. P. St.

COROLLARIUM 4

35. Si fractio $\frac{b}{4aa}$ ad minores terminos reduci potest, his potius loco ipsorum b et $4aa$ uti conveniet. Ponatur ergo in minimis terminis

$$\frac{b}{4aa} = \frac{y}{z}$$

atque habebimus

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z+3y}{z+y}a,$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{zz+5yz+5yy}{zz+3yz+yy}a,$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z^3+7yz^2+14y^2z+7y^3}{z^3+5yz^2+6y^2z+y^3}a$$

hincque erit

$$R = (z+2y)Q - yyP.$$

COROLLARIUM 5

36. Hae fractiones adhuc commodius exprimi possunt hoc modo

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z+2y+y\cdot 1}{z+2y-y\cdot 1}a,$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z^2+4yz+3yy+y(z+2y)}{z^2+4yz+3yy-y(z+2y)}a,$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z^3+6yz^2+10y^2z+4y^3+y(z^2+4yz+3y^2)}{z^3+6yz^2+10y^2z+4y^3-y(z^2+4yz+3y^2)}a,$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z^4+8yz^3+21y^2z^2+20y^3z+5y^4+y(z^3+6yz^2+10y^2z+4y^3)}{z^4+8yz^3+21y^2z^2+20y^3z+5y^4-y(z^3+6yz^2+10y^2z+4y^3)}a$$

etc.

COROLLARIUM 6

37. Pro his fractionibus formandis sufficit unicam hanc seriem constituisse

$$1,\quad z+2y,\quad z^2+4yz+3y^2,\quad z^3+6yz^2+10y^2z+4y^3,\ \ldots P,\ Q,\ R,\ \ldots$$

quae pariter est recurrens ad legem

$$R = (z+2y)Q - yyP.$$

Formata autem hac serie erit proxime

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{Q+yP}{Q-yP}a,$$

quae scilicet fractio ex binis terminis se immediate sequentibus illius seriei facillime formatur.

EXEMPLUM 1

38. *Radicem quadratam ex 2 proxime exhibere.*

Cum sit $aa+b=2$, erit $a=1$ et $b=1$, unde $\frac{b}{4aa}=\frac{1}{4}=\frac{y}{z}$; ergo $y=1$ et $z=4$ atque $z+2y=6$. Quare ex scala relationis

$$R = 6Q - P$$

formetur haec series recurrens

$$1,\ 6,\ 35,\ 204,\ 1189,\ 6930,\ 40391,\ \ldots P,\ Q,\ R,\ \ldots$$

et fractiones $\frac{Q+P}{Q-P}$ ad $\sqrt{2}$ continuo magis appropinquantes sunt

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5},\ \frac{41}{29},\ \frac{239}{169},\ \frac{1393}{985},\ \frac{8119}{5741},\ \frac{47321}{33461}\ \text{etc.}$$

EXEMPLUM 2

39. *Radicem quadratam ex 3 proxime exhibere.*

Cum sit $aa+b=3$, statuatur $a=1$; erit $b=2$ et $\frac{b}{4aa}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, unde fit $y=1$ et $z=2$, ergo $z+2y=4$. Quare ex scala relationis

$$R = 4Q - P$$

formetur haec series recurrens

$$1,\ 4,\ 15,\ 56,\ 209,\ 780,\ 2911,\ 10864,\ \ldots P,\ Q,\ R,\ \ldots$$

eritque proxime $\sqrt{3}=\frac{Q+P}{Q-P}$ sive

$$\sqrt{3} = \frac{5}{3},\ \frac{19}{11},\ \frac{71}{41},\ \frac{265}{153},\ \frac{989}{571},\ \frac{3691}{2131},\ \frac{13775}{7953}\ \text{etc.}$$

Aliter. Vel statuamus $a=2$, ut sit $b=-1$; erit $\frac{b}{4aa}=-\frac{1}{16}=\frac{y}{z}$, unde $y=-1$, $z=16$ et $z+2y=14$. Quare ex scala relationis

$$R = 14Q - P$$

formetur series recurrens

$$1,\ 14,\ 195,\ 2716,\ 37829,\ 526890, \ldots P,\ Q,\ R, \ldots$$

eritque proxime $\sqrt{3} = \frac{Q-P}{Q+P}\cdot 2$ sive

$$\sqrt{3} = \frac{13}{15}\cdot 2,\ \frac{181}{209}\cdot 2,\ \frac{2521}{2911}\cdot 2,\ \frac{35113}{40545}\cdot 2 \text{ etc.}$$

vel

$$\sqrt{3} = \frac{26}{15},\ \frac{362}{209},\ \frac{5042}{2911},\ \frac{70226}{40545} \text{ etc.}$$

PROBLEMA 6

40. *Radicem cubicam ex quovis numero non-cubo proposito per formulas ante exhibitas proxime assignare.*

SOLUTIO

Sit numerus propositus non-cubus $= a^3 + b$ et ponatur $\frac{b}{a^3} = x$; erit

$$a^3 + b = a^3(1+x)$$

ideoque

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a(1+x)^{\frac{1}{3}}.$$

Habemus ergo $n = \frac{1}{3}$, unde ex § 28 nanciscemur has approximationes

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a\cdot\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}x}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x},$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a\cdot\frac{1+\frac{2}{4}\cdot\frac{7}{3}x+\frac{2\cdot 1}{4\cdot 3}\cdot\frac{7\cdot 4}{3\cdot 6}x^2}{1+\frac{2}{4}\cdot\frac{5}{3}x+\frac{2\cdot 1}{4\cdot 3}\cdot\frac{5\cdot 2}{3\cdot 6}x^2},$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a\cdot\frac{1+\frac{3}{6}\cdot\frac{10}{3}x+\frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}\cdot\frac{10\cdot 7}{3\cdot 6}xx+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}\cdot\frac{10\cdot 7\cdot 4}{3\cdot 6\cdot 9}x^3}{1+\frac{3}{6}\cdot\frac{8}{3}x+\frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}\cdot\frac{8\cdot 5}{3\cdot 6}xx+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}\cdot\frac{8\cdot 5\cdot 2}{3\cdot 6\cdot 9}x^3}$$

etc.

Evolutis autem his coefficientibus habebimus

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a\cdot\frac{1+\frac{2}{3}x}{1+\frac{1}{3}x},$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a\cdot\frac{1+\frac{7}{6}x+\frac{7}{27}x^2}{1+\frac{5}{6}x+\frac{5}{54}x^2},$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a\cdot\frac{1+\frac{5}{3}x+\frac{7}{9}xx+\frac{7}{81}x^3}{1+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}xx+\frac{2}{81}x^3}$$

etc.

COROLLARIUM 1

41. Si loco x valorem $\frac{b}{a^3}$ substituamus et fractiones implicatas tollamus, obtinebimus formulas sequentes

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = \frac{3a^3+2b}{3a^3+b}a,$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = \frac{54a^6+63a^3b+14bb}{54a^6+45a^3b+\ \ 5bb}a,$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = \frac{81a^9+135a^6b+63a^3b^2+7b^3}{81a^9+108a^6b+36a^3b^2+2b^3}a$$

etc.

Ubi autem commodam progressionis legem definire non licet.

COROLLARIUM 2

42. Sufficit autem forma uti priori; inde enim cubus ad numerum propositum propius accedens colligitur, cuius radix pro a posita novum dabit valorem pro b et x. Sic si radix cubica ex 2 quaeratur, erit statim $a=1$ et proxime $\sqrt[3]{2}=\frac{5}{4}$. Sit iam $a=\frac{5}{4}$ et fit $b=2-a^3=\frac{3}{64}$ et $x=\frac{3}{125}$, unde erit denuo per formam priorem

$$\sqrt[3]{2} = \frac{125+2}{125+1}\cdot\frac{5}{4} = \frac{127}{126}\cdot\frac{5}{4} = \frac{635}{504};$$

cuius fractionis cubus est [proxime] $2-\frac{1}{2\cdot 63^3}$, qui ergo a veritate tantum parte $\frac{1}{500094}$ deficit.

COROLLARIUM 3

43. Simili modo formulae pro extractione radicum altiorum potestatum formari possunt. Ita si quaeratur $\sqrt[m]{(a^m + b)}$, ponatur $x = \frac{b}{a^m}$ et $n = \frac{1}{m}$ hincque habebitur

$$\sqrt[m]{(a^m + b)} = \frac{2ma^m + (m+1)b}{2ma^m + (m-1)b}\,a,$$

quae etiam sufficere potest ad radices quantumvis exacte definiendas.

PROBLEMA 7

44. *Per formulas supra inventas proxime exprimere logarithmum cuiusque numeri propositi.*

SOLUTIO

Sit $1 + x$ numerus propositus et constat eius logarithmum hyperbolicum esse

$$l(1+x) = \frac{(1+x)^n - 1}{n}$$

existente $n = 0$. Quodsi iam in formulis supra inventis n spectemus ut numerum infinite parvum, habebimus

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{1}{2}(1+n)x}{1 + \frac{1}{2}(1-n)x},$$

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{2}{4}(2+n)x + \frac{2\cdot 1}{4\cdot 3}\left(1 + \frac{3}{2}n\right)x^2}{1 + \frac{2}{4}(2-n)x + \frac{2\cdot 1}{4\cdot 3}\left(1 - \frac{3}{2}n\right)x^2},$$

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{3}{6}(3+n)x + \frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}\left(3 + \frac{5}{2}n\right)x^2 + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}\left(1 + \frac{11}{6}n\right)x^3}{1 + \frac{3}{6}(3-n)x + \frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}\left(3 - \frac{5}{2}n\right)x^2 + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}\left(1 - \frac{11}{6}n\right)x^3},$$

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{4}{8}(4+n)x + \frac{4\cdot 3}{8\cdot 7}\left(6 + \frac{7}{2}n\right)x^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{8\cdot 7\cdot 6}\left(4 + \frac{13}{3}n\right)x^3 + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}\left(1 + \frac{25}{12}n\right)x^4}{1 + \frac{4}{8}(4-n)x + \frac{4\cdot 3}{8\cdot 7}\left(6 - \frac{7}{2}n\right)x^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{8\cdot 7\cdot 6}\left(4 - \frac{13}{3}n\right)x^3 + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}\left(1 - \frac{25}{12}n\right)x^4}$$

etc.

Quodsi iam hic ponatur $n = 0$, habebimus pro $l(1+x)$ sequentes approximationes

$$l(1+x) = \frac{x}{1+\frac{1}{2}x},$$

$$l(1+x) = \frac{x+\frac{1}{2}x^2}{1+x+\frac{1}{6}x^2},$$

$$l(1+x) = \frac{x+x^2+\frac{11}{60}x^3}{1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{20}x^3},$$

$$l(1+x) = \frac{x+\frac{3}{2}x^2+\frac{13}{21}x^3+\frac{5}{84}x^4}{1+2x+\frac{9}{7}x^2+\frac{2}{7}x^3+\frac{1}{70}x^4}$$

etc.

Vel si ponatur $x = \frac{m}{n}$, quoniam fractionum logarithmos potissimum indagare convenit, et fractiones partiales tollantur, fiet

$$l\left(1+\frac{m}{n}\right) = \frac{2m}{2n+m},$$

$$l\left(1+\frac{m}{n}\right) = \frac{6mn+3mm}{6nn+6mn+mm},$$

$$l\left(1+\frac{m}{n}\right) = \frac{60mn^2+60m^2n+11m^3}{60n^3+90mn^2+36m^2n+3m^3},$$

$$l\left(1+\frac{m}{n}\right) = \frac{420mn^3+630m^2n^2+260m^3n+25m^4}{420n^4+840mn^3+540m^2n^2+120m^3n+6m^4}$$

etc.

haeque fractiones tam prope accedunt ad verum valorem $l\left(1+\frac{m}{n}\right)$, ut seriei vulgaris

$$l\left(1+\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} - \frac{m^2}{2n^2} + \frac{m^3}{3n^3} - \frac{m^4}{4n^4} + \text{etc.}$$

ingens terminorum numerus capi deberet ad parem approximationem obtinendam.

COROLLARIUM 1

45. Ita si logarithmum hyperbolicum binarii desideremus, ob $m = 1$ et $n = 1$ sequentes prodibunt approximationes

$$l2 = \frac{2}{3},\ \frac{9}{13},\ \frac{131}{189},\ \frac{1335}{1926} = \frac{445}{642};$$

quibus fractionibus in decimales conversis, cum sit

$$l\,2 = 0{,}693\,147\,180\,559\,945\,3,$$

erit proxime

$$l\,2 = 0{,}666\,666,$$
$$l\,2 = 0{,}692\,308,$$
$$l\,2 = 0{,}693\,122,$$
$$l\,2 = 0{,}693\,146\,42,$$ [1]

vere

$$l\,2 = 0{,}693\,147\,18;$$

sicque quarta fractio a veritate tantum parte $\frac{76}{100\,000\,000}$ [2] deficit.

COROLLARIUM 2

46. Numerorum autem binario minorum logarithmi multo adhuc exactius reperiuntur. Ita cum sit $l\frac{3}{2} = 0{,}405\,465\,108\,108\,164$, ponamus $m = 1$ et $n = 2$ nostraeque formulae dabunt proxime

$$l\frac{3}{2} = \frac{2}{5} = 0{,}400\,000\,00,$$
$$l\frac{3}{2} = \frac{15}{37} = 0{,}405\,405\,405,$$
$$l\frac{3}{2} = \frac{371}{915} = 0{,}405\,464\,481,$$
$$l\frac{3}{2} = \frac{6425}{15846} = 0{,}405\,465\,101\,6;$$

error scilicet huius ultimae fractionis est $\frac{65}{10\,000\,000\,000}$ ideoque plus quam centies minor quam casu praecedente.

COROLLARIUM 3

47. Quando ergo fractio $\frac{m}{n}$ adeo semisse est minor, tum erit tam exacte

$$l\left(1 + \frac{m}{n}\right) = \frac{420mn^3 + 630m^2n^2 + 260m^3n + 25m^4}{420n^4 + 840mn^3 + 540m^2n^2 + 120m^3n + 6m^4},$$

ut error in fractione decimali post decimam demum notam percipiatur. Aliis autem methodis vix tam facile ad veritatem appropinquare licet.

1) Editio princeps: 0,693 146 35. Correxit P. St.

2) Editio princeps: $\frac{83}{100\,000\,000}$ (vide notam praecedentem). P. St.

COROLLARIUM 4

48. Si fractio $\frac{m}{n}$ fuerit valde parva, tum sufficiet uti prima vel secunda formula; ita si $\frac{m}{n} = \frac{1}{8}$, prima formula dat

$$l\frac{9}{8} = \frac{2}{17} = 0{,}11765$$

et secunda

$$l\frac{9}{8} = \frac{51}{433} = 0{,}117\,782\,91;$$

at revera est

$$l\frac{9}{8} = 0{,}117\,783\,03,$$

unde secunda formula circiter $\frac{1}{10\,000\,000}$ a veritate deficit.

PROBLEMA 8

49. *Quantitatem exponentialem e^x per formulas inventas proxime exprimere existente e numero, cuius logarithmus hyperbolicus aequatur unitati.*

SOLUTIO

Notum est esse

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

si pro n sumatur numerus infinitus. Scribamus ergo in formulis § 28 $\frac{x}{n}$ loco x et simul ponamus $n = \infty$, atque obtinebimus sequentes approximationes

$$e^x = \frac{1 + \frac{1}{2}x}{1 - \frac{1}{2}x},$$

$$e^x = \frac{1 + \frac{2}{4}x + \frac{1}{4\cdot 3}x^2}{1 - \frac{2}{4}x + \frac{1}{4\cdot 3}x^2},$$

$$e^x = \frac{1 + \frac{3}{6}x + \frac{3}{6\cdot 5}x^2 + \frac{1}{6\cdot 5\cdot 4}x^3}{1 - \frac{3}{6}x + \frac{3}{6\cdot 5}x^2 - \frac{1}{6\cdot 5\cdot 4}x^3},$$

$$e^x = \frac{1 + \frac{4}{8}x + \frac{6}{8\cdot 7}x^2 + \frac{4}{8\cdot 7\cdot 6}x^3 + \frac{1}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}x^4}{1 - \frac{4}{8}x + \frac{6}{8\cdot 7}x^2 - \frac{4}{8\cdot 7\cdot 6}x^3 + \frac{1}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}x^4}$$

etc.

Unde lex, qua sequentes huiusmodi formulae confici debent, est manifesta. Si fractiones partiales tollere velimus, habebimus

$$e^x = \frac{2+x}{2-x},$$

$$e^x = \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2},$$

$$e^x = \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3},$$

$$e^x = \frac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4}$$

etc.

COROLLARIUM 1

50. Hinc ergo erit ipse numerus e in fractionibus proximis

$$e = \frac{3}{1}, \frac{19}{7}, \frac{193}{71}, \frac{2721}{1001} \text{ etc.},$$

quarum fractionum hanc legem observari convenit, ut, si ponatur

$$e = \frac{A}{\mathfrak{A}}, \frac{B}{\mathfrak{B}}, \frac{C}{\mathfrak{C}}, \frac{D}{\mathfrak{D}}, \frac{E}{\mathfrak{E}} \text{ etc.},$$

sit

$$A = 3,\ B = 6A+1,\ C = 10B+A,\ D = 14C+B,\ E = 18D+C \text{ etc.},$$

$$\mathfrak{A} = 1,\ \mathfrak{B} = 6\mathfrak{A}+1,\ \mathfrak{C} = 10\mathfrak{B}+\mathfrak{A},\ \mathfrak{D} = 14\mathfrak{C}+\mathfrak{B},\ \mathfrak{E} = 18\mathfrak{D}+\mathfrak{C} \text{ etc.},$$

ubi multiplicatores 6, 10, 14, 18 etc. sunt numeri impariter pares.

COROLLARIUM 2

51. Cum igitur sit

$$e = 2{,}71828182845904523536,$$

videamus, quam prope fractiones inventae accedant ad veritatem

$$e = \frac{3}{1} = 3{,}0000,$$

$$e = \frac{19}{7} = 2{,}714285714,$$

$$e = \frac{193}{71} = 2{,}718309859,$$

$$e = \frac{2721}{1001} = 2{,}718281718$$

etc.,

ubi prima in partibus decimis, secunda in millesimis, tertia in centies millesimis et quarta in centies centenis millesimis aberrat.

COROLLARIUM 3

52. Talis lex progressionis etiam in formulis generalibus pro e^x deprehenditur. Si enim nostras fractiones ponamus

$$e^x = \frac{A}{\mathfrak{A}},\ \frac{B}{\mathfrak{B}},\ \frac{C}{\mathfrak{C}},\ \frac{D}{\mathfrak{D}},\ \frac{E}{\mathfrak{E}}\ \text{etc.},$$

sumtis $A = 1$ et $\mathfrak{A} = 1$ erit

$$B = 2 + x,\quad C = 6B + Axx,\quad D = 10C + Bxx,\quad E = 14D + Cxx\ \text{etc.},$$

$$\mathfrak{B} = 2 - x,\quad \mathfrak{C} = 6\mathfrak{B} + \mathfrak{A}xx,\quad \mathfrak{D} = 10\mathfrak{C} + \mathfrak{B}xx,\quad \mathfrak{E} = 14\mathfrak{D} + \mathfrak{C}xx\ \text{etc.}$$

Unde series tam numeratorum quam denominatorum facile continuatur.

DE SERIE LAMBERTINA PLURIMISQUE EIUS INSIGNIBUS PROPRIETATIBUS[1]

Commentatio 532 indicis ENESTROEMIANI
Acta academiae scientiarum Petropolitanae 1779: II, 1783, p. 29—51

1. Hoc cognomine appellare liceat illam maxime memorabilem seriem, qua vir acutissimi ingenii LAMBERTUS radices aequationum trinomialium primus exprimere docuit in Actorum Helveticorum Volumine III.[2] Haec autem series, si eius elementa parumper immutentur, sequenti forma repraesentari potest

$$\begin{aligned} S = 1 &+ nv + \tfrac{1}{2} n(n+\alpha+\beta)v^2 \\ &+ \tfrac{1}{6} n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^3 \\ &+ \tfrac{1}{24} n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^4 \\ &+ \text{etc.}, \end{aligned}$$

cuius seriei summa S ita pendet a resolutione huius aequationis trinomialis

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta) v x^{\alpha+\beta},$$

ut sit

$$S = x^n;$$

ubi, cum illa aequatio plures habere possit radices, pro x earum maximam vel minimam accipi oportet, prouti circumstantiae postulaverint. Praesenti

1) Confer hac cum dissertatione Commentationem 406 huius voluminis atque alias illas commentationes p. 263 laudatas. P. St.

2) Vide notam p. 274. P. St.

autem forma hanc seriem exhibere est visum, ut litterae α et β inter se permutabiles evaderent, ita ut, quicquid de altera fuerit observatum, etiam de altera valeat.

2. Praecipua igitur huius seriei proprietas in hoc consistit, ut eius summa semper aequalis sit potestati exponentis n, ad quem certa quaepiam quantitas elevetur. Unde si pro valore ipsius n quocumque $n = p$ summa seriei ponatur $= P$, pro alio autem valore quocumque $n = q$ summa ponatur $= Q$, tum, quia habebitur $P = x^p$ et $Q = x^q$, manifestum est fore $P^q = Q^p$ sive

$$lP : lQ = p : q;$$

sicque, dummodo summa huius seriei pro unico casu exponentis n innotuerit, inde summae pro aliis quibuscumque valoribus semper assignari poterunt, siquidem reliquae quantitates α, β et v eosdem valores retineant. Plurimum igitur optandum foret, ut ista insignis proprietas ex ipsa seriei indole demonstrari posset.

3. Hic igitur ante omnia casus notatu dignus occurrit, quo $n = 0$ et summa $S = 1$. Cum igitur sit $S = x^n$, notum est casu $n = 0$ formulam $\frac{x^n - 1}{n}$ abire in logarithmum hyperbolicum ipsius x, quamobrem hic casus nobis istam summationem imprimis memoratu dignam suppeditat

$$\begin{aligned} lx = v &+ \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)v^2 \\ &+ \tfrac{1}{6}(\alpha + 2\beta)(2\alpha + \beta)v^3 \\ &+ \tfrac{1}{24}(\alpha + 3\beta)(2\alpha + 2\beta)(3\alpha + \beta)v^4 \\ &+ \tfrac{1}{120}(\alpha + 4\beta)(2\alpha + 3\beta)(3\alpha + 2\beta)(4\alpha + \beta)v^5 \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Quodsi ergo summa huius seriei iam fuerit explorata voceturque $= \varDelta$, ob $lx = \varDelta$ erit $x = e^{\varDelta}$ denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$. Unde cognito hoc valore $\varDelta$ pro quocumque numero n summa seriei propositae erit $= e^{n\varDelta}$; ex quo igitur aliam seriem infinitam exhibere licet propositae aequalem, scilicet

$$S = 1 + n\varDelta + \tfrac{1}{2}n^2\varDelta^2 + \tfrac{1}{6}n^3\varDelta^3 + \tfrac{1}{24}n^4\varDelta^4 + \text{etc.};$$

tum vero, quia $\varDelta = lx$, simul habebitur ista aequatio

$$e^{\alpha\varDelta} - e^{\beta\varDelta} = (\alpha - \beta) v e^{(\alpha+\beta)\varDelta}$$

sive

$$e^{-\beta\varDelta} - e^{-\alpha\varDelta} = (\alpha - \beta) v,$$

ex qua aequatione etiam valorem ipsius $\varDelta$ investigare licebit.

4. Praeterea vero etiam summationem seriei propositae generalis ita describere licet, ut, si fuerit

$$v = \frac{x^{-\beta} - x^{-\alpha}}{\alpha - \beta},$$

seriei summa futura sit

$$S = x^n,$$

atque adeo quicumque valores litteris α et β tribuantur, si modo notetur, uti iam observavimus, quando ex pluribus valoribus pro x assumtis idem valor pro v resultare potest, tum pro summa $S = x^n$ eum accipi oportere, qui fuerit vel maximus vel minimus. His in genere praenotatis percurramus aliquos casus praecipuos ratione litterarum α et β, quibus cognitio nostrae seriei non mediocriter illustrabitur.

CASUS 1

QUO $\beta = 0$

5. Quoniam litterae α et β sunt permutabiles, perinde est, sive α sive β evanescat. Sit igitur $\beta = 0$ et nostra series sequentem induet formam

$$\begin{aligned} S = 1 + nv + \tfrac{1}{2}\, & n(n+\alpha)v^2 \\ & + \tfrac{1}{6}\, n(n+\alpha)(n+2\alpha)v^3 \\ & + \tfrac{1}{24}\, n(n+\alpha)(n+2\alpha)(n+3\alpha)v^4 \\ & + \tfrac{1}{120}\, n(n+\alpha)(n+2\alpha)(n+3\alpha)(n+4\alpha)v^5 \\ & + \text{etc.}, \end{aligned}$$

cuius ergo summa erit $S = x^n$, si modo x capiatur ex hac aequatione $x^\alpha - 1 = \alpha v x^\alpha$, ex qua prodit $x^\alpha = \frac{1}{1 - \alpha v}$ ideoque

$$x = (1 - \alpha v)^{-\frac{1}{\alpha}};$$

quamobrem summa istius seriei erit

$$S = (1 - \alpha v)^{-\frac{n}{\alpha}},$$

quae more solito evoluta eandem prorsus seriem gignit. Quo ergo casu ipsa series LAMBERTINA iam insigne firmamentum accipit.

6. Quodsi hic exponentem n evanescere faciamus, series hoc modo ad logarithmum revocabitur, ut sit

$$lx = v + \frac{1}{2}\alpha v^2 + \frac{1}{3}\alpha\alpha v^3 + \frac{1}{4}\alpha^3 v^4 + \frac{1}{5}\alpha^4 v^5 + \text{etc.}$$

Cum igitur sit $x = (1 - \alpha v)^{-\frac{1}{\alpha}}$, erit

$$lx = -\frac{1}{\alpha} l(1 - \alpha v).$$

Notum autem est esse

$$l(1 - \alpha v) = -\alpha v - \frac{1}{2}\alpha^2 v^2 - \frac{1}{3}\alpha^3 v^3 - \frac{1}{4}\alpha^4 v^4 - \text{etc.},$$

quae series ducta in $-\frac{1}{\alpha}$ ipsam seriem modo inventam reddit.

CASUS II

QUO $\beta = \alpha$

7. Hic casus maxime est memoratu dignus, propterea quod aequatio, unde valorem x derivari oportet, sit incongrua, scilicet $x^\alpha - x^\alpha = 0 v x^{2\alpha}$ sive $0 = 0$; ad quod incommodum evitandum ponamus $\alpha = \beta + \omega$ existente ω infinite parvo et nostra aequatio erit

$$x^{\beta+\omega} - x^\beta = \omega v x^{2\beta+\omega}$$

sive

$$\frac{x^\omega - 1}{\omega} = v x^{\beta+\omega}.$$

Constat autem evanescente ω esse

$$\frac{x^\omega - 1}{\omega} = lx,$$

ita ut hoc casu fiat

$$lx = v x^{\beta+\omega} = v x^\alpha,$$

quae ergo est aequatio, ex qua valorem ipsius x elici oportet.

8. Posito autem $\beta=\alpha$ ad sequentem seriem perveniemus

$$\begin{aligned} S=1+nv&+\tfrac{1}{2}n(n+2\alpha)v^2 \\ &+\tfrac{1}{6}n(n+3\alpha)^2v^3 \\ &+\tfrac{1}{24}n(n+4\alpha)^3v^4 \\ &+\tfrac{1}{120}n(n+5\alpha)^4v^5 \\ &+\tfrac{1}{720}n(n+6\alpha)^5v^6+\text{etc.}, \end{aligned}$$

quae series ideo maxime est notatu digna, quod non solum exponentes continuo crescant, sed etiam ipsae quantitates elevatae in progressione arithmetica procedant, cuiusmodi series vix adhuc a Geometris sunt consideratae. Interim tamen hic novimus summam huius seriei esse $S=x^n$, si modo valor ipsius x huic aequationi conveniat, nempe $lx=vx^\alpha$; quem autem valorem aliter nisi appropinquando cognoscere non datur.

9. Quodsi ulterius statuamus $n=0$, ex supra allatis sequens series colligitur

$$lx=v+\alpha v^2+\frac{3^2}{6}\alpha^2v^3+\frac{4^3}{24}\alpha^3v^4+\frac{5^4}{120}\alpha^4v^5+\frac{6^5}{720}\alpha^5v^6+\text{etc.}$$

Cum igitur sit $lx=vx^\alpha$, erit

$$x^\alpha=1+\frac{2^1}{1\cdot 2}\alpha v+\frac{3^2}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^2v^2+\frac{4^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\alpha^3v^3+\frac{5^4}{1\cdot 2\cdots 5}\alpha^4v^4$$
$$+\frac{6^5}{1\cdot 2\cdots 6}\alpha^5v^5+\text{etc.}$$

Ponamus hic $\alpha v=u$, ita ut $\alpha lx=ux^\alpha$. Sit iam porro $x^\alpha=y$ ideoque $\alpha lx=ly$; consequenter aequatio nostra fiet $ly=uy$, quocirca nanciscimur hanc summationem

$$y=1+\frac{2^1}{1\cdot 2}u+\frac{3^2}{1\cdot 2\cdot 3}uu+\frac{4^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}u^3+\frac{5^4}{1\cdot 2\cdots 5}u^4+\frac{6^5}{1\cdot 2\cdots 6}u^5+\text{etc.},$$

si modo fuerit $u=\frac{ly}{y}$.

10. Quoniam in hac serie exponentes numeratorum ab ipsis numeratoribus unitate deficiunt, eos sequenti modo ad paritatem reducamus. Multiplicemus utrimque per u ac differentiemus fietque

$$\frac{d.\,ly}{du} = \frac{dy}{ydu} = 1 + \frac{2^2}{1\cdot 2}u + \frac{3^3}{1\cdot 2\cdot 3}uu + \frac{4^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}u^3 + \frac{5^5}{1\cdot 2\cdots 5}u^4$$

$$+ \frac{6^6}{1\cdot 2\cdots 6}u^5 + \text{etc.}$$

Cum autem sit $ly = uy$, erit $\frac{dy}{y} = udy + ydu$, unde fit $\frac{dy}{du} = \frac{yy}{1-uy}$; sicque summa illa erit

$$= \frac{y}{1-uy}.$$

Multiplicemus porro utrimque per u et ob $uy = ly$ adipiscemur hanc summationem maxime notabilem

$$\frac{ly}{1-ly} = u + \frac{2^2}{1\cdot 2}u^2 + \frac{3^3}{1\cdot 2\cdot 3}u^3 + \frac{4^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}u^4 + \frac{5^5}{1\cdot 2\cdots 5}u^5 + \text{etc.},$$

si modo fuerit $u = \frac{ly}{y}$.

11. Haec postrema series ob concinnitatem utique meretur, ut in eius indolem accuratius inquiramus. Ac primo quidem patet, si sumeremus $u = 1$ vel $u > 1$, seriem prodituram esse divergentem, cum in forma generali $\frac{n^n}{1\cdot 2\cdots n}$ numerator continuo magis denominatorem superet ideoque omnes termini adeo in infinitum excrescant, quod signum est summae imaginariae; id quod per formulam $u = \frac{ly}{y}$ manifesto declaratur, siquidem nullius numeri logarithmus ipso maior evadere potest. Quando autem u unitate minus accipitur, summa istius seriei utique finita prodire potest, quoties scilicet formula $\frac{ly}{y}$ finitum accipit valorem, id quod evenit, quando $ly < 1$ sive $y < e$. Sumto autem $y = e$, unde fit $u = \frac{1}{e}$, series nostra etiamnunc summam infinitam habebit, etiamsi eius termini continuo decrescant atque adeo tandem evanescant.

12. In hac autem serie imprimis memorabile occurrit, quod, si u tantillo superet $\frac{1}{e}$, termini tandem in infinitum excrescant, id quod egregie convenit

cum iis, quae olim circa valorem producti $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ observavi in *Calculo differentiali* p. 466.[1]) Quodsi enim ponatur

$$T = \frac{n^n}{1 \cdot 2 \cdots n},$$

ut sit

$$lT = nln - l1 - l2 - l3 \cdots - ln,$$

loco citato demonstravi esse

$$l1 + l2 + l3 + l4 + \cdots + ln$$
$$= \frac{1}{2} l2\pi + \left(n + \frac{1}{2}\right) ln - n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \text{etc.},$$

unde sequitur ipsum productum

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \frac{\sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \text{etc.}}}{e^n},$$

sicque habebimus

$$T = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \cdot e^{n - \frac{1}{12n} + \frac{1}{360n^3} - \text{etc.}}$$

Quando ergo n est numerus praemagnus, totus seriei nostrae terminus erit $Tu^n = \frac{e^n u^n}{\sqrt{2n\pi}}$, ex qua forma manifestum est, simulac fuerit $eu > 1$ sive $u > \frac{1}{e}$, tum hunc terminum evadere infinitum; sin autem fuerit eu vel $= 1$ vel adeo < 1 sive $u < \frac{1}{e}$, tum istum terminum in nihilum esse abiturum.

13. Illustremus hanc summationem unico exemplo ponentes $ly = \frac{1}{2}$, ut summa seriei evadat $= 1$; tum autem erit $u = \frac{1}{2\sqrt{e}}$, quo ergo casu certi sumus fore

$$1 = u + \frac{2^2}{1 \cdot 2} u^2 + \frac{3^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^3 + \frac{4^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} u^4 + \text{etc.}$$

Cum autem sit $e = 2{,}71828$, valores priorum huius seriei terminorum in fractionibus decimalibus ita reperientur expressi[2])

1) *Institutiones calculi differentialis* (1755), partis posterioris cap. VI; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 10, p. 357. P. St.

2) In editione principe sequentes falsi valores pro u, $2u^2$ etc. reperiuntur: 0,303 269; 0,183 944; 0,125 515; 0,090 228; 0,066 805; 0,050 413. EULERUS tractasse mihi videtur numerum $\log e = 0{,}434284$ loco veri valoris $\log e = 0{,}434294$. A. K.

$$u = 0{,}303265,$$

$$2u^2 = 0{,}183940,$$

$$\frac{9}{2}u^3 = 0{,}125511,$$

$$\frac{32}{3}u^4 = 0{,}090223,$$

$$\frac{5^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}u^5 = 0{,}066801,$$

$$\frac{3^2\cdot 6^2}{5}u^6 = 0{,}050409.$$

Haec ergo series perquam lente convergit, ita tamen, ut tota summa non ultra unitatem ascendere sit censenda.

DE RESOLUTIONE AEQUATIONIS $lx = vx^\alpha$

14. Quoniam pro casu secundo, ubi $\beta = \alpha$, summatio nostrae seriei pendet ab aequatione $lx = vx^\alpha$, ex qua pro quovis valore v quantitatem x erui oportet, ante omnia observari convenit cuilibet valori v geminos valores ipsius x respondere posse. Ad hoc ostendendum faciamus $x^\alpha = y$ et $\alpha v = u$, ut habeatur ista aequatio $ly = uy$ sive $u = \frac{ly}{y}$; unde patet numerum u positivum esse non posse, nisi sit $y > 1$. Tum autem semper erit $u < \frac{1}{e}$, propterea quod maximus valor formulae $\frac{ly}{y}$ oritur sumto $y = e$, ita ut, sive y maius capiatur quam e sive minus, semper prodeat $u < \frac{1}{e}$. Hinc igitur patet seriem pro casu secundo inventam finitam summam habere non posse, quamdiu fuerit $u > \frac{1}{e}$ sive $v > \frac{1}{\alpha e}$, siquidem v fuerit quantitas positiva; quando enim foret negativa, ob signa alternantia summa semper futura esset finita.

15. Hinc sequitur porro, quoties fuerit $u < \frac{1}{e}$, toties duos valores pro y exhiberi posse, alterum scilicet maiorem quam e alterum vero minorem, ex quorum utroque prodeat idem valor $u = \frac{ly}{y}$. Veluti, sive statuatur $y = 2$ sive $y = 4$, utrimque prodit $u = \frac{l2}{2}$. Idem usu venit, sive statuatur

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} \quad \text{sive} \quad y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

siquidem ex utroque prodit $u = \frac{8}{9} l \frac{3}{2}$. Idem porro evenit, sive sumatur

$$y = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \quad \text{sive} \quad y = \left(\frac{4}{3}\right)^3,$$

quandoquidem ex utroque fit $u = \frac{3^4}{4^3} l \frac{4}{3}$.

16. Ad tales binos ipsius y valores inveniendos sint p et q huiusmodi valores, quibus evadat $u = \frac{lp}{p} = \frac{lq}{q}$. Ponamus nunc $q = pr$ fierique oportet

$$\frac{lp}{p} = \frac{lpr}{pr} = \frac{lp + lr}{pr}$$

sive $rlp = lp + lr$, unde fit $lp = \frac{lr}{r-1}$ ideoque $p = r^{\frac{1}{r-1}}$ hincque $q = r^{\frac{r}{r-1}}$; quae formulae quo commodiores reddantur, faciamus $\frac{1}{r-1} = m$, ut sit $r = \frac{m+1}{m}$, unde bini valores ipsius y, quos vocavimus p et q, nunc erunt: alter

$$y = p = \left(\frac{m+1}{m}\right)^m,$$

alter vero

$$y = q = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1};$$

ex utroque enim prodit

$$u = \frac{m^{m+1}}{(m+1)^m} l \frac{m+1}{m}.$$

16 [a] [1]. His expositis hic quaestio oritur maximi momenti, uter horum duorum valorum ipsius y adhiberi debeat ad summam huius seriei exprimendam

$$y = 1 + \frac{2^1}{1 \cdot 2} u + \frac{3^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^2 + \frac{4^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} u^3 + \frac{5^4}{1 \cdot 2 \cdots 5} u^4 + \text{etc.}$$

Ad quam quaestionem dirimendam sumamus primo $u = \frac{1}{e}$, ut uterque valor ipsius y sit $= e$; nullum enim est dubium, quin hoc casu sit $y = e$. Nunc vero, si fuerit $u < \frac{1}{e}$, evidens est summam seriei evadere minorem quam e. Quare cum pro y invenerimus duos valores, alterum maiorem alterum quidem minorem quam e, manifestum est semper valorem minorem accipi debere ad summam illius seriei exprimendam. Ita si fuerit

$$u = \frac{m^{m+1}}{(m+1)^m} l \frac{m+1}{m},$$

1) In editione principe falso numerus 16 iteratur. P. St.

valor pro y assumendus erit

$$y = \left(\frac{m+1}{m}\right)^m,$$

quippe qui semper minor est quam e, dum alter,

$$y = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1},$$

maior est quam e.

THEOREMA

17. *Si quantitates x et v ita a se invicem pendeant, ut sit $lx = vx$ atque adeo cuilibet valori v gemini valores x respondeant, alter maior quam e alter vero minor, tum in sequentibus summationibus*

$$\text{I.}\quad \frac{x^n - 1}{n} = v + \frac{n+2}{1\cdot 2}v^2 + \frac{(n+3)^2}{1\cdot 2\cdot 3}v^3 + \frac{(n+4)^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}v^4 + \text{etc.},$$

$$\text{II.}\quad \frac{x^n}{1 - lx} = 1 + \frac{n+1}{1}v + \frac{(n+2)^2}{1\cdot 2}v^2 + \frac{(n+3)^3}{1\cdot 2\cdot 3}v^2 + \frac{(n+4)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}v^4 + \text{etc.}$$

perpetuo loco x minorem valorem accipi oportet, qui scilicet sit minor quam e.

Ratio harum duarum serierum ex evolutione casus secundi per se est manifesta. Prior enim nascitur ex § 8 sumendo $\alpha = 1$.

18. Posterior vero series ex priore deducitur per differentiationem; hinc enim differentiando et per dv dividendo adipiscimur

$$\frac{x^{n-1}dx}{dv} = 1 + \frac{n+2}{1}v + \frac{(n+3)^2}{1\cdot 2}v^2 + \frac{(n+4)^3}{1\cdot 2\cdot 3}v^3 + \text{etc.}$$

Cum autem sit $v = \frac{lx}{x}$, erit $dv = \frac{dx}{xx}(1 - lx)$ ideoque

$$\frac{x^{n-1}dx}{dv} = \frac{x^{n+1}}{1 - lx}.$$

Quare si hic loco n scribamus $n - 1$, orietur ista summatio

$$\frac{x^n}{1 - lx} = 1 + \frac{n+1}{1}v + \frac{(n+2)^2}{1\cdot 2}v^2 + \frac{(n+3)^3}{1\cdot 2\cdot 3}v^3 + \text{etc.},$$

quae est ipsa series nostra posterior.

19. Hae duae autem series eo magis omni attentione dignae sunt censendae, quod multo sint simpliciores et concinniores quam ipsa series generalis LAMBERTINA; tum vero imprimis, quod nulla plane via patere videatur ad earum veritatem directe demonstrandam. Quamquam enim veritas ipsius seriei LAMBERTINAE iam satis est evicta, tamen rationes, quibus demonstratio illa innititur, ad casum praesentium serierum nullo modo accommodari possunt, in quo utique insigne paradoxon conspicitur, quod propositionem quandam generalem demonstratione munire liceat, quae tamen ad quempiam casum specialem applicari penitus nequeat.

20. Quemadmodum autem series generalis LAMBERTINA ex aequatione trinomiali

$$x^{\alpha} - x^{\beta} = (\alpha - \beta) v x^{\alpha + \beta}$$

derivari queat, alia occasione[1]) fusius monstravi, ubi simul similem resolutionem ad aequationes quantumvis polynomias extendi. At vero quomodo vicissim series LAMBERTINA ad aequationem trinomialem perduci queat, quaestio multo magis ardua videtur, unde operae pretium erit talem analysin exposuisse; quod opus quo facilius succedat, sequens problema praemittam.

PROBLEMA

21. *Proposita serie* LAMBERTINA, *uti initio est evoluta, eius consensum cum hac aequatione trinomiali*

$$x^{\alpha} - x^{\beta} = (\alpha - \beta) v x^{\alpha + \beta}$$

docere.

SOLUTIO

Posita seriei illius summa $= S$ hic quidem assumo istam summam aequari huiusmodi potestati x^n, ita ut tantum nobis incumbat relationem inter istam quantitatem x et quantitates ipsam seriem constituentes, quae sunt α, β et v investigare. Facile autem intelligitur hanc ob rationem neutiquam pro demonstratione haberi posse (propterea quod hoc ipsum ante omnia demonstrandum fuisset) istam summam S per talem formam x^n exhiberi posse. Hoc autem concesso ratiocinium sequenti modo instituamus.

1) Vide Commentationem 406 huius voluminis, imprimis p. 274. P. St.

22. Posito scilicet $S = x^n$ primo loco exponentis indefiniti n statuo valorem determinatum $n = -\alpha$ indeque ista series obtinebitur

$$x^{-\alpha} = 1 - \alpha v - \tfrac{1}{2}\alpha\beta v^2 - \tfrac{1}{6}\alpha \cdot 2\beta(\alpha + \beta)v^3 - \tfrac{1}{24}\alpha \cdot 3\beta(\alpha + 2\beta)(2\alpha + \beta)v^4 \\ - \tfrac{1}{120}\alpha \cdot 4\beta(\alpha + 3\beta)(2\alpha + 2\beta)(3\alpha + \beta)v^5 - \text{etc.}$$

Simili modo, si statuamus $n = -\beta$, ad sequentem seriem pertingemus

$$x^{-\beta} = 1 - \beta v - \tfrac{1}{2}\beta\alpha v^2 - \tfrac{1}{6}\beta \cdot 2\alpha(\beta + \alpha)v^3 - \tfrac{1}{24}\beta \cdot 3\alpha(\beta + 2\alpha)(2\beta + \alpha)v^4 \\ - \tfrac{1}{120}\beta \cdot 4\alpha(\beta + 3\alpha)(2\beta + 2\alpha)(3\beta + \alpha)v^5 - \text{etc.}$$

23. Iam priorem harum duarum serierum a posteriore subtrahamus atque impetrabimus istam aequalitatem

$$x^{-\beta} - x^{-\alpha} = (\alpha - \beta)v,$$

propterea quod praeter terminos secundos omnes sequentes se manifesto destruunt. Quodsi iam istam aequationem inventam per $x^{\alpha+\beta}$ multiplicemus, prodibit ipsa aequatio trinomialis assumta

$$x^{\alpha} - x^{\beta} = (\alpha - \beta)vx^{\alpha+\beta}.$$

24. Dummodo igitur demonstrari posset summam seriei LAMBERTINAE aequari potestati exponentis n cuiuspiam quantitatis x, quae ab n non pendeat, praecedens analysis firmam utique demonstrationem suppeditaret. Hunc autem defectum in sequente problemate supplere conabimur.

PROBLEMA PRINCIPALE

25. *Operationes analyticas exponere, quae ad cognitionem verae summae seriei LAMBERTINAE manuducant.*

SOLUTIO

Cum series proposita LAMBERTINA quatuor quantitates α, β, v et n involvat, ternas priores α, β et v tamquam datas et constantes spectemus, dum quarta n quasi variabilis consideretur; hocque modo summam quaesitam

S tamquam certam functionem quantitatis n contemplari licebit, quam more recepto hoc modo repraesentemus $S = \varphi : n$, ita ut sit

$$\begin{aligned}\varphi : n = 1 + nv + \tfrac{1}{2} n(n+\alpha+\beta)v^2 + \tfrac{1}{6} n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^3 \\ + \tfrac{1}{24} n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^4 \\ + \tfrac{1}{120} n(n+\alpha+4\beta)(n+2\alpha+3\beta)(n+3\alpha+2\beta)(n+4\alpha+\beta)v^5 + \text{etc.}\end{aligned}$$

26. Cum igitur haec aequatio vera esse debeat, quicumque numeri loco n scribantur, loco n statuamus primo $n-\alpha$ et impetrabimus

$$\begin{aligned}\varphi : (n-\alpha) = 1 + (n-\alpha)v + \tfrac{1}{2}(n-\alpha)(n+\beta)v^2 \\ + \tfrac{1}{6}(n-\alpha)(n+2\beta)(n+\alpha+\beta)v^3 \\ + \tfrac{1}{24}(n-\alpha)(n+3\beta)(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^4 \\ + \tfrac{1}{120}(n-\alpha)(n+4\beta)(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^5 + \text{etc.}\end{aligned}$$

Simili vero modo reperiemus fore

$$\begin{aligned}\varphi : (n-\beta) = 1 + (n-\beta)v + \tfrac{1}{2}(n-\beta)(n+\alpha)v^2 \\ + \tfrac{1}{6}(n-\beta)(n+2\alpha)(n+\alpha+\beta)v^3 \\ + \tfrac{1}{24}(n-\beta)(n+3\alpha)(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^4 \\ + \tfrac{1}{120}(n-\beta)(n+4\alpha)(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^5 + \text{etc.}\end{aligned}$$

27. Subtrahamus nunc priorem harum duarum serierum a posteriore, et cum pro terminis cuiuscumque ordinis praetermissis factoribus communibus habeamus

$$(n-\beta)(n+\lambda\alpha) - (n-\alpha)(n+\lambda\beta) = (\lambda+1)n(\alpha-\beta),$$

hoc observato subtractione facta inveniemus

$$\begin{aligned}\varphi : (n-\beta) - \varphi : (n-\alpha) = (\alpha-\beta)v + \tfrac{2}{2}(\alpha-\beta)nv^2 + \tfrac{3}{6}(\alpha-\beta)n(n+\alpha+\beta)v^3 \\ + \tfrac{4}{24}(\alpha-\beta)n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^4 \\ + \tfrac{5}{120}(\alpha-\beta)n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^5 + \text{etc.}\end{aligned}$$

28. Quia in hac serie omnes termini factorem continent $(\alpha-\beta)v$, per hunc dividendo consequimur hanc aequationem

$$\frac{\varphi:(n-\beta)-\varphi:(n-\alpha)}{(\alpha-\beta)v}$$
$$=1+nv+\tfrac{1}{2}n(n+\alpha+\beta)v^2+\tfrac{1}{6}n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^3$$
$$+\tfrac{1}{24}n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^4+\text{etc.};$$

quae series cum sit ea ipsa, quam charactere $\varphi:n$ insignivimus, pro summa eruenda hanc adepti sumus aequationem

$$\varphi:(n-\beta)-\varphi:(n-\alpha)=(\alpha-\beta)v\varphi:n.$$

29. Totum negotium igitur ad hanc quaestionem est perductum, cuiusmodi functionem ipsius n pro $\varphi:n$ accipi oporteat, ut huic aequationi satisfiat. Leviter autem eam inspicienti mox patebit ei tali positione satisfieri posse

$$\varphi:n=Ak^n,$$

ubi quidem neque A neque k litteram n involvat; tum autem erit

$$\varphi:(n-\alpha)=Ak^{n-\alpha} \quad \text{et} \quad \varphi:(n-\beta)=Ak^{n-\beta}.$$

Substitutis autem his valoribus aequatio inventa istam induet formam

$$A(k^{n-\beta}-k^{n-\alpha})=(\alpha-\beta)vAk^n,$$

quae divisa per Ak^n abit in hanc

$$k^{-\beta}-k^{-\alpha}=(\alpha-\beta)v;$$

quam si ducamus in $k^{\alpha+\beta}$ et loco k scribamus x, deducimur ad ipsam aequationem trinomialem initio commemoratam

$$x^\alpha-x^\beta=(\alpha-\beta)vx^{\alpha+\beta}.$$

30. Sic igitur solidissime est evictum summam seriei LAMBERTINAE necessario tali formula exprimi, nempe $S=Ak^n$ sive $S=Ax^n$, ubi, cum posito $n=0$ summa seriei debeat $=1$, manifestum est litteram A necessario fieri $=1$, ita ut summa istius seriei prorsus sit, uti est assignata, scilicet $S=x^n$, siquidem quantitas x ista aequatione eliciatur $x^\alpha-x^\beta=(\alpha-\beta)vx^{\alpha+\beta}$.

31. Contra hanc solutionem obiici posset aequationi inventae

$$\varphi:(n-\beta)-\varphi:(n-\alpha)=(\alpha-\beta)v\varphi:n$$

fortasse adhuc aliis modis satisfieri posse praeter valorem $\varphi:n=Ak^n$, quod quidem negari nequit, cum huiusmodi aequationes plerumque plures admittere soleant solutiones. Verum etiamsi sufficere queat istum valorem prorsus satisfacere atque adeo ita, ut neque A neque k ab n pendeat, tamen idem ex principiis analyseos infinitorum etiam sequenti modo confirmari potest.

32. Cum $S=\varphi:n$ sit functio ipsius n, hac quantitate variabili assumta ex notis principiis constat fore

$$\varphi:(n-\alpha)=S-\frac{\alpha dS}{dn}+\frac{\alpha^2 ddS}{1\cdot 2\,dn^2}-\frac{\alpha^3 d^3S}{1\cdot 2\cdot 3\,dn^3}+\frac{\alpha^4 d^4S}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dn^4}-\text{etc.}$$

similique modo

$$\varphi:(n-\beta)=S-\frac{\beta dS}{dn}+\frac{\beta^2 ddS}{1\cdot 2\,dn^2}-\frac{\beta^3 d^3S}{1\cdot 2\cdot 3\,dn^3}+\frac{\beta^4 d^4S}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dn^4}-\text{etc.}$$

His substitutis perveniemus ad istam aequationem differentialem infinitam

$$(\alpha-\beta)vS=(\alpha-\beta)\frac{dS}{dn}-(\alpha\alpha-\beta\beta)\frac{ddS}{1\cdot 2\,dn^2}$$
$$+(\alpha^3-\beta^3)\frac{d^3S}{1\cdot 2\cdot 3\,dn^3}-(\alpha^4-\beta^4)\frac{d^4S}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dn^4}+\text{etc.},$$

ex qua quantitatem S erui oportet.

33. Cum autem in singulis huius aequationis terminis variabilis S unicam ubique dimensionem occupet, in calculo integrali autem ostensum sit tali aequationi aliter satisfieri non posse nisi huiusmodi valoribus

$$S=Ce^{\lambda n};$$

hoc evicto si statuamus $e^\lambda=k$, fiet

$$S=Ck^n,$$

prorsus uti ante assumseramus, ita ut iam nihil amplius super serie LAMBERTINA desiderari posse videatur.

UBERIOR CONFIRMATIO SOLUTIONIS DATAE

34. Si ad solam conditionem inventam respiciamus, qua esse debet

$$\varphi:(n-\beta)-\varphi:(n-\alpha)=(\alpha-\beta)v\varphi:n,$$

ei utique modo multo generaliori satisfieri potest. Quodsi enim singulae litterae p, q, r, s etc. fuerint radices aequationis huius $x^{-\beta}-x^{-\alpha}=(\alpha-\beta)v$, manifestum est istum valorem

$$\varphi:n=Ap^n+Bq^n+Cr^n+Ds^n+\text{etc.}$$

eidem conditioni satisfacere. In hac igitur formula certo continebitur valor summae S seriei LAMBERTINAE; quae cum sit determinata et a solis quantitatibus α, β, n et v pendeat, quaeritur, quomodo litteras illas indefinitas A, B, C, D etc. determinari oporteat, ut fiat $S=\varphi:n$.

35. Hic autem statim duo casus se offerunt, prouti vel unica radicum summam S definit vel omnes plane radices ad eam definiendam concurrunt, quos ergo ambos casus sollicite perpendi conveniet. Ubi primum observo, si omnibus radicibus p, q, r, s etc. simul fuerit utendum, eas sine dubio pari ratione ingredi debere, cum nulla sit ratio, cur cuipiam earum ulla praerogativa tribueretur. Forent idcirco coefficientes illi A, B, C, D etc. inter se aequales ideoque

$$S=A(p^n+q^n+r^n+s^n+\text{etc.}),$$

quare, cum casu $n=0$ fieri debeat $S=1$, si numerus radicum statuatur $=i$, hoc casu fit $S=Ai$, ergo $A=\frac{1}{i}$.

36. Praeterea autem nostra series ita est comparata, ut sumto $v=0$ etiam prodeat eius summa $S=1$. Iam vero casu $v=0$ nostra aequatio erit $x^{-\beta}-x^{-\alpha}=0$ sive $x^{\alpha-\beta}-1=0$, cuius una radix semper est $=1$ et summa omnium radicum semper est $=0$ solo casu excepto, quo $\alpha-\beta=1$. Quodsi ergo sumatur $n=1$, prodiret

$$S=\frac{1}{i}(p+q+r+s+\text{etc.})=0,$$

cum tamen summa sit $=1$, ita ut ista hypothesis veritati adversetur.

37. Idem incommodum etiam multo clarius elucescet, si in genere statuamus $n = 1$, quippe quo casu foret

$$S = \frac{1}{i}(p + q + r + s + \text{etc.}),$$

ubi $p + q + r + s +$ etc. est summa radicum aequationis trinomialis

$$x^{-\beta} - x^{-\alpha} = (\alpha - \beta)v$$

ideoque aequabitur coefficienti secundi termini, postquam aequatio in ordinem fuerit redacta; qui cum plerumque deficiat, summa seriei etiam nihili foret aequalis. Quod cum veritati contradicat, satis evictum est non omnes radices aequationis trinomialis ad summam S constituendam concurrere posse.

38. Hoc igitur casu remoto, quo omnes radices aequaliter ingrederentur, relinquitur casus prior, quo summa S per unicam istarum radicum determinatur, quemadmodum in solutione assumsimus. Evidens autem est istam radicem fore vel maximam vel minimam; hic scilicet idem discrimen usu venit atque in resolutione omnium aequationum per series recurrentes, qua methodo pariter tantum una aequationum radix vel maxima vel minima inveniri solet, sicque solutio nostra data iam extra omne dubium est collocata. Occasione autem methodi, qua sumus usi, sequens problema adiunxisse non pigebit.

PROBLEMA

39. *Invenire omnes functiones quantitatis variabilis n, quibus huic conditioni generali satisfiat*

$$\varphi : n = a\varphi : (n + \alpha) + b\varphi : (n + \beta) + c\varphi : (n + \gamma) + \text{etc.}$$

SOLUTIO

Quodsi ratiocinium uti in praecedenti problemate instituamus, facile patebit isti conditioni satisfieri posse statuendo

$$\varphi : n = Ak^n,$$

ita ut A et k sint quantitates constantes. Facta autem hac substitutione prodibit haec aequatio

$$Ak^n = Aak^{n+\alpha} + Abk^{n+\beta} + Ack^{n+\gamma} + Adk^{n+\delta} + \text{etc.},$$

quae per Ak^n divisa praebet

$$1 = ak^\alpha + bk^\beta + ck^\gamma + dk^\delta + \text{etc.},$$

ita ut k designet quampiam radicem huius aequationis, cuius adeo singulae radices conditioni praescriptae pariter satisfacient. Quin etiam omnes has diversas solutiones quomodocumque inter se combinare licebit. Ita si p, q, r, s etc. fuerint radices istius aequationis, problemati nostro generaliter satisfiet statuendo

$$\varphi : n = Ap^n + Bq^n + Cr^n + \text{etc.},$$

ubi litterae A, B, C, D etc. penitus arbitrio nostro relinquuntur; haecque est solutio generalis problematis illius analytici, quod frequenter insignem usum afferre poterit.

40. Sed revertamur ad seriem LAMBERTINAM atque ostendamus, quomodo ex ea innumerabiles aliae series affines derivari queant.

PROBLEMA

41. *Proposita serie* LAMBERTINA, *quam brevitatis gratia sub hac forma referamus*

$$S = 1 + Av + Bv^2 + Cv^3 + Dv^4 + \textit{etc.},$$

cuius novimus esse summam $= x^n$ *sumendo pro* x *sive maximam sive minimam radicem huius aequationis trinomiae*

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta) v x^{\alpha+\beta},$$

inde innumerabiles alias series affines formare, quarum summam pariter assignare liceat.

SOLUTIO

Hic igitur litteris A, B, C, D etc. brevitatis gratia sequentes valores tribuimus

$$A = n,$$
$$B = \tfrac{1}{2} n(n + \alpha + \beta),$$
$$C = \tfrac{1}{6} n(n + \alpha + 2\beta)(n + 2\alpha + \beta),$$
$$D = \tfrac{1}{24} n(n + \alpha + 3\beta)(n + 2\alpha + 2\beta)(n + 3\alpha + \beta),$$
$$E = \tfrac{1}{120} n(n + \alpha + 4\beta)(n + 2\alpha + 3\beta)(n + 3\alpha + 2\beta)(n + 4\alpha + \beta)$$
$$\text{etc.}$$

His igitur valoribus notatis duae potissimum viae patent ad alias series inde derivandas; altera scilicet per differentiationem altera vero per integrationem institui potest.

42. Cum sit $(\alpha-\beta)v = x^{-\beta} - x^{-\alpha}$, erit

$$(\alpha-\beta)\,dv = -\beta x^{-\beta-1}dx + \alpha x^{-\alpha-1}dx$$

sive

$$(\alpha-\beta)\,dv = \frac{dx\,(\alpha x^{\beta}-\beta x^{\alpha})}{x^{\alpha+\beta+1}};$$

hinc ergo, si nostram seriem differentiemus ac per dv dividamus, ad sequentem perveniemus summationem

$$\frac{(\alpha-\beta)nx^{n+\alpha+\beta}}{\alpha x^{\beta}-\beta x^{\alpha}} = A + 2Bv + 3Cvv + 4Dv^3 + 5Ev^4 + 6Fv^5 + \text{etc.}$$

43. Potuissemus etiam seriem propositam per quampiam potestatem ipsius v ante multiplicare, quam differentiatio instituatur; veluti multiplicando per v^{λ}, ut habeamus

$$v^{\lambda}x^{n} = v^{\lambda} + Av^{\lambda+1} + Bv^{\lambda+2} + Cv^{\lambda+3} + Dv^{\lambda+4} + \text{etc.},$$

haec series differentiata ac per dv divisa praebet

$$\lambda v^{\lambda-1}x^{n} + nv^{\lambda}x^{n-1}\frac{dx}{dv} = \lambda v^{\lambda-1} + (\lambda+1)Av + (\lambda+2)Bv^{\lambda+1} + (\lambda+3)Cv^{\lambda+2}$$
$$+ (\lambda+4)Dv^{\lambda+3} + (\lambda+5)Ev^{\lambda+4} + \text{etc.},$$

quae expressio per $v^{\lambda-1}$ divisa praebet hanc summationem

$$\lambda x^{n} + nvx^{n-1}\frac{dx}{dv} = \lambda + (\lambda+1)Av + (\lambda+2)Bv^2 + (\lambda+3)Cv^3$$
$$+ (\lambda+4)Dv^4 + \text{etc.},$$

pro qua modo vidimus esse

$$\frac{nx^{n-1}dx}{dv} = \frac{(\alpha-\beta)nx^{n+\alpha+\beta}}{\alpha x^{\beta}-\beta x^{\alpha}},$$

quo valore substituto ista summa evadet

$$= \lambda x^{n} + \frac{nx^{n+\alpha} - nx^{n+\beta}}{\alpha x^{\beta}-\beta x^{\alpha}} = \frac{x^{n}}{\alpha x^{\beta}-\beta x^{\alpha}}\left((\lambda\alpha-n)x^{\beta} - (\lambda\beta-n)x^{\alpha}\right).$$

44. Quodsi iam hanc seriem denuo per v^{μ} multiplicemus iterumque differentiemus, innumerabiles novas series adipiscemur, quarum summatio itidem est in potestate. Hocque modo continuo ulterius progredi licebit, quem autem laborem persequi prorsus foret superfluum.

45. Simili modo per integrationem novas series elicere poterimus. Quodsi enim seriem propositam per

$$dv = \frac{\alpha x^{-\alpha-1}dx}{\alpha-\beta} - \frac{\beta x^{-\beta-1}dx}{\alpha-\beta}$$

multiplicemus et utrimque integremus, perveniemus ad sequentem summationem

$$\frac{\alpha x^{n-\alpha}}{(\alpha-\beta)(n-\alpha)} - \frac{\beta x^{n-\beta}}{(\alpha-\beta)(n-\beta)}$$
$$= v + \frac{1}{2}Avv + \frac{1}{3}Bv^3 + \frac{1}{4}Cv^4 + \frac{1}{5}Dv^5 + \text{etc.} + \text{const.};$$

ad quam constantem definiendam consideretur casus $v=0$, quo fit $x=1$ indeque constans $= \frac{n}{(n-\alpha)(n-\beta)}$.

46. Potuissemus etiam ante integrationem multiplicare per v^{λ}; verum hoc modo in calculos nimis operosos incidissemus, unde nobis sufficiat fontem aperuisse, ex quo innumerabiles huiusmodi novae series hauriri queant.

NOVA METHODUS FRACTIONES QUASCUMQUE RATIONALES IN FRACTIONES SIMPLICES RESOLVENDI[1]

Commentatio 540 indicis ENESTROEMIANI
Acta academiae scientiarum Petropolitanae 1780: I, 1783, p. 32—46

1. Sit $\frac{P}{Q}$ fractio quaecumque proposita, cuius tam numerator P quam denominator Q sint functiones rationales integrae quantitatis variabilis z, denominator autem Q sit productum ex quotcumque factoribus simplicibus formae $z \pm a$, sive aequalibus sive inaequalibus inter se, et notum est istam fractionem semper resolvi posse in fractiones simplices, quarum denominatores singuli formentur ex factoribus ipsius Q, numeratores vero sint quantitates

1) Confer hac cum dissertatione Commentationes 728 et 794 huius voluminis: *De resolutione fractionum compositarum in simpliciores*, Mém. de l'acad. d. sc. de St. Pétersbourg 1 (1803/6), 1809, p. 3, et *Theorema arithmeticum eiusque demonstratio*, Comment. arithm. 2, 1849, p. 588. Confer porro *Introductionem in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, t. I cap. 2 et 12, LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 8, et *Institutionum calculi integralis* vol. I, § 56, Petropoli 1768, LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 11, p. 28, nec non Commentationes 162 et 163 (indicis ENESTROEMIANI): *Methodus integrandi formulas differentiales rationales unicam variabilem involventes*, Comment. acad. sc. Petrop. 14 (1744/6), 1751, p. 3, et *Methodus facilior atque expeditior integrandi formulas differentiales rationales*, Comment. acad. sc. Petrop. 14 (1744/6), 1751, p. 99, LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 17, p. 70 et 149. Vide denique Commentationes 572 et 592 (indicis ENESTROEMIANI): *Nova methodus integrandi formulas differentiales rationales sine subsidio quantitatum imaginariarum*, Acta acad. sc. Petrop. 1781: I, 1784, p. 3, LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 18, p. 113, et *De resolutione fractionum transcendentium in infinitas fractiones simplices*, Opuscula analytica 2, 1785, p. 102, LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 15. P. St.

constantes, siquidem variabilis z in numeratore P ad pauciores dimensiones assurgat quam in denominatore Q, quoniam aliter praeter istas fractiones simplices insuper partes integrae essent adiiciendae. Qui casus cum nulla laboret difficultate, propterea quod partes istae integrae facile reperiuntur, dum numerator P per denominatorem Q actu dividitur, sufficiet eiusmodi tantum fractiones considerasse, in quarum denominatore Q variabilis z ad altiores potestates ascendit quam in numeratore P. Tum igitur, quando pro singulis factoribus denominatoris Q inventae fuerint fractiones simplices ipsis respondentes, summa omnium harum fractionum aequabitur fractioni propositae $\frac{P}{Q}$. Primus quidem in *Introductione* mea ad Analysin infinitorum[1]) methodum tradidi satis simplicem, cuius ope omnes istae fractiones partiales pro singulis denominatoris factoribus reperiri queant sine ullo respectu ad reliquas habito, quarum ratio antehac teneri debebat. Postmodum vero istam methodum magis excolui, et quemadmodum ope calculi differentialis facilius ad quosvis usus accommodari possit, uberius ostendi.[1]) Nunc autem penitus nova idea sese mihi obtulit eandem resolutionem perficiendi, quae plerumque negotium non mediocriter sublevare videtur. Imprimis autem ad functiones transcendentes mira facilitate accommodari potest, unde operae pretium fore existimo, si istam novam methodum accuratius exposuero.

2. Sit igitur $z-a$ factor simplex denominatoris Q, sive solitarius sive quotcumque sibi aequales admittens. Ac priori casu inde fractio simplex oriunda erit $\frac{\alpha}{z-a}$. Sin autem denominator binos huiusmodi factores aequales involvat, scilicet $(z-a)^2$, tum resolutio binas dabit fractiones simplices $\frac{\alpha}{(z-a)^2}+\frac{\beta}{z-a}$; at si factorem habeat cubicum $(z-a)^3$, fractiones simplices inde ortae erunt $\frac{\alpha}{(z-a)^3}+\frac{\beta}{(z-a)^2}+\frac{\gamma}{z-a}$ et ita porro pro altioribus potestatibus. Totum igitur negotium huc redit, ut pro singulis huiusmodi factoribus numeratores α, β, γ etc. definiantur, pro qua investigatione iam olim[1]) praecepta dedi. Nova autem methodus, quam hic sum traditurus, huic innititur principio, quod posito $z=a$ omnes istae fractiones partiales evadant infinitae, dum reliquae omnes manent finitae magnitudinis ideoque prae illis quasi evanescant. Hinc si in fractione proposita $\frac{P}{Q}$ statuatur $z=a$, ea utique etiam in infinitum excrescat eiusque valor debite evolutus praebebit ipsas illas fractiones simplices in infinitum abeuntes, id quod hic accuratius sum persecuturus.

1) Vide notam praecedentem. P. St.

3. Ne igitur consideratio infiniti moram facessat, statuamus non $z - a = 0$ sed $z - a = \omega$ denotante ω quantitatem infinite parvam atque adeo ipsam evanescentem ac ponamus tam in numeratore P quam in denominatore Q ubique $z = a + \omega$, quo facto numerator P evolvatur in huiusmodi formam

$$P = A + B\omega + C\omega\omega + D\omega^3 + \text{etc.},$$

denominator vero Q, quia per hypothesin evanescit posito $z = a$, talem induet formam

$$Q = \mathfrak{A}\omega + \mathfrak{B}\omega\omega + \mathfrak{C}\omega^3 + \mathfrak{D}\omega^4 + \text{etc.},$$

ubi, si factor $z - a$ fuerit solitarius, primus terminus $\mathfrak{A}\omega$ necessario aderit. Sin autem denominator Q factorem habeat $(z - a)^2$, erit $\mathfrak{A} = 0$ ac denominator a termino $\mathfrak{B}\omega^2$ incipiet. Quodsi vero denominatoris factor fuerit $(z - a)^3$, primus terminus in denominatore erit $\mathfrak{C}\omega^3$, et ita porro, ita ut, si in genere factor fuerit $(z - a)^n$, infima potestas in denominatore sit $\mathfrak{N}\omega^n$.

4. Haec quidem substitutio ponendo $z = a + \omega$ operationes tantum vulgares algebraicas postulat; interim tamen per nota principia differentialium mirifice sublevari potest. Nam si in genere loco z scribatur $z + \omega$, functio ipsius z quaecumque P accipiet istum valorem

$$P + \frac{\omega dP}{1 dz} + \frac{\omega\omega ddP}{1 \cdot 2\, dz^2} + \frac{\omega^3 d^3 P}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dz^3} + \frac{\omega^4 d^4 P}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\, dz^4} + \text{etc.}$$

Hoc igitur modo statim forma tam numeratoris P quam denominatoris Q secundum potestates ipsius ω disposita reperietur tantumque opus est, ut in singulis terminis loco z ubique scribatur a. Quousque autem istas expressiones per potestates ipsius ω continuari oporteat, ex primo denominatoris termino seu infima potestate ipsius ω facile diiudicabitur, unde sequentes casus evolvamus.

CASUS I

QUO DENOMINATORIS Q FACTOR EST $z - a$

5. Hoc igitur casu non erit $\mathfrak{A} = 0$, unde fractio nostra $\frac{P}{Q}$ facto $z = a + \omega$ induet hanc formam

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{A + B\omega + C\omega^2 + D\omega^3 + \text{etc.}}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\omega + \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{D}\omega^3 + \text{etc.}},$$

ubi fractio ista per divisionem evolvatur tantum usque ad primam potestatem ω, propterea quod in fractione praefixa $\frac{1}{\omega}$ haec littera unicam tantum habet dimensionem, unde hoc casu tam numeratorem P quam denominatorem Q ad duos tantum terminos extendisse sufficit, ita ut sit

$$\frac{1}{\omega}\cdot\frac{A+B\omega}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\omega}.$$

Nunc igitur ex evolutione istius fractionis $\frac{A+B\omega}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\omega}$ oriatur quotus $\alpha+\beta\omega$ eritque

$$\alpha=\frac{A}{\mathfrak{A}},\quad \beta=\frac{B}{\mathfrak{A}}-\frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}^2}.$$

His autem valoribus inventis fractio nostra discerpitur in has partes

$$\frac{\alpha}{\omega}+\beta;$$

quarum cum prima tantum fiat infinita, si loco ω restituamus valorem $z-a$, fractio simplex hinc resultans erit

$$\frac{\alpha}{z-a}.$$

Hoc igitur modo facillime fractiones simplices ex singulis denominatoris Q factoribus solitariis formae $z-a$ obtinentur; neque adeo opus est valorem ipsius β nosse, unde sufficere potuisset tantum primos terminos A et $\mathfrak{A}$ indagasse. Oritur autem A ex numeratore P posito $z=a$; at $\mathfrak{A}$ oritur ex formula $\frac{dQ}{dz}$ posito itidem $z=a$. Cum enim posito $z=a$ fiat $Q=0$, si loco z scribatur $a+\omega$, prodibit $\mathfrak{A}=\frac{dQ}{dz}$.

6. Interim tamen bonum est etiam valorem ipsius β nosse, quoniam inde quaestio non parum curiosa facile potest resolvi. Cum enim ex factore $z-a$ deducta sit fractio $\frac{\alpha}{z-a}$, si pro reliquis omnibus terminis scribamus litteram R, erit utique $\frac{P}{Q}=\frac{\alpha}{z-a}+R$. Quodsi ergo desideretur summa omnium reliquorum terminorum R, casu quo ponitur $z=a$ sive $z=a+\omega$, quippe quae summa est finita, ex aequatione modo inventa fiet $R=\frac{P}{Q}-\frac{\alpha}{z-a}$ ideoque posito $z=a+\omega$ erit

$$R=\frac{\alpha}{\omega}+\beta-\frac{\alpha}{\omega}=\beta;$$

sicque valor litterae β, quem invenimus, exprimit summam omnium reliquorum terminorum pro casu $z = a$. Erat autem $\beta = \frac{B}{\mathfrak{A}} - \frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}^2}$.

7. Facile autem patet hoc modo pro omnibus factoribus simplicibus denominatoris Q easdem prodire fractiones partiales, ad quas methodus antehac exposita deducit. Si enim ponamus $\frac{P}{Q} = \frac{\alpha}{z-a} + R$ ac per $z - a$ multiplicemus, fiet

$$\frac{P(z-a)}{Q} = \alpha + R(z-a).$$

Quia nunc novimus numeratorem quaesitum α esse constantem, pro eo semper idem valor prodire debet, quicquid pro z scribatur. Ponatur igitur $z = a$, ut ratio reliquorum terminorum R ex calculo egrediatur, fietque

$$\alpha = \frac{P(z-a)}{Q},$$

posito scilicet $z = a$; tum autem tam numerator quam denominator evanescit, unde, si eorum loco sua differentialia ponantur, fiet

$$\alpha = \frac{(z-a)\,dP + P\,dz}{dQ}.$$

Posito igitur $z = a$ erit

$$\alpha = \frac{P\,dz}{dQ}.$$

At vero supra assumsimus casu $z = a$ fieri $P = A$ et $\frac{dQ}{dz} = \mathfrak{A}$, ita ut et hinc etiam prodeat

$$\alpha = \frac{A}{\mathfrak{A}}.$$

CASUS II

QUO DENOMINATORIS Q FACTOR EST $(z-a)^2$

8. Hic igitur in forma, ad quam nostram fractionem $\frac{P}{Q}$ posito $z = a + \omega$ convertimus, erit $\mathfrak{A} = 0$, unde fractio pro hoc casu ita referri poterit

$$\frac{1}{\omega\omega} \cdot \frac{A + B\omega + C\omega\omega}{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\omega + \mathfrak{D}\omega\omega}.$$

Hic scilicet potestates ipsius ω non ultra secundam protendimus. Nunc illa expressio in hanc formam

$$\frac{1}{\omega^2}(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega\omega)$$

reducatur et reperietur calculo subducto

$$\alpha = \frac{A}{\mathfrak{B}}, \quad \beta = \frac{B}{\mathfrak{B}} - \frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}^2}, \quad \gamma = \frac{C}{\mathfrak{B}} - \frac{B\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}^2} - \frac{A\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}^2} + \frac{A\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{B}^3}.$$

His igitur valoribus inventis nostra fractio discerpetur in has partes

$$\frac{\alpha}{\omega^2} + \frac{\beta}{\omega} + \gamma,$$

quarum binae priores ob $\omega = z - a$ praebent istas fractiones partiales

$$\frac{\alpha}{(z-a)^2} + \frac{\beta}{z-a};$$

at quantitas γ aequabitur summae omnium reliquorum terminorum, siquidem in illis statuatur $z = a$.

CASUS III

QUO DENOMINATORIS FACTOR EST $(z-a)^3$

9. Hic igitur ob $\mathfrak{A} = 0$ et $\mathfrak{B} = 0$ fractio evolvenda erit

$$\frac{1}{\omega^3} \cdot \frac{A + B\omega + C\omega\omega + D\omega^3}{\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\omega + \mathfrak{E}\omega\omega + \mathfrak{F}\omega^3},$$

quae reducatur ad hanc formam

$$\frac{1}{\omega^3}(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega\omega + \delta\omega^3)$$

ope harum aequalitatum

$$A = \alpha\mathfrak{C}, \quad B = \alpha\mathfrak{D} + \beta\mathfrak{C}, \quad C = \alpha\mathfrak{E} + \beta\mathfrak{D} + \gamma\mathfrak{C}, \quad D = \alpha\mathfrak{F} + \beta\mathfrak{E} + \gamma\mathfrak{D} + \delta\mathfrak{C},$$

quibus valoribus inventis ex denominatoris Q factore cubico $(z - a)^3$ obtinentur istae fractiones partiales

$$\frac{\alpha}{(z-a)^3} + \frac{\beta}{(z-a)^2} + \frac{\gamma}{z-a}$$

At vero δ exhibet summam omnium reliquorum terminorum, si in ipsis ubique scribatur $z = a$. Facile autem intelligitur hoc modo etiam ad altiores potestates procedi posse.

10. Haec methodus etiam succedit, si factores denominatoris fuerint imaginarii, scilicet formae

$$z - a + b\sqrt{-1};$$

tum autem, quoniam etiam factor erit $z - a - b\sqrt{-1}$, binae fractiones partiales hinc ortae

$$\frac{\alpha}{z-a+b\sqrt{-1}} + \frac{\beta}{z-a-b\sqrt{-1}}$$

facile in factorem duplicatum realem contrahentur, cuius denominator erit $(z-a)^2 + bb$. Hoc igitur sequenti exemplo ostendisse iuvabit.

EXEMPLUM

11. *Si fractio proposita resolvenda fuerit* $\frac{P}{Q} = \frac{\sin.\varphi}{\text{tang.}\varphi - \cos.\varphi}$, *eam in fractiones simplices resolvere.*

SOLUTIO

Hic igitur primo omnes angulos φ quaeri oportet, quibus denominator tang. φ — cos. φ evanescit. Ponatur igitur

$$\text{tang.}\varphi - \cos.\varphi = 0 \quad \text{sive} \quad \sin.\varphi - \cos.\varphi^2 = 0,$$

ita ut sit

$$\sin.\varphi^2 + \sin.\varphi = 1,$$

unde colligitur

$$\sin.\varphi = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

sicque pro sin. φ duo habentur valores

$$\sin.\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \sin.\varphi = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

quorum prior, cum sit unitate minor, dabit valorem realem pro angulo φ. Cum enim sit proxime

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618034,$$

erit $\varphi = 38^0 10' 22''$, quem angulum brevitatis gratia ponamus $= \zeta$, ita ut sit

$$\sin. \zeta = 0{,}618034 \quad \text{et} \quad \cos. \zeta = 0{,}786151$$

atque

$$\operatorname{tang}. \zeta = 0{,}786153^{1)}$$

ideoque, uti posuimus,

$$\cos. \zeta = \operatorname{tang}. \zeta.$$

12. Alter autem valor pro $\sin. \varphi$ inventus dat $\sin. \varphi = -1{,}618034$, qui, cum sit unitate maior, monstrat hunc angulum esse imaginarium, ad quem definiendum notetur esse

$$\cos. \theta \sqrt{-1} = \frac{e^{-\theta} + e^{+\theta}}{2};$$

qui valor cum manifesto maior sit unitate et quidem positivus, utamur hac formula

$$\cos. (\pi - \theta \sqrt{-1}) = \frac{-e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}.$$

Quodsi ergo faciamus

$$\varphi = 90^0 - \pi + \theta \sqrt{-1} = \theta \sqrt{-1} - \frac{\pi}{2},$$

erit

$$\sin. \varphi = -\frac{e^{-\theta} + e^{+\theta}}{2},$$

quamobrem debet esse

$$\frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} = +1{,}618034 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

pro quo numero brevitatis gratia scribamus ε, ut sit $e^{\theta} + e^{-\theta} = 2\varepsilon$, unde colligitur

$$e^{\theta} = \varepsilon + \sqrt{(\varepsilon\varepsilon - 1)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon}$$

et substituto valore fit $e^{\theta} = 2{,}890054^{2)}$. Hinc igitur fiet $\theta = l.\, 2{,}890054$, sumendo scilicet logarithmum hyperbolicum, qui reperitur, si logarithmus vulgaris multiplicetur per 2,3025851. Cum igitur logarithmus vulgaris sit 0,4609060, erit

$$\theta = 0{,}4609060 \cdot 2{,}3025851 = 1{,}0612752.$$

1) Editio princeps: $\operatorname{tang}. \zeta = 0{,}786154$. Correxit P. St.

2) Editio princeps: $e^{\theta} = 2{,}0581710$; qui numerus ex valore erroneo $\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{0{,}1618034}$ loco $\sqrt{1{,}618034}$ ortus esse videtur. Itaque etiam sequentes valores corrigendi erant. P. St.

13. Inventis igitur his valoribus pro ζ et θ ex priore $\varphi = \zeta$ omnes anguli φ, quibus noster denominator tang. φ — cos. φ evanescit, sunt in genere

$$2i\pi + \zeta \quad \text{et} \quad (2i+1)\pi - \zeta,$$

quippe qui anguli omnes eundem habent sinum, unde colliguntur omnes factores simplices reales. Pro imaginariis autem tantum loco ζ scribi oportet $\theta\sqrt{-1} - \frac{1}{2}\pi$ sicque simul obtinentur omnes factores imaginarii.

14. Primo igitur denominatoris nostri factor sit $\varphi - 2i\pi - \zeta$ ponaturque hic factor $= \omega$, ita ut sit

$$\varphi = 2i\pi + \zeta + \omega,$$

eritque

$$\sin.\varphi = \sin.(\zeta+\omega) = \sin.\zeta\cos.\omega + \cos.\zeta\sin.\omega = \sin.\zeta + \omega\cos.\zeta,$$

quoniam non ultra primam dimensionem ipsius ω progredi necesse est. Deinde vero erit

$$\cos.\varphi = \cos.(\zeta+\omega) = \cos.\zeta - \omega\sin.\zeta,$$

denique

$$\text{tang.}\,\varphi = \text{tang.}(\zeta+\omega) = \text{tang.}\,\zeta + \frac{\omega}{\cos.\zeta^2}.$$

Hinc igitur denominator erit

$$\text{tang.}\,\zeta - \cos.\zeta + \omega\left(\sin.\zeta + \frac{1}{\cos.\zeta^2}\right);$$

at vero per hypothesin est tang. ζ — cos. $\zeta = 0$, unde denominator iste erit

$$\omega\left(\sin.\zeta + \frac{1}{\cos.\zeta^2}\right).$$

Ubi notetur, si accuratius procedere voluissemus, in denominatorem insuper terminum ω^2 ingressurum fuisse, quem autem hic negligere licet, quia nullus factor bis occurrit. Hinc ergo nascitur valor infinitus nostrae fractionis

$$\frac{\sin.\zeta}{\omega\left(\sin.\zeta + \frac{1}{\cos.\zeta^2}\right)} = \frac{\sin.\zeta\cos.\zeta^2}{\omega(\sin.\zeta\cos.\zeta^2 + 1)},$$

ex quo haec fractio partialis deducitur

$$\frac{\sin.\zeta\cos.\zeta^2}{\sin.\zeta\cos.\zeta^2 + 1} \cdot \frac{1}{\varphi - 2i\pi - \zeta}.$$

Quare si pro i omnes numeros tam positivos quam negativos statuamus, prodibit ista series fractionum

$$\frac{\sin.\zeta\cos.\zeta^2}{1+\sin.\zeta\cos.\zeta^2}\left(\frac{1}{\varphi-\zeta}+\frac{1}{\varphi-2\pi-\zeta}+\frac{1}{\varphi+2\pi-\zeta}+\frac{1}{\varphi-4\pi-\zeta}+\frac{1}{\varphi+4\pi-\zeta}+\text{etc.}\right).$$

At si pro ζ scribamus $\theta\sqrt{-1}-\frac{1}{2}\pi$, series fractionum imaginariarum erit

$$\frac{\sin.\zeta\cos.\zeta^2}{1+\sin.\zeta\cos.\zeta^2}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{1}{\varphi+\frac{1}{2}\pi-\theta\sqrt{-1}}+\dfrac{1}{\varphi-\frac{3}{2}\pi-\theta\sqrt{-1}}+\dfrac{1}{\varphi+\frac{5}{2}\pi-\theta\sqrt{-1}}\\+\dfrac{1}{\varphi-\frac{7}{2}\pi-\theta\sqrt{-1}}+\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

15. Pro altero casu, quo in genere erat factor

$$\varphi-(2i+1)\pi+\zeta=\omega,$$

erit

$$\varphi=(2i+1)\pi-\zeta+\omega$$

hincque

$$\sin.\varphi=\sin.(\zeta-\omega)=\sin.\zeta-\omega\cos.\zeta,$$

tum vero

$$\cos.\varphi=-\cos.(\zeta-\omega)=-\cos.\zeta-\omega\sin.\zeta$$

et

$$\text{tang.}\,\varphi=-\text{tang.}(\zeta-\omega)=-\text{tang.}\,\zeta+\frac{\omega}{\cos.\zeta^2},$$

quare totus denominator erit

$$-\text{tang.}\,\zeta+\cos.\zeta+\omega\left(\frac{1}{\cos.\zeta^2}+\sin.\zeta\right)=\omega\left(\sin.\zeta+\frac{1}{\cos.\zeta^2}\right)$$

ob $-\text{tang.}\,\zeta+\cos.\zeta=0$, unde pars infinita nostrae fractionis erit

$$\frac{\sin.\zeta}{\omega\left(\sin.\zeta+\frac{1}{\cos.\zeta^2}\right)}=\frac{\sin.\zeta\cos.\zeta^2}{\omega(1+\sin.\zeta\cos.\zeta^2)}.$$

Nunc igitur, si loco ω scribamus valorem assumtum

$$\varphi-(2i+1)\pi+\zeta,$$

orietur forma generalis fractionum simplicium

$$\frac{\sin.\zeta\cos.\zeta^2}{(1+\sin.\zeta\cos\zeta^2)}\cdot\frac{1}{\varphi-(2i+1)\pi+\zeta}.$$

Loco i ergo successive scribamus omnes valores 0, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4 etc. et colligetur sequens series fractionum

$$\frac{\sin.\zeta\cos.\zeta^2}{1+\sin.\zeta\cos.\zeta^2}\left(\frac{1}{\varphi-\pi+\zeta}+\frac{1}{\varphi+\pi+\zeta}+\frac{1}{\varphi-3\pi+\zeta}+\frac{1}{\varphi+3\pi+\zeta}+\frac{1}{\varphi-5\pi+\zeta}+\text{etc.}\right).$$

Quodsi iam hic pro ζ scribamus $\theta\sqrt{-1}-\frac{1}{2}\pi$, orientur fractiones imaginariae, quae erunt

$$\frac{\sin.\zeta\cos.\zeta^2}{1+\sin.\zeta\cos.\zeta^2}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{1}{\varphi+\frac{1}{2}\pi+\theta\sqrt{-1}}+\dfrac{1}{\varphi-\frac{3}{2}\pi+\theta\sqrt{-1}}+\dfrac{1}{\varphi+\frac{5}{2}\pi+\theta\sqrt{-1}}\\ +\dfrac{1}{\varphi-\frac{7}{2}\pi+\theta\sqrt{-1}}+\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

16. Colligamus nunc primo seorsim omnes fractiones reales, et cum omnes habeant eundem coefficientem constantem

$$\frac{\sin.\zeta\cos.\zeta^2}{1+\sin.\zeta\cos.\zeta^2},$$

ante omnia in eius valorem numericum inquiramus. Primo igitur cum fuisset

$$\sin.\zeta-\cos.\zeta^2=0,$$

erit

$$\cos.\zeta^2=\sin\zeta$$

ideoque iste coefficiens

$$=\frac{\sin.\zeta^2}{1+\sin.\zeta^2};$$

porro vero erat

$$\sin.\zeta^2+\sin.\zeta=1$$

ideoque

$$\sin.\zeta^2=1-\sin.\zeta,$$

unde fit coefficiens

$$\frac{1-\sin.\zeta}{2-\sin.\zeta}.$$

Denique vero pro factoribus realibus eruimus $\sin.\zeta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, unde noster coefficiens evadet

$$\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10},$$

cuius ergo valor erit 0,2763932, pro quo brevitatis gratia scribamus α, et omnes fractiones simplices reales in ordinem redactae erunt

$$\frac{\alpha}{\varphi-\zeta} + \frac{\alpha}{\varphi-\zeta-2\pi} + \frac{\alpha}{\varphi-\zeta+2\pi} + \frac{\alpha}{\varphi-\zeta-4\pi} + \frac{\alpha}{\varphi-\zeta+4\pi} + \text{etc.},$$

$$\frac{\alpha}{\varphi+\zeta-\pi} + \frac{\alpha}{\varphi+\zeta+\pi} + \frac{\alpha}{\varphi+\zeta-3\pi} + \frac{\alpha}{\varphi+\zeta+3\pi} + \frac{\alpha}{\varphi+\zeta-5\pi} + \text{etc.}$$

17. Pro partibus autem imaginariis idem coefficiens communis

$$\frac{\sin.\zeta\cos.\zeta^2}{1+\sin.\zeta\cos.\zeta^2}$$

ob

$$\cos.\zeta^2 = \sin.\zeta \quad \text{et} \quad \sin.\zeta^2 = 1-\sin.\zeta$$

transmutatur ut ante in hanc formam

$$\frac{1-\sin.\zeta}{2-\sin.\zeta}.$$

At vero pro partibus imaginariis invenimus $\sin.\zeta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, in quo iam involvitur substitutio ante memorata $\zeta = \theta\sqrt{-1} - \frac{1}{2}\pi$. Hoc ergo valore substituto coefficiens communis erit

$$\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

ideoque in numeris 0,7236068, pro quo numero scribamus β, ita ut sit $\alpha+\beta=1$. Hanc ob rem bini ordines fractionum imaginariarum erunt

$$\frac{\beta}{\varphi-\theta\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\pi} + \frac{\beta}{\varphi-\theta\sqrt{-1}-\frac{3}{2}\pi} + \frac{\beta}{\varphi-\theta\sqrt{-1}+\frac{5}{2}\pi} + \frac{\beta}{\varphi-\theta\sqrt{-1}-\frac{7}{2}\pi} + \text{etc.},$$

$$\frac{\beta}{\varphi+\theta\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\pi} + \frac{\beta}{\varphi+\theta\sqrt{-1}-\frac{3}{2}\pi} + \frac{\beta}{\varphi+\theta\sqrt{-1}+\frac{5}{2}\pi} + \frac{\beta}{\varphi+\theta\sqrt{-1}-\frac{7}{2}\pi} + \text{etc.}$$

Hinc ergo si binae harum fractionum in unam summam colligantur, imaginaria se mutuo destruent ac prodibit sequens series

$$\frac{\beta(2\varphi+\pi)}{(\varphi+\frac{1}{2}\pi)^2+\theta\theta}+\frac{\beta(2\varphi-3\pi)}{(\varphi-\frac{3}{2}\pi)^2+\theta\theta}+\frac{\beta(2\varphi+5\pi)}{(\varphi+\frac{5}{2}\pi)^2+\theta\theta}+\frac{\beta(2\varphi-7\pi)}{(\varphi-\frac{7}{2}\pi)^2+\theta\theta}+\text{etc.},$$

ubi notetur esse $\theta\theta=1{,}1263051$[1]).

18. Quoniam partes imaginariae commode se contrahi sunt passae, ut similis contractio in partibus realibus succedat, statuamus $\zeta=\frac{1}{2}\pi+\eta$ et ambae series ita se habebunt

$$\frac{\alpha}{\varphi-\frac{1}{2}\pi-\eta}+\frac{\alpha}{\varphi+\frac{3}{2}\pi-\eta}+\frac{\alpha}{\varphi-\frac{5}{2}\pi-\eta}+\frac{\alpha}{\varphi+\frac{7}{2}\pi-\eta}+\frac{\alpha}{\varphi-\frac{9}{2}\pi-\eta}+\text{etc.},$$

$$\frac{\alpha}{\varphi-\frac{1}{2}\pi+\eta}+\frac{\alpha}{\varphi+\frac{3}{2}\pi+\eta}+\frac{\alpha}{\varphi-\frac{5}{2}\pi+\eta}+\frac{\alpha}{\varphi+\frac{7}{2}\pi+\eta}+\frac{\alpha}{\varphi-\frac{9}{2}\pi+\eta}+\text{etc.}$$

Hic ergo cuilibet termino convenit quasi socius binisque contractis orietur sequens series

$$\frac{\alpha(2\varphi-\pi)}{(\varphi-\frac{1}{2}\pi)^2-\eta\eta}+\frac{\alpha(2\varphi+3\pi)}{(\varphi+\frac{3}{2}\pi)^2-\eta\eta}+\frac{\alpha(2\varphi-5\pi)}{(\varphi-\frac{5}{2}\pi)^2-\eta\eta}+\frac{\alpha(2\varphi+7\pi)}{(\varphi+\frac{7}{2}\pi)^2-\eta\eta}+\text{etc.},$$

ubi notetur, cum sit $\eta=\zeta-\frac{1}{2}\pi$, quoniam in partibus radii est $\zeta=0{,}6662405$, fore $\eta=-0{,}9045558$ ideoque $\eta\eta=0{,}8182214$, cum ante fuisset $\theta\theta=1{,}1263051$[1]).

19. Quae igitur hactenus sunt allata huc redeunt, ut fractio proposita $\frac{\sin.\varphi}{\text{tang.}\varphi-\cos.\varphi}$ aequetur binis sequentibus seriebus iunctim sumtis

$$\frac{\alpha(2\varphi-\pi)}{(\varphi-\frac{1}{2}\pi)^2-\eta\eta}+\frac{\alpha(2\varphi+3\pi)}{(\varphi+\frac{3}{2}\pi)^2-\eta\eta}+\frac{\alpha(2\varphi-5\pi)}{(\varphi-\frac{5}{2}\pi)^2-\eta\eta}+\frac{\alpha(2\varphi+7\pi)}{(\varphi+\frac{7}{2}\pi)^2-\eta\eta}+\text{etc.},$$

$$\frac{\beta(2\varphi+\pi)}{(\varphi+\frac{1}{2}\pi)^2+\theta\theta}+\frac{\beta(2\varphi-3\pi)}{(\varphi-\frac{3}{2}\pi)^2+\theta\theta}+\frac{\beta(2\varphi+5\pi)}{(\varphi+\frac{5}{2}\pi)^2+\theta\theta}+\frac{\beta(2\varphi-7\pi)}{(\varphi-\frac{7}{2}\pi)^2+\theta\theta}+\text{etc.}$$

1) Editio princeps: 0,5210210. Vide notam p. 377. Correxit P. St.

Hinc igitur sequitur, si sumatur $\varphi = 0$, quo casu fractio ipsa in nihilum abit, fore

$$0 = -\frac{4 \cdot 1 \alpha\pi}{\pi\pi - 4\eta\eta} + \frac{4 \cdot 3\, \alpha\pi}{9\pi\pi - 4\eta\eta} - \frac{4 \cdot 5\, \alpha\pi}{25\pi\pi - 4\eta\eta} + \frac{4 \cdot 7\, \alpha\pi}{49\pi\pi - 4\eta\eta} - \text{etc.}$$

$$+ \frac{4 \cdot 1\, \beta\pi}{\pi\pi + 4\theta\theta} - \frac{4 \cdot 3\, \beta\pi}{9\pi\pi + 4\theta\theta} + \frac{4 \cdot 5\, \beta\pi}{25\pi\pi + 4\theta\theta} - \frac{4 \cdot 7\, \beta\pi}{49\pi\pi + 4\theta\theta} + \text{etc.}$$

Ceterum hoc exemplum perquam idoneum est visum, quo applicatio ad factores imaginarios illustraretur.

ANALYSIS FACILIS ET PLANA AD EAS SERIES MAXIME ABSTRUSAS PERDUCENS QUIBUS OMNIUM AEQUATIONUM ALGEBRAICARUM NON SOLUM RADICES IPSAE SED ETIAM QUAEVIS EARUM POTESTATES EXPRIMI POSSUNT[1]

Conventui exhibita die 15. Aprilis 1776

Commentatio 631 indicis ENESTROEMIANI
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 4 (1786), 1789, p. 55—73
Summarium ibidem p. 112—114

SUMMARIUM

Feu M. LAMBERT avoit donné autrefois, dans le troisième volume des Acta Helvetica, p. 154, une série qui exprime la racine de l'équation trinomiale $ax^{\varkappa} + bx^{\lambda} = d$, dont la loi de progression est bien simple, mais qui est fondée en partie sur des inductions et dépourvue de toute démonstration.

Cette matière avoit fourni à feu M. EULER l'occasion de traiter le même sujet dans un mémoire[2]) inséré au XVe volume des *Nouveaux Commentaires*, où il a démontré que non seulement la racine d'une équation algébrique quelconque, mais aussi les puissances de cette racine peuvent être exprimées par de semblables séries. Dans le mémoire mentionné,

1) Confer hac cum dissertatione Commentationem 406 huius voluminis atque alias illas commentationes p. 263 laudatas. P. St.

2) C'est le mémoire 406 de ce volume. P. St.

intitulé *Observationes circa radices aequationum* l'illustre Géomètre cherche d'abord la série qui exprime la plus grande racine de l'équation

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2},$$

et il en déduit, par induction, celle pour l'équation

$$1 = \frac{A}{x^\lambda} + \frac{B}{x^\mu}.$$

De là il passe aux équations quadrinomes et enfin aux équations d'un nombre de termes quelconque.

Dans le présent mémoire l'Auteur traite le même sujet, mais d'une autre manière, et en partant d'un principe entièrement différent. Afin de donner une idée de cette méthode changeons l'équation mentionnée trinomiale en celle-ci

$$Z^n = Z^{n-\alpha} + CZ^{n-\beta}$$

et il est clair que la puissance n^{me} de la racine doit être exprimable par une série composée d'une infinité de termes, dont chacun est une certaine fonction de l'exposant n. En mettant donc

$$\begin{aligned} Z^n &= f^0:\ n + f':\ n + f'':\ n + \text{etc.},\\ Z^{n-\alpha} &= f^0:(n-\alpha) + f':(n-\alpha) + f'':(n-\alpha) + \text{etc.},\\ Z^{n-\beta} &= f^0:(n-\beta) + f':(n-\beta) + f'':(n-\beta) + \text{etc.} \end{aligned}$$

ces fonctions indéfinies devront être déterminées de manière que

$$\begin{aligned} f' : n - f' : (n-\alpha) &= Cf^0 : (n-\beta),\\ f'' : n - f'' : (n-\alpha) &= Cf' : (n-\beta),\\ f''' : n - f''' : (n-\alpha) &= Cf'' : (n-\beta) \end{aligned}$$

etc.

Moyennant ces équations on est en état de déterminer la fonction $f' : n$ de façon qu'elle satisfasse à la premiere équation; d'où l'on déduit la fonction $f' : (n-\beta)$, et de là, par la seconde équation, la fonction $f'' : n$, qui donne $f'' : (n-\beta)$, et ainsi on continue de procéder jusqu'à ce que la loi de progression devient évidente. Tout revient donc à trouver, par une fonction proposée de n, une autre fonction $\varphi : n$, de manière que

$$\varphi : n - \varphi : (n-\alpha) = N,$$

ce que l'auteur enseigne à effectuer dans une suite de Lemmes qui facilitent non seulement l'invention de la série pour la puissance n^{me} de la racine Z, mais qui sont en eux-mêmes très propres à répandre du jour sur la théorie des fonctions.

Après avoir trouvé de cette manière la série pour une puissance quelconque n de la racine de l'équation trinomiale, l'auteur applique sa méthode à une équation de quatre termes, et finit par montrer de quelle manière on peut s'en servir pour des équations polynomes quelconques.

Quant à la série de LAMBERT, qu'il nous soit permis de rappeler aux Géomètres un mémoire de feu M. EULER qui se trouve dans les Actes de l'Académie pour le second semestre de l'année 1779, où il a montré plusieurs propriétés remarquables dont cette série est douée.[1])

PROBLEMA

1. *Proposita aequatione algebraica tribus terminis constante, quam semper hac forma repraesentare licet*

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta},$$

invenire seriem, quae exprimat valorem ipsius x^n.

SOLUTIO

Haec aequatio ponendo $x = A^{\frac{1}{\alpha}} Z$ semper ad hanc formam simpliciorem revocari potest

$$1 = \frac{1}{Z^\alpha} + \frac{B}{A^{\frac{\beta}{\alpha}} Z^\beta},$$

unde ponendo $B = A^{\frac{\beta}{\alpha}} C$ erit

$$1 = \frac{1}{Z^\alpha} + \frac{C}{Z^\beta},$$

quae per Z^n multiplicata praebet

$$Z^n = Z^{n-\alpha} + CZ^{n-\beta};$$

hinc igitur quaeri oportet valorem potestatis Z^n, quandoquidem hinc erit

$$x^n = A^{\frac{n}{\alpha}} Z^n.$$

Manifestum autem est valorem ipsius Z^n exprimi debere per seriem, in quam

1) C'est le mémoire 532 de ce volume. P. St.

exponens n ingrediatur, quam ergo spectare licebit tamquam functionem ipsius n, et quia haec series ex infinitis terminis constabit, eam ita repraesentemus

$$Z^n = f^0 : n + f' : n + f'' : n + f''' : n + f'''' : n + \text{etc.},$$

quae ergo forma ita debet esse comparata, ut posito $n = 0$ fiat $Z^n = 1$; unde patet statui debere $f^0 : n = 1$, reliquos vero terminos factorem habere debere n, ut evanescant posito $n = 0$ prodeatque $Z^0 = 1$.

2. Constituta hac serie si loco n scribamus $n - \alpha$, habebimus

$$Z^{n-\alpha} = f^0 : (n-\alpha) + f' : (n-\alpha) + f'' : (n-\alpha) + f''' : (n-\alpha) + \text{etc.}$$

similique modo erit

$$Z^{n-\beta} = f^0 : (n-\beta) + f' : (n-\beta) + f'' : (n-\beta) + f''' : (n-\beta) + \text{etc.},$$

ubi iterum notetur esse $f^0 : (n-\alpha) = 1$ et $f^0 : (n-\beta) = 1$. Cum iam nostra aequatio sit $Z^n - Z^{n-\alpha} = CZ^{n-\beta}$, scribamus loco potestatum ipsius Z series assumtas sequenti modo

$$\begin{array}{llllll}
+\ Z^n & = + f^0 : n & +\ f' : n & +\ f'' : n & +\ f''' : n & + \text{etc.} \\
-\ Z^{n-\alpha} & = - f^0 : (n-\alpha) & -\ f' : (n-\alpha) & -\ f'' : (n-\alpha) & -\ f''' : (n-\alpha) & - \text{etc.} \\
\hline
= CZ^{n-\beta} = & Cf^0 : (n-\beta) & + Cf' : (n-\beta) & + Cf'' : (n-\beta) & + Cf''' : (n-\beta) & + \text{etc.}
\end{array}$$

Nunc functiones istae indefinitae ita determinentur, ut fiat

$$\begin{aligned}
\text{I.}\ & f' : n - f' : (n-\alpha) = Cf^0 : (n-\beta) = C, \\
\text{II.}\ & f'' : n - f'' : (n-\alpha) = Cf' : (n-\beta), \\
\text{III.}\ & f''' : n - f''' : (n-\alpha) = Cf'' : (n-\beta), \\
\text{IV.}\ & f'''' : n - f'''' : (n-\alpha) = Cf''' : (n-\beta) \\
& \text{etc.}
\end{aligned}$$

3. Ope harum aequationum ergo primo quaeri debet natura functionis $f' : n$, ut primae aequationi satisfiat; qua inventa innotescet functio $f' : (n - \beta)$ ex eaque per secundam aequationem quaeri debet indoles functionis $f'' : n$,

unde innotescet functio $f'' : (n-\beta)$; hincque porro simili modo ex aequatione tertia deducetur indoles functionis $f''' : n$ et ita porro, donec lex pateat, qua singulae hae functiones ulterius progrediuntur; unde patet resolutionem omnium harum aequationum revocari ad hanc quaestionem, qua proposita functione ipsius n quaeritur alia functio, veluti $\varphi : n$, ut fiat

$$\varphi : n - \varphi : (n-\alpha) = N,$$

quem in finem sequentia Lemmata evolvamus.

LEMMA 1

4. Si fuerit

$$\varphi : n = \varDelta n,$$

erit

$$\varphi : (n-\alpha) = \varDelta (n-\alpha)$$

ideoque

$$\varphi : n - \varphi : (n-\alpha) = \varDelta \alpha;$$

unde vicissim, si ponatur $\varDelta \alpha = k$, ut fieri debeat $\varphi : n - \varphi : (n-\alpha) = k$, reperietur

$$\varphi : n = \frac{kn}{\alpha}.$$

Quare, cum ex prima aequatione esse debeat $f' : n - f' : (n-\alpha) = C$, necesse est, ut sit $f' : n = \frac{Cn}{\alpha}$, unde pro secunda aequatione fiet

$$f' : (n-\beta) = \frac{C}{\alpha}(n-\beta).$$

LEMMA 2

5. Si fuerit

$$\varphi : n = \varDelta n(n+\alpha-v),$$

erit

$$\varphi : (n-\alpha) = \varDelta (n-\alpha)(n-v),$$

unde colligitur

$$\varphi : n - \varphi : (n-\alpha) = 2\varDelta \alpha\left(n - \tfrac{1}{2}v\right).$$

Quodsi ergo prodire debeat $\varphi : n - \varphi : (n-\alpha) = k(n-\lambda)$, ob $\varDelta = \frac{k}{2\alpha}$ et $v = 2\lambda$ erit

$$\varphi : n = \frac{kn}{2\alpha}(n+\alpha-2\lambda).$$

Quare, cum aequatio secunda iam sit

$$f'':n - f'':(n-\alpha) = Cf':(n-\beta) = \frac{CC}{\alpha}(n-\beta),$$

ob $k = \frac{CC}{\alpha}$ et $\lambda = \beta$ erit

$$f'':n = \frac{CC}{2\alpha\alpha}n(n+\alpha-2\beta),$$

unde pro tertia aequatione fiet

$$f'':(n-\beta) = \frac{CC}{2\alpha\alpha}(n-\beta)(n+\alpha-3\beta).$$

LEMMA 3

6. Si fuerit

$$\varphi:n = \varDelta n(n+\alpha-v)(n+2\alpha-v),$$

erit

$$\varphi:(n-\alpha) = \varDelta(n-\alpha)(n-v)(n+\alpha-v);$$

hinc ergo fit

$$\varphi:n - \varphi:(n-\alpha) = 3\varDelta\alpha(n+\alpha-v)\left(n-\tfrac{1}{3}v\right),$$

unde vicissim posito $3\varDelta\alpha = k$ et $\frac{1}{3}v = \lambda$, ut prodeat $k(n+\alpha-3\lambda)(n-\lambda)$, sumi debet

$$\varphi:n = \frac{kn}{3\alpha}(n+\alpha-3\lambda)(n+2\alpha-3\lambda).$$

Quia nunc pro nostra aequatione tertia fieri debet

$$f''':n - f''':(n-\alpha) = \frac{C^3}{2\alpha\alpha}(n-\beta)(n+\alpha-3\beta),$$

facta applicatione fiet $k = \frac{C^3}{2\alpha\alpha}$ et $\lambda = \beta$ hincque concluditur fore

$$f''':n = \frac{C^3}{6\alpha^3}n(n+\alpha-3\beta)(n+2\alpha-3\beta),$$

unde pro aequatione sequente habebimus

$$f''':(n-\beta) = \frac{C^3}{6\alpha^3}(n-\beta)(n+\alpha-4\beta)(n+2\alpha-4\beta).$$

LEMMA 4

7. Si fuerit

$$\varphi : n = \varDelta n(n+\alpha-v)(n+2\alpha-v)(n+3\alpha-v),$$

erit

$$\varphi : (n-\alpha) = \varDelta(n-\alpha)(n-v)(n+\alpha-v)(n+2\alpha-v)$$

hincque

$$\varphi : n - \varphi : (n-\alpha) = 4\varDelta\alpha(n+\alpha-v)(n+2\alpha-v)\left(n-\tfrac{1}{4}v\right).$$

Quare si debeat esse $\varphi : n - \varphi : (n-\alpha) = k(n-\lambda)(n+\alpha-4\lambda)(n+2\alpha-4\lambda)$, sumi debet $\varDelta = \frac{k}{4\alpha}$ et $v = 4\lambda$ hincque fiet

$$\varphi : n = \frac{kn}{4\alpha}(n+\alpha-4\lambda)(n+2\alpha-4\lambda)(n+3\alpha-4\lambda).$$

Quare, cum aequatio nostra quarta sit

$$f'''' : n - f'''' : (n-\alpha) = \frac{C^4}{6\alpha^3}(n-\beta)(n+\alpha-4\beta)(n+2\alpha-4\beta),$$

facta applicatione fiet $k = \frac{C^4}{6\alpha^3}$ et $\lambda = \beta$ hincque concluditur fore

$$f'''' : n = \frac{C^4}{24\alpha^4} n(n+\alpha-4\beta)(n+2\alpha-4\beta)(n+3\alpha-4\beta),$$

unde pro quinta aequatione nanciscemur

$$f''''' : (n-\beta) = \frac{C^4}{24\alpha^4}(n-\beta)(n+\alpha-5\beta)(n+2\alpha-5\beta)(n+3\alpha-5\beta).$$

LEMMA 5

8. Si fuerit

$$\varphi : n = \varDelta n(n+\alpha-v)(n+2\alpha-v)(n+3\alpha-v)(n+4\alpha-v),$$

erit

$$\varphi : (n-\alpha) = \varDelta(n-\alpha)(n-v)(n+\alpha-v)(n+2\alpha-v)(n+3\alpha-v)$$

hincque

$$\varphi : n - \varphi : (n-\alpha) = 5\varDelta\alpha(n+\alpha-v)(n+2\alpha-v)(n+3\alpha-v)\left(n-\tfrac{1}{5}v\right).$$

Quare si debeat esse

$$\varphi : n - \varphi : (n - \alpha) = k(n - \lambda)(n + \alpha - 5\lambda)(n + 2\alpha - 5\lambda)(n + 3\alpha - 5\lambda),$$

sumi debet $\varDelta = \frac{k}{5\alpha}$ et $5\lambda = v$; tum vero erit

$$\varphi : n = \frac{k}{5\alpha} n(n + \alpha - 5\lambda)(n + 2\alpha - 5\lambda)(n + 3\alpha - 5\lambda)(n + 4\alpha - 5\lambda).$$

Aequatio autem quinta cum ita se habeat

$$f''''' : n - f''''' : (n - \alpha) = \frac{C^5}{24\alpha^4}(n - \beta)(n + \alpha - 5\beta)(n + 2\alpha - 5\beta)(n + 3\alpha - 5\beta),$$

hic sumi debet $k = \frac{C^5}{24\alpha^4}$ et $\lambda = \beta$, unde concluditur

$$f''''' : n = \frac{C^5}{120\alpha^5} n(n + \alpha - 5\beta)(n + 2\alpha - 5\beta)(n + 3\alpha - 5\beta)(n + 4\alpha - 5\beta).$$

Hinc iam sine ulteriore calculo concludere licet fore

$$f^{\text{VI}} : n = \frac{C^6}{720\alpha^6} n(n + \alpha - 6\beta)(n + 2\alpha - 6\beta)(n + 3\alpha - 6\beta) \times (n + 4\alpha - 6\beta)(n + 5\alpha - 6\beta)$$

et

$$f^{\text{VII}} : n = \frac{C^7}{5040\alpha^7} n(n + \alpha - 7\beta)(n + 2\alpha - 7\beta)(n + 3\alpha - 7\beta) \times (n + 4\alpha - 7\beta)(n + 5\alpha - 7\beta)(n + 6\alpha - 7\beta).$$

CONCLUSIO FINALIS

9. His igitur colligendis si aequatio proposita fuerit $1 = \frac{1}{Z^\alpha} + \frac{C}{Z^\beta}$, tum pro potestate quacumque ipsius Z sequens resultat series

$$Z^n = 1 + \frac{C}{\alpha} n + \frac{CC}{2\alpha\alpha} n(n + \alpha - 2\beta) + \frac{C^3}{6\alpha^3} n(n + \alpha - 3\beta)(n + 2\alpha - 3\beta)$$
$$+ \frac{C^4}{24\alpha^4} n(n + \alpha - 4\beta)(n + 2\alpha - 4\beta)(n + 3\alpha - 4\beta)$$
$$+ \frac{C^5}{120\alpha^5} n(n + \alpha - 5\beta)(n + 2\alpha - 5\beta)(n + 3\alpha - 5\beta)(n + 4\alpha - 5\beta) + \text{etc.}$$

SCHOLION

10. Haec series, quam eruimus, eo magis est notatu digna, quod nulla alia via patet eam inveniendi. Quin etiam analysis nostra ita est comparata, ut veritas solutionis non solum ad omnes exponentes integros n, sed etiam ad quosvis valores fractos atque adeo negativos extendatur. Praeterea vero etiam ex nostra serie generali logarithmus hyperbolicus ipsius Z exprimi potest. Cum enim semper casu $n=0$ sit

$$\frac{Z^n-1}{n}=lZ,$$

erit nostro casu

$$lZ=\frac{C}{\alpha}+\frac{CC}{2\alpha^2}(\alpha-2\beta)+\frac{C^3}{6\alpha^3}(\alpha-3\beta)(2\alpha-3\beta)$$
$$+\frac{C^4}{24\alpha^4}(\alpha-4\beta)(2\alpha-4\beta)(3\alpha-4\beta)$$
$$+\frac{C^5}{120\alpha^5}(\alpha-5\beta)(2\alpha-5\beta)(3\alpha-5\beta)(4\alpha-5\beta)+\text{etc.}$$

Unde si tota haec series designetur littera $\varDelta$, ut sit $lZ=\varDelta$, erit $Z=e^{\varDelta}$ ideoque

$$Z^n=e^{n\varDelta},$$

quae ergo quantitas aequalis erit seriei supra inventae pro Z^n. At vero ista expressio $e^{n\varDelta}$ in seriem evoluta praebet

$$Z^n=1+n\varDelta+\frac{1}{2}nn\varDelta^2+\frac{1}{6}n^3\varDelta^3+\frac{1}{24}n^4\varDelta^4+\frac{1}{120}n^5\varDelta^5+\text{etc.},$$

quae ergo series seriei supra inventae necessario erit aequalis, id quod etiam comprobabitur, dum saltem priores termini evolventur. Cum enim sit

$$\varDelta=\frac{C}{\alpha}+\frac{CC}{2\alpha^2}(\alpha-2\beta)+\frac{C^3}{6\alpha^3}(\alpha-3\beta)(2\alpha-3\beta)+\text{etc.},$$

erit

$$\varDelta^2=\frac{CC}{\alpha^2}+\frac{C^3}{\alpha^3}(\alpha-2\beta)+\text{etc.},$$

$$\varDelta^3=\frac{C^3}{\alpha^3}+\text{etc.},$$

unde deducimus

$$Z^n = 1 + \frac{C}{\alpha} n + \frac{CC}{2\alpha\alpha} n(\alpha - 2\beta) + \frac{C^3}{6\alpha^3} n(\alpha - 3\beta)(2\alpha - 3\beta) + \text{etc.}$$
$$+ \frac{CC}{2\alpha\alpha} nn \qquad + \frac{C^3}{2\alpha^3} nn(\alpha - 2\beta) + \text{etc.}$$
$$+ \frac{C^3}{6\alpha^3} n^3 + \text{etc.}$$

sive

$$Z^n = 1 + \frac{C}{\alpha} n + \frac{CC}{2\alpha\alpha} n(n + \alpha - 2\beta)$$
$$+ \frac{C^3}{6\alpha^3} \big(n(\alpha - 3\beta)(2\alpha - 3\beta) + nn(n + 3\alpha - 6\beta)\big) + \text{etc.},$$

quod cum serie pro Z^n supra inventa perfecte congruit.

THEOREMA GENERALE

11. *Quodsi ergo proposita fuerit aequatio initio commemorata*

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta},$$

quoniam posuimus

$$Z = \frac{x}{A^{\frac{1}{\alpha}}} \quad et \quad C = \frac{B}{A^{\frac{\beta}{\alpha}}},$$

erit

$$\frac{x^n}{A^{\frac{n}{\alpha}}} = 1 + \frac{B}{A^{\frac{\beta}{\alpha}}} \cdot \frac{n}{\alpha} + \frac{B^2}{A^{\frac{2\beta}{\alpha}}} \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - 2\beta}{2\alpha} + \frac{B^3}{A^{\frac{3\beta}{\alpha}}} \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - 3\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n + 2\alpha - 3\beta}{3\alpha}$$
$$+ \frac{B^4}{A^{\frac{4\beta}{\alpha}}} \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - 4\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n + 2\alpha - 4\beta}{3\alpha} \cdot \frac{n + 3\alpha - 4\beta}{4\alpha} + \text{etc.}$$

sive

$$x^n = A^{\frac{n}{\alpha}} + A^{\frac{n-\beta}{\alpha}} B \cdot \frac{n}{\alpha} + A^{\frac{n-2\beta}{\alpha}} B^2 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - 2\beta}{2\alpha}$$
$$+ A^{\frac{n-3\beta}{\alpha}} B^3 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - 3\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n + 2\alpha - 3\beta}{3\alpha}$$
$$+ A^{\frac{n-4\beta}{\alpha}} B^4 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - 4\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n + 2\alpha - 4\beta}{3\alpha} \cdot \frac{n + 3\alpha - 4\beta}{4\alpha}$$
$$+ A^{\frac{n-5\beta}{\alpha}} B^5 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - 5\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n + 2\alpha - 5\beta}{3\alpha} \cdot \frac{n + 3\alpha - 5\beta}{4\alpha} \cdot \frac{n + 4\alpha - 5\beta}{5\alpha} + \text{etc.}$$

Vicissim igitur proposita hac serie eius summa erit $= x^n$ *existente* x *radice huius aequationis*

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta},$$

id quod aliquot exemplis illustrare liceat.

EXEMPLUM 1

12. Statuamus $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, ut proposita sit ista aequatio

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x},$$

unde fit $x = A + B$, consequenter

$$x^n = (A+B)^n;$$

series autem inventa hoc casu nobis dat

$$(A+B)^n = A^n + \frac{n}{1} A^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A^{n-2} B^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A^{n-3} B^3 + \text{etc.},$$

quae est ipsa evolutio binomii NEUTONIANA, quam nunc patet veram esse, quicumque numerus pro exponente n accipiatur, sive integer sive fractus, sive positivus sive negativus, sive etiam surdus; cum in Algebra communi, ubi haec evolutio est tractata, exponens n necessario sit integer positivus.[1])

EXEMPLUM 2

13. Ponamus ut ante $\alpha = 1$, at sumatur $\beta = 0$, ita ut sit

$$1 = \frac{A}{x} + B,$$

unde fit $x = \frac{A}{1-B}$, consequenter

$$x^n = \frac{A^n}{(1-B)^n} = A^n (1-B)^{-n};$$

1) De evolutione potestatum binomii vide etiam Commentationes 465 et 637 (indicis ENESTROEMIANI): *Demonstratio theorematis* NEUTONIANI *de evolutione potestatum binomii pro casibus, quibus exponentes non sunt numeri integri,* Novi comment. acad. sc. Petrop. **19** (1774), 1775, p. 103, et *Nova demonstratio, quod evolutio potestatum binomii* NEUTONIANA *etiam pro exponentibus fractis valeat,* Nova acta acad. sc. Petrop. **5** (1787), 1789, p. 52; LEONHARDI EULERI *Opera omnia,* series I, vol. **14** et **15**. P. St.

series autem, ad quam sumus perducti, hoc casu erit

$$A^n(1-B)^{-n} = A^n + \frac{n}{1}A^nB + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}A^nB^2 + \text{etc.}$$

sive

$$(1-B)^{-n} = 1 + \frac{n}{1}B + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}B^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}B^3 + \text{etc.},$$

quae est demonstratio eiusdem theorematis NEUTONIANI pro exponentibus negativis.

EXEMPLUM 3

14. Sumamus $A = 2a$ et $B = b$ sitque porro $\alpha = 1$ et $\beta = 2$, ut nostra aequatio fiat

$$1 = \frac{2a}{x} + \frac{b}{xx}$$

sive $xx = 2ax + b$, unde fit

$$x = a + \sqrt{(aa+b)},$$

quo valore substituto series ante inventa praebebit

$$(a+\sqrt{aa+b})^n = 2^na^n + \frac{n}{1}2^{n-2}a^{n-2}b + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}2^{n-4}a^{n-4}bb$$
$$+ \frac{n(n-5)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3}2^{n-6}a^{n-6}b^3 + \frac{n(n-7)(n-6)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2^{n-8}a^{n-8}b^4 + \text{etc.},$$

cuius veritas pro casu, quo $n = 1$, ex evolutione vulgari confirmari potest. Sumto enim $n = 1$ erit

$$a + \sqrt{aa+b} = 2a + \frac{b}{2a} - \frac{bb}{2^3a^3} + \frac{b^3}{2^4a^5} - \frac{5b^4}{2^7a^7} + \frac{7b^5}{2^8a^9} - \text{etc.};$$

novimus autem ex resolutione vulgari esse

$$\sqrt{(aa+b)} = a + \frac{b}{2a} - \frac{1\cdot 1\,bb}{2\cdot 4\,a^3} + \frac{1\cdot 1\cdot 3\,b^3}{2\cdot 4\cdot 6\,a^5} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\,b^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\,a^7} + \text{etc.};$$

cui si addatur a, ipsa illa series prodit.

EXEMPLUM 4

15. Sumamus $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, ut sit

$$1 = \frac{A}{xx} + \frac{B}{x}$$

sive $xx = A + Bx$ ideoque

$$x = \frac{B + \sqrt{(BB + 4A)}}{2};$$

loco A autem scribamus aa et $2b$ loco B, ut sit

$$x = b + \sqrt{(bb + aa)},$$

quocirca series inventa nobis dabit

$$(b + \sqrt{bb + aa})^n = a^n + \frac{n}{2} a^{n-1} \cdot 2b + \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{4} a^{n-2} \cdot 4bb$$

$$+ \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{4} \cdot \frac{n+1}{6} a^{n-3} \cdot 8b^3 + \frac{n}{2} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n}{6} \cdot \frac{n+2}{8} a^{n-4} \cdot 16b^4 + \text{etc.},$$

quae reducitur ad hanc formam

$$(b + \sqrt{bb + aa})^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} a^{n-2} bb$$

$$+ \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{3} a^{n-3} b^3 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n}{3} \cdot \frac{n+2}{4} a^{n-4} b^4 + \text{etc.};$$

haec autem forma ulterius reducetur ad hanc

$$(b + \sqrt{bb + aa})^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{nn}{1 \cdot 2} a^{n-2} bb$$

$$+ \frac{n(nn-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \frac{nn(nn-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4 + \frac{n(nn-1)(nn-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5} b^5$$

$$+ \frac{nn(nn-4)(nn-16)}{1 \cdot 2 \cdots 6} a^{n-6} b^6 + \frac{n(nn-1)(nn-9)(nn-25)}{1 \cdot 2 \cdots 7} a^{n-7} b^7 + \text{etc.}$$

Ita, si sumamus $n = 1$, habebimus

$$b + \sqrt{bb + aa} = a + b + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{bb}{a} - \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{b^4}{a^3} + \frac{3 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdots 6} \cdot \frac{b^6}{a^5} - \text{etc.};$$

novimus autem esse

$$\sqrt{bb+aa} = a + \frac{1}{2}\cdot\frac{bb}{a} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{b^4}{a^3} + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{b^6}{a^5} - \text{etc.};$$

cui si addatur b, ipsa illa series prodit.

EXEMPLUM 5

16. Sumamus $\alpha = 1$ et $\beta = -1$, ut nostra aequatio sit

$$1 = \frac{A}{x} + Bx,$$

unde fit

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4AB}}{2B};$$

hinc ergo prodit

$$\left(\frac{1\pm\sqrt{(1-4AB)}}{2B}\right)^n = A^n + \frac{n}{1}A^{n+1}B + \frac{n(n+3)}{1\cdot 2}A^{n+2}B^2 + \frac{n(n+4)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n+3}B^3$$
$$+ \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A^{n+4}B^4 + \frac{n(n+6)(n+7)(n+8)(n+9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}A^{n+5}B^5 + \text{etc.}$$

Hinc ergo, si sumamus $n = 1$, erit

$$\frac{1\pm\sqrt{(1-4AB)}}{2B} = A + A^2B + \frac{4}{2}A^3B^2 + \frac{5\cdot 6}{2\cdot 3}A^4B^3 + \frac{6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4}A^5B^4$$
$$+ \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}A^6B^5 + \text{etc.}$$

Est vero

$$\sqrt{(1-4AB)} = 1 - 2AB - 2A^2B^2 - 4A^3B^3 - 2\cdot 5A^4B^4 - \text{etc.};$$

quae series ab unitate subtracta et per $2B$ divisa praebet seriem modo inventam.

SCHOLION

17. Series autem generalis, quam supra elicuimus, primum ab acutissimo LAMBERTO ex principiis maxime diversis est inventa, quam idcirco LAMBERTINAM appellare liceat, propterea quod inter egregia huius viri inventa merito est referenda. Methodus autem, qua hic usi sumus, ad aequationes multo generaliores extendi potest, quando scilicet aequatio proposita quatuor pluresve terminos continet; id quod pro casu quatuor terminorum ostendisse operae erit pretium.

EXEMPLUM 4

15. Sumamus $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, ut sit

$$1 = \frac{A}{xx} + \frac{B}{x}$$

sive $xx = A + Bx$ ideoque

$$x = \frac{B + \sqrt{(BB + 4A)}}{2};$$

loco A autem scribamus aa et $2b$ loco B, ut sit

$$x = b + \sqrt{(bb + aa)},$$

quocirca series inventa nobis dabit

$$(b + \sqrt{bb + aa})^n = a^n + \frac{n}{2} a^{n-1} \cdot 2b + \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{4} a^{n-2} \cdot 4bb$$
$$+ \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{4} \cdot \frac{n+1}{6} a^{n-3} \cdot 8b^3 + \frac{n}{2} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n}{6} \cdot \frac{n+2}{8} a^{n-4} \cdot 16b^4 + \text{etc.},$$

quae reducitur ad hanc formam

$$(b + \sqrt{bb + aa})^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} a^{n-2} bb$$
$$+ \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{3} a^{n-3} b^3 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n}{3} \cdot \frac{n+2}{4} a^{n-4} b^4 + \text{etc.};$$

haec autem forma ulterius reducetur ad hanc

$$(b + \sqrt{bb + aa})^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{nn}{1 \cdot 2} a^{n-2} bb$$
$$+ \frac{n(nn-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \frac{nn(nn-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4 + \frac{n(nn-1)(nn-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5} b^5$$
$$+ \frac{nn(nn-4)(nn-16)}{1 \cdot 2 \cdots 6} a^{n-6} b^6 + \frac{n(nn-1)(nn-9)(nn-25)}{1 \cdot 2 \cdots 7} a^{n-7} b^7 + \text{etc.}$$

Ita, si sumamus $n = 1$, habebimus

$$b + \sqrt{bb + aa} = a + b + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{bb}{a} - \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{b^4}{a^3} + \frac{3 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdots 6} \cdot \frac{b^6}{a^5} - \text{etc.};$$

novimus autem esse

$$\sqrt{bb+aa} = a + \frac{1}{2} \cdot \frac{bb}{a} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{b^4}{a^3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{b^6}{a^5} - \text{etc.};$$

cui si addatur b, ipsa illa series prodit.

EXEMPLUM 5

16. Sumamus $\alpha = 1$ et $\beta = -1$, ut nostra aequatio sit

$$1 = \frac{A}{x} + Bx,$$

unde fit

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4AB}}{2B};$$

hinc ergo prodit

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{(1-4AB)}}{2B}\right)^n = A^n + \frac{n}{1} A^{n+1} B + \frac{n(n+3)}{1 \cdot 2} A^{n+2} B^2 + \frac{n(n+4)(n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A^{n+3} B^3$$
$$+ \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} A^{n+4} B^4 + \frac{n(n+6)(n+7)(n+8)(n+9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} A^{n+5} B^5 + \text{etc.}$$

Hinc ergo, si sumamus $n = 1$, erit

$$\frac{1 \pm \sqrt{(1-4AB)}}{2B} = A + A^2 B + \frac{4}{2} A^3 B^2 + \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 3} A^4 B^3 + \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} A^5 B^4$$
$$+ \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} A^6 B^5 + \text{etc.}$$

Est vero

$$\sqrt{(1-4AB)} = 1 - 2AB - 2A^2B^2 - 4A^3B^3 - 2 \cdot 5 A^4 B^4 - \text{etc.};$$

quae series ab unitate subtracta et per $2B$ divisa praebet seriem modo inventam.

SCHOLION

17. Series autem generalis, quam supra elicuimus, primum ab acutissimo LAMBERTO ex principiis maxime diversis est inventa, quam idcirco LAMBERTINAM appellare liceat, propterea quod inter egregia huius viri inventa merito est referenda. Methodus autem, qua hic usi sumus, ad aequationes multo generaliores extendi potest, quando scilicet aequatio proposita quatuor pluresve terminos continet; id quod pro casu quatuor terminorum ostendisse operae erit pretium.

PROBLEMA GENERALIUS

18. *Si proposita fuerit aequatio algebraica huius formae*

$$1 - \frac{1}{Z^\alpha} = \frac{B}{Z^\beta} + \frac{C}{Z^\gamma},$$

invenire seriem, quae valorem potestatis cuiuscumque ipsius Z, puta Z^n, exprimat.

SOLUTIO

Multiplicetur aequatio proposita per Z^n, ut habeatur

$$Z^n - Z^{n-\alpha} = BZ^{n-\beta} + CZ^{n-\gamma},$$

et potestatem quaesitam Z^n ut ante tamquam functionem ipsius n spectare licebit, quae per partes continuo procedentes ita repraesentetur, ut sit

$$Z^n = f^0 : n + f' : n + f'' : n + f''' : n + f'''' : n + \text{etc.}$$

Ubi, cum sumto $n = 0$ fieri debeat $Z^n = 1$, sit perpetuo $f^0 : n = 1$; tum vero ut reliquae partes casu $n = 0$ evanescant, singulas factorem n habere necesse est. Hinc ergo erit

$$Z^{n-\alpha} = f^0 : (n-\alpha) + f' : (n-\alpha) + f'' : (n-\alpha) + \text{etc.},$$
$$Z^{n-\beta} = f^0 : (n-\beta) + f' : (n-\beta) + f'' : (n-\beta) + \text{etc.},$$
$$Z^{n-\gamma} = f^0 : (n-\gamma) + f' : (n-\gamma) + f'' : (n-\gamma) + \text{etc.}$$

Iam istae series loco harum potestatum in nostra aequatione substituantur, et cum partes in membro sinistro sponte se tollant, reliquae partes sinistrae partibus antecedentibus in dextro membro aequari debebunt, unde sequentes aequationes resultabunt:

$$\text{I. } f' : n - f' : (n-\alpha) = Bf^0 : (n-\beta) + Cf^0 : (n-\gamma) = B + C,$$
$$\text{II. } f'' : n - f'' : (n-\alpha) = Bf' : (n-\beta) + Cf' : (n-\gamma),$$
$$\text{III. } f''' : n - f''' : (n-\alpha) = Bf'' : (n-\beta) + Cf'' : (n-\gamma),$$
$$\text{IV. } f'''' : n - f'''' : (n-\alpha) = Bf''' : (n-\beta) + Cf''' : (n-\gamma)$$

etc.

19. In subsidium iam vocemus lemmata supra allata, ex quibus constat fore, ut sequitur:

I. Si fuerit $\varphi : n - \varphi : (n - \alpha) = k$, erit

$$\varphi : n = \frac{kn}{\alpha}.$$

II. Si fuerit $\varphi : n - \varphi : (n - \alpha) = k(n - \lambda)$, erit

$$\varphi : n = \frac{kn}{2\alpha}(n + \alpha - 2\lambda).$$

III. Si fuerit $\varphi : n - \varphi : (n - \alpha) = k(n - \lambda)(n + \alpha - 3\lambda)$, erit

$$\varphi : n = \frac{kn}{3\alpha}(n + \alpha - 3\lambda)(n + 2\alpha - 3\lambda).$$

IV. Si fuerit $\varphi : n - \varphi : (n - \alpha) = k(n - \lambda)(n + \alpha - 4\lambda)(n + 2\alpha - 4\lambda)$, erit

$$\varphi : n = \frac{kn}{4\alpha}(n + \alpha - 4\lambda)(n + 2\alpha - 4\lambda)(n + 3\alpha - 4\lambda).$$

V. Si fuerit $\varphi : n - \varphi : (n - \alpha) = k(n - \lambda)(n + \alpha - 5\lambda)(n + 2\alpha - 5\lambda)(n + 3\alpha - 5\lambda)$, erit

$$\varphi : n = \frac{kn}{5\alpha}(n + \alpha - 5\lambda)(n + 2\alpha - 5\lambda)(n + 3\alpha - 5\lambda)(n + 4\alpha - 5\lambda);$$

et ita porro.

20. Horum lemmatum ope ex prima aequatione, ubi pro lemmate primo est $k = B + C$, elicimus

$$f' : n = \frac{Bn}{\alpha} + \frac{Cn}{\alpha};$$

hinc igitur pro secunda aequatione erit

$$Bf' : (n - \beta) = B^2 \frac{n - \beta}{\alpha} + BC \frac{n - \beta}{\alpha}$$

et

$$Cf' : (n - \gamma) = C^2 \frac{n - \gamma}{\alpha} + BC \frac{n - \gamma}{\alpha}$$

$$\text{Summa} = \frac{BB(n - \beta)}{\alpha} + \frac{2BC}{\alpha}\left(n - \frac{\beta + \gamma}{2}\right) + \frac{CC}{\alpha}(n - \gamma);$$

quae formula quia ex tribus constat partibus, singulas cum lemmate secundo conferri oportet ac pro prima parte erit $k=\frac{BB}{\alpha}$ et $\lambda=\beta$, pro secunda parte est $k=\frac{2BC}{\alpha}$ et $\lambda=\frac{\beta+\gamma}{2}$, pro tertia parte est $k=\frac{CC}{\alpha}$ et $\lambda=\gamma$, unde ex omnibus simul sumtis colligitur

$$f'':n=\frac{BB}{2\alpha^2}n(n+\alpha-2\beta)+\frac{2BC}{2\alpha^2}n(n+\alpha-\beta-\gamma)+\frac{CC}{2\alpha^2}n(n+\alpha-2\gamma).$$

21. Progrediamur iam ad aequationem tertiam ac pro eius membro dextro habebimus

$$Bf'':(n-\beta)=\frac{B^3}{2\alpha^2}(n-\beta)(n+\alpha-3\beta)+\frac{2BBC}{2\alpha^2}(n-\beta)(n+\alpha-2\beta-\gamma)$$
$$+\frac{BCC}{2\alpha^2}(n-\beta)(n+\alpha-\beta-2\gamma),$$

$$Cf'':(n-\gamma)=\frac{C^3}{2\alpha^2}(n-\gamma)(n+\alpha-3\gamma)+\frac{BBC}{2\alpha^2}(n-\gamma)(n+\alpha-2\beta-\gamma)$$
$$+\frac{2BCC}{2\alpha^2}(n-\gamma)(n+\alpha-\beta-2\gamma)$$

$$\text{Summa}=\frac{B^3}{2\alpha^2}(n-\beta)(n+\alpha-3\beta)+\frac{3BBC}{2\alpha^2}(n+\alpha-2\beta-\gamma)\left(n-\frac{2\beta+\gamma}{3}\right)$$
$$+\frac{3BCC}{2\alpha^2}(n+\alpha-\beta-2\gamma)\left(n-\frac{\beta+2\gamma}{3}\right)+\frac{C^3}{2\alpha^2}(n-\gamma)(n+\alpha-3\gamma);$$

quae quia quatuor constat partibus cum lemmate tertio conferendis, pro prima parte erit $k=\frac{B^3}{2\alpha^2}$ et $\lambda=\beta$, pro secunda parte erit $k=\frac{3BBC}{2\alpha^2}$ et $\lambda=\frac{2\beta+\gamma}{3}$, pro tertia vero parte est $k=\frac{3BCC}{2\alpha^2}$ et $\lambda=\frac{\beta+2\gamma}{3}$, denique pro quarta parte est $k=\frac{C^3}{2\alpha^2}$ et $\lambda=\gamma$, quibus observatis functio quaesita f''' itidem ex quatuor partibus constabit, quae sunt

$$f''':n=\frac{B^3}{6\alpha^3}n(n+\alpha-3\beta)(n+2\alpha-3\beta)$$
$$+\frac{3BBC}{6\alpha^3}n(n+\alpha-2\beta-\gamma)(n+2\alpha-2\beta-\gamma)$$
$$+\frac{3BCC}{6\alpha^3}n(n+\alpha-\beta-2\gamma)(n+2\alpha-\beta-2\gamma)$$
$$+\frac{C^3}{6\alpha^3}n(n+\alpha-3\gamma)(n+2\alpha-3\gamma).$$

22. Tractemus simili modo aequationem quartam atque ex valore $f''':n$ invento habebimus

$$\begin{aligned}Bf''':(n-\beta) &= \frac{B^4}{6\alpha^3}(n-\beta)(n+\alpha-4\beta)(n+2\alpha-4\beta)\\ &+\frac{3B^3C}{6\alpha^3}(n-\beta)(n+\alpha-3\beta-\gamma)(n+2\alpha-3\beta-\gamma)\\ &+\frac{3B^2C^2}{6\alpha^3}(n-\beta)(n+\alpha-2\beta-2\gamma)(n+2\alpha-2\beta-2\gamma)\\ &+\frac{BC^3}{6\alpha^3}(n-\beta)(n+\alpha-\beta-3\gamma)(n+2\alpha-\beta-3\gamma),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Cf''':(n-\gamma) &= \frac{B^3C}{6\alpha^3}(n-\gamma)(n+\alpha-3\beta-\gamma)(n+2\alpha-3\beta-\gamma)\\ &+\frac{3B^2C^2}{6\alpha^3}(n-\gamma)(n+\alpha-2\beta-2\gamma)(n+2\alpha-2\beta-2\gamma)\\ &+\frac{3BC^3}{6\alpha^3}(n-\gamma)(n+\alpha-\beta-3\gamma)(n+2\alpha-\beta-3\gamma)\\ &+\frac{C^4}{6\alpha^3}(n-\gamma)(n+\alpha-4\gamma)(n+2\alpha-4\gamma).\end{aligned}$$

His iam terminis collectis valor formulae

$$Bf''':(n-\beta)+Cf''':(n-\gamma)$$

constabit sequentibus quinque partibus

$$\begin{aligned}&\frac{B^4}{6\alpha^3}(n-\beta)(n+\alpha-4\beta)(n+2\alpha-4\beta)\\ &+\frac{4B^3C}{6\alpha^3}\left(n-\frac{3\beta+\gamma}{4}\right)(n+\alpha-3\beta-\gamma)(n+2\alpha-3\beta-\gamma)\\ &+\frac{6B^2C^2}{6\alpha^3}\left(n-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)(n+\alpha-2\beta-2\gamma)(n+2\alpha-2\beta-2\gamma)\\ &+\frac{4BC^3}{6\alpha^3}\left(n-\frac{\beta+3\gamma}{4}\right)(n+\alpha-\beta-3\gamma)(n+2\alpha-\beta-3\gamma)\\ &+\frac{C^4}{6\alpha^3}(n-\gamma)(n+\alpha-4\gamma)(n+2\alpha-4\gamma).\end{aligned}$$

23. Quoniam igitur functio quaesita $f^{\text{IV}}:n$ ex quinque partibus componitur, singulas cum lemmate quarto comparari oportebit ac pro parte prima erit $k=\frac{B^4}{6\alpha^3}$ et $\lambda=\beta$, pro parte secunda est $k=\frac{4B^3C}{6\alpha^3}$ et $\lambda=\frac{3\beta+\gamma}{4}$, pro

parte tertia $k = \frac{6B^2C^2}{6\alpha^3}$ et $\lambda = \frac{\beta+\gamma}{2}$, pro parte quarta est $k = \frac{4BC^3}{6\alpha^3}$ et $\lambda = \frac{\beta+3\gamma}{4}$, denique pro parte quinta erit $k = \frac{C^4}{6\alpha^3}$ et $\lambda = \gamma$; unde collectis omnibus terminis reperietur

$$\begin{aligned} f^{\mathrm{IV}}: n = & \frac{B^4}{24\alpha^4}\, n(n+\alpha-4\beta)(n+2\alpha-4\beta)(n+3\alpha-4\beta) \\ & + \frac{4B^3C}{24\alpha^4}\, n(n+\alpha-3\beta-\gamma)(n+2\alpha-3\beta-\gamma)(n+3\alpha-3\beta-\gamma) \\ & + \frac{6B^2C^2}{24\alpha^4}\, n(n+\alpha-2\beta-2\gamma)(n+2\alpha-2\beta-2\gamma)(n+3\alpha-2\beta-2\gamma) \\ & + \frac{4BC^3}{24\alpha^4}\, n(n+\alpha-\beta-3\gamma)(n+2\alpha-\beta-3\gamma)(n+3\alpha-\beta-3\gamma) \\ & + \frac{C^4}{24\alpha^4}\, n(n+\alpha-4\gamma)(n+2\alpha-4\gamma)(n+3\alpha-4\gamma). \end{aligned}$$

24. Superfluum foret hos calculos ulterius prosequi, quandoquidem ex allatis iam tuto concludere licet sequentem functionem $f^{\mathrm{V}}: n$ hunc habituram esse valorem

$$\begin{aligned} f^{\mathrm{V}}: n = & \frac{B^5}{120\alpha^5} n(n+\alpha-5\beta)(n+2\alpha-5\beta)(n+3\alpha-5\beta)(n+4\alpha-5\beta) \\ & + \frac{5B^4C}{120\alpha^5} n(n+\alpha-4\beta-\gamma)(n+2\alpha-4\beta-\gamma)(n+3\alpha-4\beta-\gamma)(n+4\alpha-4\beta-\gamma) \\ & + \frac{10B^3C^2}{120\alpha^5} n(n+\alpha-3\beta-2\gamma)(n+2\alpha-3\beta-2\gamma)(n+3\alpha-3\beta-2\gamma)(n+4\alpha-3\beta-2\gamma) \\ & + \frac{10B^2C^3}{120\alpha^5} n(n+\alpha-2\beta-3\gamma)(n+2\alpha-2\beta-3\gamma)(n+3\alpha-2\beta-3\gamma)(n+4\alpha-2\beta-3\gamma) \\ & + \frac{5BC^4}{120\alpha^5} n(n+\alpha-\beta-4\gamma)(n+2\alpha-\beta-4\gamma)(n+3\alpha-\beta-4\gamma)(n+4\alpha-\beta-4\gamma) \\ & + \frac{C^5}{120\alpha^5} n(n+\alpha-5\gamma)(n+2\alpha-5\gamma)(n+3\alpha-5\gamma)(n+4\alpha-5\gamma), \end{aligned}$$

unde formatio omnium sequentium functionum satis dilucide perspicitur.

25. Quodsi iam omnes isti valores, quos pro functionibus $f': n$, $f'': n$, $f''': n$ etc. elicuimus, in unam summam colligantur et ob $f^0: n = 1$ unitas praefigatur, obtinebitur series desiderata, quae scilicet valorem potestatis Z^n exprimit, neque ergo opus est omnes istas functiones hic denuo collectas referre.

COROLLARIUM

[25a].[1]) Hae ergo series infinitis constant terminis, in quibus omnes possibiles binarum litterarum B et C combinationes occurrunt. Quin etiam pro combinatione quacumque, quae sit $B^b C^c$, in genere terminus eam involvens assignari poterit. Primo enim ista forma multiplicetur per numerum omnium combinationum; qui posito brevitatis gratia $b+c=i$ si indicetur littera N, erit, uti constat, $N=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots i}{1\cdot 2\cdot 3\cdots b\cdot 1\cdot 2\cdots c}$; deinceps si ponamus $b\beta+c\gamma=\theta$, erit terminus huic formae respondens

$$\frac{NB^bC^c}{1\cdot 2\cdot 3\cdots i\alpha^i}n(n+\alpha-\theta)(n+2\alpha-\theta)(n+3\alpha-\theta)\cdots(n+(i-1)\alpha-\theta).$$

Veluti si forma proposita fuerit B^3C^2, erit $i=5$ hincque $N=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2.3\cdot 1\cdot 2}=10$, deinde vero erit $\theta=3\beta+2\gamma$ sicque ipse terminus huius formae erit

$$\frac{10B^3C^2}{120\alpha^5}n(n+\alpha-3\beta-2\gamma)(n+2\alpha-3\beta-2\gamma)(n+3\alpha-3\beta-2\gamma)(n+4\alpha-3\beta-2\gamma),$$

prorsus ut supra est exhibitus.

SCHOLION

26. Hinc iam abunde patet, si aequatio proposita pluribus adhuc constet terminis habeatque hanc formam

$$1-\frac{1}{Z^\alpha}=\frac{B}{Z^\beta}+\frac{C}{Z^\gamma}+\frac{D}{Z^\delta}+\frac{E}{Z^\varepsilon}+\text{etc.},$$

tum ope eiusdem methodi seriem infinitam investigari posse, quae valorem potestatis Z^n exprimat; ista enim series incipiens ab unitate infinitos involvet terminos ex omnibus plane combinationibus litterarum B, C, D, E etc. formatos. Si enim in genere proponatur haec combinatio $B^bC^cD^dE^e$, statuatur primo $b+c+d+e=i$ et quaeratur numerus N, ut sit

$$N=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots i}{1\cdot 2\cdot 3\cdots b\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots c\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots d\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots e},$$

sitque brevitatis gratia $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots i=I$; factor prior huius termini erit

$$\frac{NB^bC^cD^dE^e}{I\alpha^i},$$

1) In editione principe paragraphi signum deest. P. St.

praeterea vero adiungendi sunt factores exponentem n involventes, pro quibus inveniendis statuatur

$$b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon = \theta,$$

eruntque isti factores numero i isti

$$n(n+\alpha-\theta)(n+2\alpha-\theta)(n+3\alpha-\theta)\cdots(n+(i-1)\alpha-\theta),$$

ita ut totus terminus sit

$$\frac{NB^bC^cD^dE^e}{I\alpha^i}n(n+\alpha-\theta)(n+2\alpha-\theta)(n+3\alpha-\theta)\cdots(n+(i-1)\alpha-\theta).$$

Quamobrem super indole omnium harum serierum maxime memorabilium, quas olim in Tomo XV. Novorum Commentariorum[1]) fusius, sed deficiente demonstratione[2]) descripsi, nihil amplius desiderari posse videtur.

1) Vide Commentationem 406 huius voluminis, imprimis p. 281. P. St.

2) Editio princeps: *sufficiente demonstratione.* Correxit P. St.

DE INNUMERIS GENERIBUS SERIERUM MAXIME MEMORABILIUM QUIBUS OMNIUM AEQUATIONUM ALGEBRAICARUM NON SOLUM RADICES IPSAE SED ETIAM QUAECUMQUE EARUM POTESTATES EXPRIMI POSSUNT[1]

Conventui exhibita die 11. Aprilis 1776

Commentatio 632 indicis ENESTROEMIANI
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 4 (1786), 1789, p. 74—95
Summarium ibidem p. 114—115

SUMMARIUM

Nous avons déjà fait mention, dans le précédent extrait, d'un mémoire[2]) que notre illustre Géomètre avoit donné dans le XVe volume des Nouveaux Commentaires, sur le même sujet qu'il traite ici et dans la dissertation précédente. Il y avoit montré qu'on peut non seulement exprimer la racine, mais une puissance quelconque de la racine d'une equation algébrique quelconque par une série infinie assez simple et d'un loi de progression assez évidente. Ici il va plus loin, comme on va voir par l'exposition suivante du contenu de ce mémoire.

Soit l'équation proposée déjà réduite à cette forme

$$1 = \frac{A}{x^{\alpha}} + \frac{B}{x^{\beta}} + \frac{C}{x^{\gamma}} + \text{etc.},$$

1) Confer hac cum dissertatione Commentationem 406 huius voluminis atque alias illas commentationes p. 263 laudatas. P. St.

2) C'est le mémoire 406 de ce volume. P. St.

où les exposans α, β, γ etc. sont des nombres quelconques positifs ou négatifs, entiers ou rompus, et A, B, C etc. des coéfficiens doués de tant de dimensions que l'homogénéité exige, c'est à dire d'autant que les exposans α, β, γ etc. indiquent. Et il est d'abord clair que dans la série qui doit exprimer la puissance n^{me} de la racine x, le premier terme sera $A^{\frac{n}{\alpha}}$ et que tous les autres termes seront composés des autres lettres B, C, D etc. tant seules que combinées entre elles. On pourra donc les ranger en différentes classes. La premiere sera formée des termes qui contiennent les lettres B, C, D etc. simplement; la seconde de ceux qui contiennent les quarrés de ces nombres et leurs produits de deux à deux; la troisième classe renfermera les termes où ces lettres seront combinées trois à trois, et ainsi de suite. M. EULER avoit déjà donné, dans le mémoire cité du XVe volume des Nouveaux Commentaires, des règles pour la formation des termes de chaque classe, qu'il expose aussi de nouveau dans le mémoire présent, mais d'une manière beaucoup plus générale et en même tems plus simple. Mais ce qui rend ce mémoire surtout intéressant, c'est que son célèbre Auteur y a réussi à démontrer rigoureusement ces règles, et par conséquent la verité de ses séries, qui dans le mémoire antérieur, dont nous venons de parler, avoient le défaut d'être non seulement fondées sur une méthode extrèmement indirecte, mais à laquelle l'induction avoit aussi outre cela beaucoup plus de part qu'on n'aime à lui accorder en pareilles matières.

1. Proposita aequatione quacumque algebraica ad hanc formam reducta

$$\mathfrak{A}x^{\mathfrak{a}} + \mathfrak{B}x^{\mathfrak{b}} + \mathfrak{C}x^{\mathfrak{c}} + \mathfrak{D}x^{\mathfrak{d}} + \mathfrak{E}x^{\mathfrak{e}} + \text{etc.} = 0,$$

ubi exponentes $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ etc. sint numeri quicumque, sive integri sive fracti, sive positivi sive etiam negativi, in Tomo XV. Novorum Commentariorum ostendi[1]) non solum huius aequationis radicem x sed etiam quamvis potestatem x^n per seriem infinitam satis concinnam, cuius omnes termini secundum certam legem formentur, pluribus modis exprimi posse, quae eo magis omni attentione atque adeo admiratione dignae videntur, quod earum ratio propemodum omnes vires Analyseos superare videtur, propterea quod istae series non solum per longas ambages sint inventae, sed etiam in earum formatione plurimum inductioni sit tributum. Quamobrem plurimum operae pretium fore videtur, ut omnes operationes, quibus hae series formantur, dilucide exponantur et omnia momenta, quibus earum formatio innititur,

1) Vide Commentationem 406 huius voluminis. P. St.

summo studio perpendantur. Tum enim demum sperare licebit in veram originem istarum serierum penetrare atque omnia mysteria, quibus earum natura adhuc involuta deprehenditur, ad principia cognita revocare.

2. Prima operatio, qua aequationem quamcumque propositam ad hunc scopum praeparare oportet, in hoc consistit, ut tota aequatio per quempiam suorum terminorum dividatur hocque modo ipsa aequatio ad huiusmodi formam reducatur

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \frac{E}{x^\varepsilon} + \text{etc.},$$

quod ergo totidem diversis modis fieri poterit, quot terminis ipsa aequatio fuerit composita; ubi iterum est monendum exponentes α, β, γ, δ, ε etc. quoscumque numeros denotare posse, sive positivos sive negativos, sive integros sive fractos. Quin etiam perinde est, quonam ordine isti termini disponantur. Tantum hic in limine notasse iuvabit, quoniam ipsi radici x una dimensio tribuitur, propter homogeneitatem omnium terminorum quantitatibus A, B, C etc. respective tot dimensiones assignari oportere, quot exponentes α, β, γ etc. indicant. Ita littera A censenda est habere α dimensiones; numerus vero dimensionum litterae B est β, at litterae $C = \gamma$ etc., id quod ideo probe est observandum, quod in serie, quae valorem radicis x referat, omnes eius termini unicam dimensionem constituere debent. In seriebus autem, quae radicis x potestatem quamcumque x^n exprimunt, evidens est in singulis terminis litteras A, B, C, D etc. n dimensiones complere debere.

3. His expositis pro quacumque radicis potestate x^n tot diversae series infinitae exhiberi possunt, quot litterae A, B, C, D etc. in aequatione reperiuntur, propterea quod primus seriei cuiusque terminus ex quovis membro illius aequationis formari potest, quasi reliqui non adessent. Ita ex membro $x^\alpha = A$ sequitur $x = A^{\frac{1}{\alpha}}$ et $x^n = A^{\frac{n}{\alpha}}$; ex membro autem secundo $\frac{B}{x^\beta} = 1$ prodiret $x^n = B^{\frac{n}{\beta}}$; similique modo ex tertio membro prodiret $x^n = C^{\frac{n}{\gamma}}$; et ita porro. Vocemus igitur illud aequationis membrum, ex quo primum seriei terminum constituere libet, aequationis membrum principale, pro quo in posterum assumamus perpetuo membrum primo loco positum $\frac{A}{x^\alpha}$, ita ut initium seriei investigandae sit $x^n = A^{\frac{n}{\alpha}}$.

4. Constituto igitur primo termino seriei, quae valorem ipsius x^n exprimat, qui ergo est $x^n = A^{\frac{n}{\alpha}}$, manifestum est omnes terminos sequentes ex reliquis litteris B, C, D, E etc. tam singulis quam utcumque invicem combinatis formari debere, unde pro reliquis terminis infinitos ordines constitui conveniet, quorum primus contineat singulas litteras B, C, D etc. solitarias, secundus ordo omnia producta ex binis harum litterarum, quae ergo sunt primo earum quadrata B^2, C^2, D^2 etc., tum vero producta ex binis diversis BC, BD, CD etc.; tertius vero ordo complectetur omnia producta ex tribus harum litterarum, sive iisdem sive diversis, quae ergo erunt B^3, C^3, D^3 etc., BBC, BBD, BCC, BDD, BCD etc.; quartus vero ordo continebit praeter potestates quartas harum litterarum omnia producta ex quaternis earum inter se coniunctis. Ex quo intelligitur ordinem quintum involvere omnia producta ex quinis, ordinem sextum ex senis, et ita porro in infinitum. Hinc totum negotium huc redit, quomodo omnes terminos cuiusque ordinis formari oporteat, ut omnibus in unam summam collectis et ad primum $A^{\frac{n}{\alpha}}$ additis prodeat series infinita verum valorem potestatis x^n exprimens, quamobrem pro quolibet ordine regulas singulos terminos formandi exponamus, quemadmodum in dissertatione initio commemorata sunt traditae.

PRIMA REGULA PRO FORMANDIS TERMINIS PRIMI ORDINIS

5. Hinc ante omnia patet cum qualibet litterarum B, C, D, E etc. eiusmodi potestatem ipsius A coniungi debere, ut dimensionum numerus prodeat $= n$. Quoniam igitur littera B censetur habere β dimensiones, litterae vero A numerus dimensionum est α, si pro B statuatur ista potestas A^λ, tum producti $A^\lambda B$ numerus dimensionum erit $\lambda\alpha + \beta = n$, unde colligitur $\lambda = \frac{n-\beta}{\alpha}$, sicque ex littera B nascitur $A^{\frac{n-\beta}{\alpha}} B$. Similique modo ex littera C orietur $A^{\frac{n-\gamma}{\alpha}} C$. Tum vero ex littera D orietur $A^{\frac{n-\delta}{\alpha}} D$ et ita porro. Praeterea vero his singulis productis praefigi oportet communem multiplicatorem $\frac{n}{\alpha}$; quamobrem termini seriei quaesitae ex singulis litteris B, C, D, E etc. oriundi ita se habebunt

$$\frac{n}{\alpha} A^{\frac{n-\beta}{\alpha}} B + \frac{n}{\alpha} A^{\frac{n-\gamma}{\alpha}} C + \frac{n}{\alpha} A^{\frac{n-\delta}{\alpha}} D + \frac{n}{\alpha} A^{\frac{n-\varepsilon}{\alpha}} E + \text{etc.}$$

sicque habentur omnes termini primi ordinis pro serie, quam investigamus.

SECUNDA REGULA PRO FORMANDIS TERMINIS SECUNDI ORDINIS

6. Quoniam hic occurrunt termini duplicis formae, scilicet vel ipsa quadrata B^2, C^2, D^2 etc. vel producta ex binis diversis BC, BD, BE, CD etc., multiplicatores cuique formae iungendos seorsim evolvamus. Ac primo quidem pro forma B^2, quae habet 2β dimensiones, iungi debet haec potestas $A^{\frac{n-2\beta}{\alpha}}$; deinde vero ex iis, quae in dissertatione iam allegata demonstravi, patet insuper adiungi debere multiplicatorem ex duobus factoribus constantem

$$\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta}{2\alpha},$$

unde termini seriei quaesitae, qui ex quadratis B^2, C^2, D^2 etc. oriuntur, erunt sequentes:

Ex forma	nascitur terminus
BB	$\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta}{2\alpha}A^{\frac{n-2\beta}{\alpha}}BB,$
CC	$\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\gamma}{2\alpha}A^{\frac{n-2\gamma}{\alpha}}CC,$
DD	$\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\delta}{2\alpha}A^{\frac{n-2\delta}{\alpha}}DD,$
EE	$\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\varepsilon}{2\alpha}A^{\frac{n-2\varepsilon}{\alpha}}EE$
etc.	etc.

7. Pro formis autem binas litteras diversas involventibus sufficiet considerasse formam BC, quae primo recipit coefficientem numericum numero permutationum harum litterarum respondentem, qui est 2, ut hinc habeatur $2BC$. Deinde quia numerus dimensionum est $\beta+\gamma$, potestas ipsius A iungenda erit $A^{\frac{n-\beta-\gamma}{\alpha}}$; ac denique multiplicator insuper adiiciendus erit

$$\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\gamma}{2\alpha}.$$

His igitur coniunctis ex singulis nostris formis huius ordinis orientur sequentes termini pro serie quaesita:

Ex forma	nascitur terminus
BC	$2\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\gamma}{2\alpha}A^{\frac{n-\beta-\gamma}{\alpha}}BC,$
BD	$2\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\delta}{2\alpha}A^{\frac{n-\beta-\delta}{\alpha}}BD,$
BE	$2\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\varepsilon}{2\alpha}A^{\frac{n-\beta-\varepsilon}{\alpha}}BE,$
CD	$2\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\gamma-\delta}{2\alpha}A^{\frac{n-\gamma-\delta}{\alpha}}CD,$
CE	$2\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\gamma-\varepsilon}{2\alpha}A^{\frac{n-\gamma-\varepsilon}{\alpha}}CE,$
DE	$2\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\delta-\varepsilon}{2\alpha}A^{\frac{n-\delta-\varepsilon}{\alpha}}DE$
etc.	etc.

TERTIA REGULA PRO FORMANDIS TERMINIS TERTII ORDINIS

8. In hoc ordine primo occurrit B^3, cuius index naturalis ex permutatione ortus est $=1$; deinde potestas ipsius A, quia dimensionum numerus ipsius B^3 est 3β, erit $A^{\frac{n-3\beta}{\alpha}}$. At vero multiplicator insuper adiungendus nunc constabit ex tribus factoribus eritque

$$\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-3\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-3\beta}{3\alpha},$$

quibus coniunctis termini ex singulis cubis oriundi se habebunt sequenti modo:

Ex forma	nascitur terminus
B^3	$\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-3\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-3\beta}{3\alpha}A^{\frac{n-3\beta}{\alpha}}B^3,$
C^3	$\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-3\gamma}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-3\gamma}{3\alpha}A^{\frac{n-3\gamma}{\alpha}}C^3,$
D^3	$\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-3\delta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-3\delta}{3\alpha}A^{\frac{n-3\delta}{\alpha}}D^3$
etc.	etc.

9. Secunda forma in hoc ordine occurrens est BBC, cui convenit index naturalis $=3$, et quia numerus dimensionum est $2\beta+\gamma$, potestas ipsius A iungenda erit $A^{\frac{n-2\beta-\gamma}{\alpha}}$; tum vero multiplicator insuper adiiciendus erit

$$\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta-\gamma}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-2\beta-\gamma}{3\alpha},$$

unde pro singulis formis formabuntur sequentes termini:

Ex forma	nascitur terminus
BBC	$3\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta-\gamma}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-2\beta-\gamma}{3\alpha}A^{\frac{n-2\beta-\gamma}{\alpha}}BBC,$
BCC	$3\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-2\gamma}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\beta-2\gamma}{3\alpha}A^{\frac{n-\beta-2\gamma}{\alpha}}BCC,$
BBD	$3\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta-\delta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-2\beta-\delta}{3\alpha}A^{\frac{n-2\beta-\delta}{\alpha}}BBD,$
BDD	$3\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-2\delta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\beta-2\delta}{3\alpha}A^{\frac{n-\beta-2\delta}{\alpha}}BDD$
etc.	etc.

In hoc ordine superest terminus BCD ternas litteras dispares involvens, cuius index numericus ex permutatione natus est 6, et quia numerus dimensionum hic est $\beta+\gamma+\delta$, potestas ipsius A iungenda erit $A^{\frac{n-\beta-\gamma-\delta}{\alpha}}$; at vero multiplicator insuper iungendus erit

$$\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\gamma-\delta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta}{3\alpha},$$

unde ex forma BCD nascitur iste terminus pro serie quaesita

$$6\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\gamma-\delta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta}{3\alpha}A^{\frac{n-\beta-\gamma-\delta}{\alpha}}BCD;$$

unde facile patet, quomodo termini ex reliquis formis huius naturae BCE, CDE etc. sint formandi, quos superfluum foret hic seorsim apponere, quandoquidem omnes has litteras inter se permutare licet, quamobrem etiam in sequentibus unicam formam ex quolibet ordine evolvisse sufficiet.

QUARTA REGULA PRO FORMANDIS TERMINIS QUARTI ORDINIS

10. Ex hactenus allatis facile intelligitur, quomodo pro singulis formis, quae in hoc ordine occurrunt, termini inde resultantes formari debeant.

I. Ex forma B^4 nascitur iste terminus

$$1\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-4\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-4\beta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-4\beta}{4\alpha}A^{\frac{n-4\beta}{\alpha}}B^4.$$

II. Ex forma B^3C nascitur terminus

$$4\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-3\beta-\gamma}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-3\beta-\gamma}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-3\beta-\gamma}{4\alpha}A^{\frac{n-3\beta-\gamma}{\alpha}}B^3C.$$

III. Ex forma B^2C^2 nascitur terminus

$$6\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta-2\gamma}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-2\beta-2\gamma}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-2\beta-2\gamma}{4\alpha}A^{\frac{n-2\beta-2\gamma}{\alpha}}B^2C^2.$$

IV. Ex forma B^2CD nascitur terminus

$$12\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{4\alpha}A^{\frac{n-2\beta-\gamma-\delta}{\alpha}}B^2CD.$$

V. Ex forma $BCDE$ nascitur terminus

$$24\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{4\alpha}A^{\frac{n-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{\alpha}}BCDE.$$

QUINTA REGULA PRO FORMANDIS TERMINIS QUINTI ORDINIS

11. In hoc ordine sequentes occurrunt casus seorsim evolvendi:

I. Ex forma B^5 nascitur terminus

$$\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-5\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-5\beta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-5\beta}{4\alpha}\cdot\frac{n+4\alpha-5\beta}{5\alpha}A^{\frac{n-5\beta}{\alpha}}B^5.$$

II. Ex forma B^4C posito brevitatis gratia $4\beta+\gamma=\theta$ nascitur terminus

$$5\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha}\cdot\frac{n+4\alpha-\theta}{5\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^4C.$$

III. Ex forma B^3C^2 posito brevitatis gratia $3\beta+2\gamma=\theta$ nascitur terminus

$$10\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha}\cdot\frac{n+4\alpha-\theta}{5\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^3C^2.$$

IV. Ex forma B^3CD posito brevitatis gratia $3\beta+\gamma+\delta=\theta$ nascitur terminus

$$20\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha}\cdot\frac{n+4\alpha-\theta}{5\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^3CD.$$

V. Ex forma B^2C^2D posito brevitatis gratia $2\beta+2\gamma+\delta=\theta$ nascitur terminus

$$30\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha}\cdot\frac{n+4\alpha-\theta}{5\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^2C^2D.$$

VI. Ex forma B^2CDE posito brevitatis gratia $2\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=\theta$ nascitur terminus

$$60\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha}\cdot\frac{n+4\alpha-\theta}{5\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^2CDE.$$

VII. Ex forma $BCDEF$ posito brevitatis gratia $\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta=\theta$ nascitur terminus

$$120\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha}\cdot\frac{n+4\alpha-\theta}{5\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}BCDEF.$$

Hinc iam lex progressionis ita manifesto perspicitur, ut superfluum foret ulteriores ordines evolvere.

REGULA GENERALIS PRO TERMINIS FORMAE B^i INVENIENDIS

12. Quoniam igitur hic terminus ad ordinem i pertinet, per se patet eius exponentem i necessario esse debere numerum integrum positivum, dum reliqui exponentes α, β, γ, δ etc. omnes plane numeros tam positivos quam negativos, sive integros sive fractos, admittant. Deinde quia hic terminus est simplex potestas, eius index numericus erit $=1$. Porro quia litterae B tribuuntur β dimensiones, hic numerus dimensionum erit $i\beta=\theta$ hincque potestas ipsius A iungenda erit $A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}$. Denique multiplicator ab exponente n pendens continebit i factores, qui sunt

$$\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdots\frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha}.$$

His ergo coniunctis terminus ex forma B^i oriundus erit

$$1\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha}\cdots\frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^i,$$

quae formula facile ad terminos formae vel C^i vel D^i vel E^i vel etc. transfertur.

REGULA GENERALIS PRO TERMINIS FORMAE $B^b C^c$ INVENIENDIS

13. Hic ut ante sponte intelligitur exponentes b et c nonnisi numeros integros positivos designare posse, unde iste terminus pertinebit ad ordinem $b+c$. Ponamus autem $b+c=i$. Primo igitur huius termini index numericus definiri debet, quem indicemus littera N, et ex theoria permutationum constat fore

$$N=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots i}{1\cdot2\cdot3\cdots b\cdot1\cdot2\cdot3\cdots c}.$$

Deinde, quia litterae B dimensiones β, litterae vero C dimensiones γ tribuuntur, numerus dimensionum erit $b\beta+c\gamma=\theta$ hincque potestas ipsius A adiungenda erit $A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}$. Tertio vero multiplicator ab exponente n pendens erit ut ante

$$\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdots\frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha},$$

nisi quod hic ipsi θ debitus valor est assignandus, quamobrem his coniunctis reperietur terminus ex forma proposita $B^b C^c$ oriundus iste

$$N\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha}\cdots\frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^b C^c.$$

REGULA GENERALIS PRO TERMINIS FORMAE $B^b C^c D^d$ FORMANDIS

14. Ponatur hic index ordinis, ad quem haec forma est referenda, $b+c+d=i$; numerus vero dimensionum in hoc termino contentarum statuatur ut hactenus $b\beta+c\gamma+d\delta=\theta$, unde tam potestas ipsius A quam multiplicator definientur ut ante; quare cum index numericus sit

$$N=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots i}{1\cdot2\cdots b\cdot1\cdot2\cdots c\cdot1\cdot2\cdots d},$$

his coniungendis terminus formae propositae respondens erit

$$N\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha}\cdots\frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^b C^c D^d.$$

FORMATIO SERIEI VALOREM IPSIUS x^n EXPRIMENTIS

15. Postquam secundum praecepta exposita omnes termini cuiusque ordinis in infinitum fuerint inventi, nil aliud opus est, nisi ut omnes isti termini in unam summam colligantur, quae ad primum terminum addita praebebit valorem potestatis x^n. Hinc ergo, si summa omnium terminorum primi ordinis ponatur $=\mathfrak{A}$, secundi ordinis $=\mathfrak{B}$, tertii ordinis $=\mathfrak{C}$ etc., erit

$$x^n = A^{\frac{n}{\alpha}} + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.}$$

hicque valor propterea satisfaciet aequationi propositae

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \text{etc.};$$

quae cum habere queat plures radices seu valores ipsius x, hic in genere vix definire licet, quemnam valorem expressio inventa sit exhibitura; plerumque quidem omnium radicum maxima quandoque etiam minima hic locum habere deprehenditur.

16. Si praeter terminum principalem $\frac{A}{x^\alpha}$ aequatio unicum contineat terminum $\frac{B}{x^\beta}$, in omnibus ordinibus unicus tantum habebitur terminus, unde pro hoc casu series inventa se ita habebit:

$$x^n = A^{\frac{n}{\alpha}} + \frac{n}{\alpha}A^{\frac{n-\beta}{\alpha}}B + \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta}{2\alpha}A^{\frac{n-2\beta}{\alpha}}BB$$

$$+\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-3\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-3\beta}{3\alpha}A^{\frac{n-3\beta}{\alpha}}B^3$$

$$+\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-4\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-4\beta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-4\beta}{4\alpha}A^{\frac{n-4\beta}{\alpha}}B^4$$

$$+\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-5\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-5\beta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-5\beta}{4\alpha}\cdot\frac{n+4\alpha-5\beta}{5\alpha}A^{\frac{n-5\beta}{\alpha}}B^5$$

etc.

Quae ergo series convenit aequationi

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta},$$

ita ut radix potestatis n ex hac serie extracta exhibeat quampiam radicem istius aequationis; et quoniam pro n numerum quemcumque, sive positivum sive negativum, sive integrum sive fractum, accipere licet, hinc innumerabiles diversae formae pro eadem aequationis radice x exhiberi possunt.

17. Sin autem aequatio praeter terminum principalem $\frac{A}{x^\alpha}$ duos pluresve complectatur terminos, tum etiam in serie inventa numerus terminorum cuiusque ordinis continuo magis augebitur. Scilicet si numerus litterarum B, C, D etc. fuerit $= k$, qui ergo numerum terminorum in primo ordine contentorum indicabit, tum numerus terminorum secundi ordinis erit $= \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2}$, tertii vero ordinis $= \frac{k(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, quarti ordinis $= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ atque adeo in genere numerus terminorum ordinis i erit

$$= \frac{k(k+1)(k+2)\cdots(k+i-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots i}.$$

18. Quoniam igitur in enumeratione terminorum cuiusque ordinis probe cavendum est, ne ulla forma praetermittatur, hoc obtinebitur, si generatim pro ordine i evolvatur ista potestas $(B + C + D + E + \text{etc.})^i$; tum enim non solum omnes formae ad hunc ordinem pertinentes prodibunt, sed etiam quaelibet forma iam adiunctum habebit suum indicem numericum, qui ipsi iuxta regulam permutationum convenit et quem supra designavimus littera N, ita ut non opus sit eum seorsim investigare.

PRAEPARATIO AD DEMONSTRATIONEM SERIERUM INVENTARUM

19. Quamquam istas series iam in Tomo XV. Novorum Commentariorum exhibui, tamen iam observavi eas methodo maxime indirecta ac per plures ambages esse inventas, praeterquam quod plerumque etiam soli inductioni innituntur, quamobrem ob summam dignitatem harum serierum maxime est optandum, ut earum veritas per demonstrationem solidam extra omne dubium collocetur; imprimis autem desideratur methodus directa, qua ad easdem

series per operationes iam usu receptas pervenire liceat. Quoniam autem posteriori requisito nondum satisfacere valui, saltem veritatem harum serierum, quam firma demonstratione corroborare mihi licuit, hic sum expositurus.

20. Docebo igitur series, quarum constructionem hic tradidi, apprime satisfacere ipsi aequationi propositae

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \text{etc.},$$

quae per x^n multiplicata induit hanc formam

$$x^n = Ax^{n-\alpha} + Bx^{n-\beta} + Cx^{n-\gamma} + Dx^{n-\delta} + \text{etc.}$$

Quamobrem ostendi oportet seriem, quam supra pro exprimenda potestate x^n invenire docui, revera aequalem esse summae serierum, quae secundum eandem legem pro potestatibus $x^{n-\alpha}$, $x^{n-\beta}$, $x^{n-\gamma}$, $x^{n-\delta}$ etc. formantur, si scilicet respective per litteras A, B, C, D etc. multiplicentur. Evidens autem est has posteriores series ex nostra serie generali erui posse, si loco exponentis n successive scribantur numeri $n-\alpha$, $n-\beta$, $n-\gamma$, $n-\delta$ etc. Hoc autem sequenti modo pro qualibet terminorum forma ostendere licebit, ubi quidem sufficiet veritatem ternarum postremarum regularum generalium demonstrasse.

DEMONSTRATIO PRIMAE REGULAE GENERALIS PRO TERMINIS FORMAE B^i

21. Supra vidimus terminum ex hac forma oriundum pro potestate x^n esse

$$1 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha} \cdots \frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} B^i$$

existente $\theta = i\beta$, qui ergo aequalis esse debet terminis eiusdem formae, qui ex membris aequationis primo et secundo $Ax^{n-\alpha} + Bx^{n-\beta}$ oriuntur, quandoquidem in reliquis membris nulli termini formae B^i locum inveniunt, propterea quod horum membrorum termini omnes vel litteram C vel D vel E vel etc. necessario involvunt. Ex primi igitur membri potestate $x^{n-\alpha}$ sumi debet terminus formae B^i, quippe qui ductus in A naturam non mutat; at vero ex secundi membri potestate $x^{n-\beta}$ tantum capi debet terminus formae B^{i-1}, quippe qui per B multiplicatus praebet formam propositam B^i. Scque hos binos terminos iunctos aequales fieri oportet ipsi termino proposito.

22. Quaeramus igitur primo terminum formae B^i in potestate $x^{n-\alpha}$ occurrentem, quem ergo ex ipsa formula proposita deducemus loco n scribendo $n-\alpha$, qui idcirco erit

$$\frac{n-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{n-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{3\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{4\alpha}\cdots\frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{i\alpha}A^{\frac{n-\alpha-\theta}{\alpha}}B^i$$

existente $\theta=i\beta$. Deinde vero terminus formae B^{i-1} potestati $x^{n-\beta}$ [respondens] ex ipsa formula proposita eruetur, si primo loco i scribatur $i-1$; porro loco θ nunc scribi debet $\theta-\beta$, tertio vero loco n scribendum est $n-\beta$, quo facto terminus resultans erit

$$\frac{n-\beta}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdots\frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{(i-1)\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^{i-1}.$$

Quamobrem nunc priorem terminum ducamus in A, posteriorem vero in B, et quia ambo hi termini communem habebunt factorem

$$\frac{(n+\alpha-\theta)(n+2\alpha-\theta)(n+3\alpha-\theta)\cdots(n+(i-2)\alpha-\theta)}{\alpha\cdot 2\alpha\cdot 3\alpha\cdot 4\alpha\cdots(i-1)\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^i=\varDelta,$$

eorum summa erit

$$\varDelta\left(\frac{(n-\alpha)(n-\theta)}{i\alpha}+n-\beta\right)=\frac{n(n+(i-1)\alpha-\theta)}{i\alpha}\varDelta$$

ob $i\beta=\theta$. Quamobrem restituto pro $\varDelta$ valore assumto et factoribus in debitum ordinem dispositis summa istorum terminorum erit

$$\frac{n(n+\alpha-\theta)(n+2\alpha-\theta)(n+3\alpha-\theta)\cdots(n+(i-2)\alpha-\theta)(n+(i-1)\alpha-\theta)}{\alpha\cdot 2\alpha\cdot 3\alpha\cdot 4\alpha\cdots(i-1)\alpha\cdot i\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^i,$$

qui est ipse terminus potestati x^n respondens, ideoque huius regulae veritas est demonstrata.

DEMONSTRATIO SECUNDAE REGULAE GENERALIS PRO TERMINIS FORMAE $B^b C^c$

23. Postquam hic posuimus $b+c=i$ et $b\beta+c\gamma=\theta$, tum vero

$$N=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots i}{1\cdot 2\cdots b\cdot 1\cdot 2\cdots c},$$

ipse terminus huius formae in potestatem x^n ingrediens inventus est

$$N\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdots\frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^bC^c.$$

Hanc igitur expressionem aggregatum esse demonstrandum est 1° ex termino formae B^bC^c potestati $x^{n-\alpha}$ respondente, ducto in A; 2° ex termino formae $B^{b-1}C^c$ potestati $x^{n-\beta}$ respondente, ducto in B; 3° ex termino formae B^bC^{c-1} potestati $x^{n-\gamma}$ respondente, ducto in C. Evidens enim est in reliquis membris, quae per D, E, F etc. multiplicata sunt, formam propositam occurrere non posse, quandoquidem aequatio, cui satisfieri oportet, est haec

$$x^n = Ax^{n-\alpha}+Bx^{n-\beta}+Cx^{n-\gamma}+Dx^{n-\delta}+\text{etc.}$$

24. Pro inveniendo autem termino formae B^bC^c in potestate $x^{n-\alpha}$ occurrente perspicuum est in ipsa formula proposita tantum loco n scribi debere $n-\alpha$, litteras autem i, θ et N eosdem valores retinere, unde iste terminus potestati $x^{n-\alpha}$ conveniens erit

$$\text{I.}\quad N\cdot\frac{n-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{n-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{3\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{4\alpha}\cdots\frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{i\alpha}A^{\frac{n-\alpha-\theta}{\alpha}}B^bC^c.$$

Deinde terminus formae $B^{b-1}C^c$ in potestate $x^{n-\beta}$ occurrens derivabitur ex ipsa formula proposita, si primo loco n scribatur $n-\beta$; tum vero loco i hic scribi debet $b-1+c=i-1$; deinde loco θ scribi debet $(b-1)\beta+c\gamma=\theta-\beta$; denique pro indice N scribendum erit

$$\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(i-1)}{1\cdot2\cdots(b-1)\cdot1\cdot2\cdots c}$$

sicque loco N scribi oportebit $N\cdot\frac{b}{i}$, unde ipse iste terminus erit

$$\text{II.}\quad \frac{b}{i}\cdot N\cdot\frac{n-\beta}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdots\frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{(i-1)\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^{b-1}C^c.$$

Denique terminus B^bC^{c-1} in potestate $x^{n-\gamma}$ occurrens derivabitur ex ipsa formula proposita, si primo loco n scribatur $n-\gamma$; tum vero loco i hic

scribi debet $b+c-1=i-1$; tertio loco θ scribi debet $b\beta+(c-1)\gamma=\theta-\gamma$; denique pro indice N scribendum erit

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(i-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots b\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(c-1)}$$

sicque pro N scribi oportebit $N\cdot\frac{c}{i}$, unde ipse iste terminus erit

$$\text{III.}\quad \frac{c}{i}\cdot N\cdot\frac{n-\gamma}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdots\frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{(i-1)\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^b C^{c-1}.$$

Quodsi ergo harum formularum prima ducatur in A, secunda in B et tertia in C, ostendendum est earum summam ipsi formulae propositae fore aequalem.

25. Tum autem evidens est postremos factores litterales inter se prodituros esse aequales, scilicet $A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^b C^c$; priores autem factores hunc communem habent factorem

$$\frac{N(n+\alpha-\theta)(n+2\alpha-\theta)\cdots(n+(i-2)\alpha-\theta)}{\alpha\cdot 2\alpha\cdot 3\alpha\cdot 4\alpha\cdots(i-1)\alpha};$$

qui si designetur per $\varDelta$, summa harum trium formularum erit

$$\varDelta\left(\frac{(n-\alpha)(n-\theta)}{i\alpha}+\frac{b(n-\beta)}{i}+\frac{c(n-\gamma)}{i}\right),$$

quae expressio facta evolutione abit in hanc

$$\frac{\varDelta}{i\alpha}(nn-\alpha n-\theta n+\alpha bn+\alpha cn+\alpha\theta-\alpha b\beta-\alpha c\gamma).$$

Cum autem sit $b\beta+c\gamma=\theta$ et $b+c=i$, ista forma reducetur ad hanc

$$\frac{\varDelta}{i\alpha}(nn-\alpha n-\theta n+\alpha in)=\frac{\varDelta}{i\alpha}n(n+(i-1)\alpha-\theta),$$

quamobrem istud aggregatum reperietur hoc modo expressum

$$N\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdots\frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^b C^c;$$

quae cum congruat cum ipsa forma proposita, declarat veritatem nostrae regulae.

DEMONSTRATIO TERTIAE REGULAE GENERALIS PRO TERMINIS FORMAE $B^b C^c D^d$

26. Posuimus hic primo $b+c+d=i$, secundo $b\beta+c\gamma+d\delta=\theta$ et tertio

$$N=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots i}{1\cdot 2\cdots b\cdot 1\cdot 2\cdots c\cdot 1\cdot 2\cdots d}$$

hincque terminum istius formae pro potestate x^n invenimus

$$N\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdots\frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^b C^c D^d.$$

Nunc igitur demonstrandum est hanc formulam compositam esse ex quatuor sequentibus partibus: 1° ex termino formae eiusdem $B^b C^c D^d$ potestati $x^{n-\alpha}$ respondente, ducto in A; 2° ex termino formae $B^{b-1}C^c D^d$ potestati $x^{n-\beta}$ respondente, ducto in B; 3° ex termino formae $B^b C^{c-1} D^d$ pro potestate $x^{n-\gamma}$, ducto in C; 4° ex termino formae $B^b C^c D^{d-1}$ pro potestate $x^{n-\delta}$, ducto in D.

27. Prima igitur pars formabitur ex nostra formula generali, si modo loco n scribatur $n-\alpha$, unde facta multiplicatione per A ista pars erit

$$\text{I.}\quad N\cdot\frac{n-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{n-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{3\alpha}\cdots\frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{i\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^b C^c D^d.$$

Pro parte autem secunda eruenda primo loco n scribi debet $n-\beta$, secundo loco i scribi debet $i-1$, tertio loco θ scribendum est $\theta-\beta$, denique loco indicis N habebimus

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots i-1}{1\cdot 2\cdots (b-1)\cdot 1\cdot 2\cdots c\cdot 1\cdot 2\cdots d},$$

ita ut nunc loco N scribi oporteat $\frac{b}{i}\cdot N$, quibus observatis tota pars secunda ita se habebit

$$\text{II.}\quad \frac{b}{i}\cdot N\cdot\frac{n-\beta}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdots\frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{(i-1)\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^b C^c D^d.$$

Tertia forma simili modo formabitur ex ipsa proposita scribendo primo

$n-\gamma$ loco n, secundo $i-1$ loco i et tertio $\theta-\gamma$ loco θ, at vero quarto pro indice N habebimus $\frac{c}{i}\cdot N$, quibus observatis ista pars tertia tota erit

$$\text{III.}\quad \frac{c}{i}\cdot N\cdot\frac{n-\gamma}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdots\frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{(i-1)\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^bC^cD^d.$$

Quarta forma orietur ex principali scribendo primo $n-\delta$ loco n, secundo $i-1$ loco i, tertio $\theta-\delta$ loco θ et quarto $\frac{d}{i}\cdot N$ loco N, unde fiet quarta pars

$$\text{IV.}\quad \frac{d}{i}\cdot N\cdot\frac{n-\delta}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdots\frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{(i-1)\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^bC^cD^d.$$

28. Quoniam quatuor istae partes communem habent factorem hunc

$$\varDelta=\frac{N(n+\alpha-\theta)(n+2\alpha-\theta)(n+3\alpha-\theta)\cdots n+(i-2)\alpha-\theta}{\alpha\cdot 2\alpha\cdot 3\alpha\cdot 4\alpha\cdots(i-1)\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^bC^cD^d,$$

summa omnium harum partium erit

$$\varDelta\left(\frac{(n-\alpha)(n-\theta)}{i\alpha}+\frac{b(n-\beta)+c(n-\gamma)+d(n-\delta)}{i}\right),$$

quae expressio evoluta ob $b+c+d=i$ et $b\beta+c\gamma+d\delta=\theta$ reducitur ad hanc formam

$$\frac{\varDelta}{i\alpha}n(n+(i-1)\alpha-\theta);$$

consequenter tota summa quatuor harum partium erit

$$N\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\cdots\frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha}A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}B^bC^cD^d,$$

quae est ipsa forma demonstranda. Unde iam manifestum est omnes series hac methodo resultantes veritati esse consentaneas.

REGULA FACILIS ET SUCCINCTA OMNES SERIES HUIUS GENERIS EXPEDITE FORMANDI

29. Proposita aequatione quacumque huius formae

$$1=\frac{A}{x^\alpha}+\frac{B}{x^\beta}+\frac{C}{x^\gamma}+\frac{D}{x^\delta}+\text{etc.}$$

ponatur brevitatis gratia

$$A^{-\frac{\beta}{\alpha}}B + A^{-\frac{\gamma}{\alpha}}C + A^{-\frac{\delta}{\alpha}}D + \text{etc.} = V$$

hincque semper habebitur

$$\frac{x^n}{A^{\frac{n}{\alpha}}} = 1 + \frac{n}{\alpha}V + \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}V^2 + \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}V^3 + \text{etc.},$$

si modo notetur omnes potestates ipsius V actu evolvi debere, litteram vero θ non habere valorem fixum, sed pro quovis termino evoluto ipsi peculiarem valorem tribui debere. Scilicet pro termino, qui continet productum $B^b C^c D^d E^e$ etc., isti litterae θ tribui oportet hunc valorem

$$\theta = b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon + \text{etc.};$$

hocque in singulis terminis observato orientur eaedem series, quas per regulas supra datas formare docuimus.

30. Quamquam nulla adhuc methodus directa patet ad istam expressionem perveniendi, tamen sequenti modo eius ratio quadamtenus explicari potest. Cum sit

$$1 - \frac{B}{x^\beta} - \frac{C}{x^\gamma} - \frac{D}{x^\delta} - \text{etc.} = \frac{A}{x^\alpha},$$

in membro sinistro loco x ubique scribatur eius valor ex prima parte oriundus, scilicet $A^{\frac{1}{\alpha}}$, fietque

$$x^\alpha = \frac{A}{1 - A^{-\frac{\beta}{\alpha}}B - A^{-\frac{\gamma}{\alpha}}C - A^{-\frac{\delta}{\alpha}}D - \text{etc.}},$$

unde, si brevitatis gratia ponatur

$$V = A^{-\frac{\beta}{\alpha}}B + A^{-\frac{\gamma}{\alpha}}C + A^{-\frac{\delta}{\alpha}}D + \text{etc.},$$

erit

$$x^\alpha = \frac{A}{1-V},$$

hincque sumtis potestatibus exponentis $\frac{n}{\alpha}$ erit $x^n = \frac{A^{\frac{n}{\alpha}}}{(1-V)^{\frac{n}{\alpha}}}$; quae expressio

si more solito in seriem convertatur, prodibit

$$\frac{x^n}{A^{\frac{n}{\alpha}}} = (1-V)^{-\frac{n}{\alpha}} = 1 + \frac{n}{\alpha}V + \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha}{2\alpha}V^2 + \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha}{3\alpha}V^3 + \text{etc.}$$

Haec ergo expressio introductione litterae θ modo ante exposito definiendae transformabitur in ipsam formam modo traditam

$$\frac{x^n}{A^{\frac{n}{\alpha}}} = 1 + \frac{n}{\alpha}V + \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}V^2 + \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}V^3 + \text{etc.}$$

haecque speculatio aliis forte occasionem praebere poterit formationem huius seriei a priori investigandi.

METHODUS GENERALIS INVESTIGANDI RADICES OMNIUM AEQUATIONUM PER APPROXIMATIONEM[1]

Conventui exhibita die 25. Aprilis 1776

Commentatio 643 indicis ENESTROEMIANI
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 6 (1788), 1790, p. 16—24
Summarium ibidem p. 80—81

SUMMARIUM

Qu'on se représente sous la forme $Z = 0$ une équation quelconque, de laquelle il s'agisse de déterminer la racine z. Si dans cette équation on met à la place de la racine z une valeur approchante de cette racine, v, de laquelle on suppose qu'elle rende $Z = V$, il est clair que si v étoit la véritable racine de l'équation proposée, il y auroit $V = 0$; mais que, parceque v n'est qu'une valeur approchante de la racine, V ne sera pas tout à fait égal à zéro. Supposant donc $V = y$, cette quantité y sera une fonction connue de v, qui devient égale à zero, lorsque $v = z$; et réciproquement, v sera une certaine fonction de y, qu'on pourra indiquer ainsi $v = \Gamma : y$, et qui sera telle, qu'en mettant $y = 0$ il y ait $v = z$.

Or on sait par la nature des différentielles qu'à cause de $\Gamma : y = v$ il y a

$$\Gamma : (y + a) = v + \frac{a \partial v}{\partial y} + \frac{a^2 \partial^2 v}{2 \partial y^2} + \frac{a^3 \partial^3 v}{6 \partial y^3} + \text{etc.}$$

ou bien, en indiquant, pour abréger, les fractions $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}$ etc. par les lettres p, q, r etc., qu'on a

$$\Gamma : (y + a) = v + ap + \tfrac{1}{2} a^2 q + \tfrac{1}{6} a^3 r + \text{etc.},$$

1) Confer hac cum dissertatione Commentationem 406 huius voluminis atque alias illas commentationes p. 263 laudatas. P. St.

expression qui, en donnant à la quantité arbitraire a la valeur $-y$ ou $-V$, devient

$$z = v - pV + \frac{1}{2}qV^2 - \frac{1}{6}rV^3 + \text{etc.}$$

et c'est moyennant cette série infinie qu'on trouve très approchamment la racine z de l'équation proposée.

Mais un inconvénient attaché à cette méthode d'approximation, c'est qu'elle ne peut réussir que lorsqu'on connoît déjà assez exactement la valeur de la racine z. Or dans ce cas la methode connue d'approximation est beaucoup plus commode dans l'application. L'Auteur de ce Mémoire convient lui-même de cette imperfection; mais il fait valoir en même tems un autre avantage de sa nouvelle méthode, qui effectivement mérite toute l'attention des Géomètres, savoir que le même raisonnement conduit aussi à une série qui exprime une puissance quelconque de la racine; et c'est de cette dernière série que M. EULER déduit enfin aussi une autre qui exprime le logarithme naturel de la racine. Quelques exemples, propres à faire voir l'usage de cette méthode d'approximation, terminent ce Mémoire.

1. Sit Z quantitas incognita, cuius valor eruendus sit ex aequatione quacumque, quam semper sub forma $Z = 0$ exhibere licet, ita ut Z sit certa quaedam functio ipsius z. Quaeritur igitur eiusmodi valor determinatus, qui si loco z scribatur, tum ista functio Z revera in nihilum sit abitura. Veluti si proposita fuerit haec aequatio $z^3 = 3z + 2$, omnibus terminis ad eandem partem dispositis erit $z^3 - 3z - 2 = 0$ ideoque functio proposita $Z = z^3 - 3z - 2$. Quaeritur igitur eiusmodi valor, qui pro z substitutus istam functionem Z revera nihilo aequalem reddat, id quod hoc casu fieri manifestum est, si sumatur $z = 2$.

2. Sin autem proposita tali aequatione $Z = 0$ loco z alius quivis valor, puta v, scribatur, ex quo functio Z valorem accipiat $= V$, tum utique non erit $V = 0$; si enim prodiret $V = 0$, hoc signum foret valorem v veram esse radicem z. Ita in exemplo allato $Z = z^3 - 3z - 2$ si loco z scribamus 3, ut sit $v = 3$, fiet $V = 16$ ideoque neutiquam $= 0$.

3. Cum igitur proposita aequatione $Z = 0$, si loco z scribatur valor quicumque v, unde fiat $Z = V$, non sit $V = 0$, ponamus esse $V = y$ eritque y functio quaedam cognita ipsius v, quae in nihilum esset abitura, si pro v verus valor radicis z acciperetur.

4. Cum igitur $y = V$ sit functio quaedam ipsius v, certa curva concipi potest, cuius abscissae $= v$ respondeat applicata $= y$. Permutatis igitur coordinatis, ut iam y exhibeat abscissam et v applicatam, ista applicata v vicissim spectari poterit tamquam certa functio ipsius y, quae ergo ita erit comparata, ut, si capiatur $y = 0$, tum ista applicata v ipsi radici quaesitae z evadat aequalis, sicque tota quaestio huc redit, quemnam valorem ista ipsius y functio, scilicet v, sit acceptura, si loco y scribatur 0; tum enim iste valor ipsius v veram praebebit radicem z.

5. Quoniam igitur v spectamus ut functionem ipsius y, ponamus more iam generaliter recepto $v = \Gamma : y$ atque ex natura differentialium notum est fore

$$\Gamma : (y + a) = \Gamma : y + \frac{a\partial . \Gamma : y}{\partial y} + \frac{aa\partial^2 . \Gamma : y}{1 \cdot 2\, \partial y^2} + \frac{a^3 \partial^3 . \Gamma : y}{1 \cdot 2 \cdot 3\, \partial y^3} + \text{etc.}$$

ideoque loco $\Gamma : y$ scribendo v habebimus

$$\Gamma : (y + a) = v + \frac{a\partial v}{\partial y} + \frac{aa\partial\partial v}{1 \cdot 2\, \partial y^2} + \frac{a^3\partial^3 v}{1 \cdot 2 \cdot 3\, \partial y^3} + \frac{a^4 \partial^4 v}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\, \partial y^4} + \text{etc.},$$

in qua expressione elementum ∂y pro constanti accipitur. Sive cum v sit functio ipsius y, si statuamus $\frac{\partial v}{\partial y} = p$, $\frac{\partial p}{\partial y} = q$, $\frac{\partial q}{\partial y} = r$, $\frac{\partial r}{\partial y} = s$ sicque ulterius in infinitum, adipiscemur quantitates finitas

$$\Gamma : (y + a) = v + ap + \tfrac{1}{2}\, aaq + \tfrac{1}{6}\, a^3 r + \tfrac{1}{24}\, a^4 s + \tfrac{1}{120}\, a^5 t + \text{etc.}$$

6. Quia hic loco a quantitates quascumque assumere licet, sumamus $a = -y$ atque $\Gamma : (y + a)$ eam functionem nobis exhibebit, quae ex forma $\Gamma : y$ resultabit, si loco y scribatur $y + a$, hoc est $y - y = 0$. Vidimus autem tum v in ipsam radicem quaesitam z abire, ita ut sit $z = \Gamma : (y - y)$; quocirca, si in serie inventa loco a scribamus $-y$, reperiemus

$$z = v - py + \tfrac{1}{2}\, qyy - \tfrac{1}{6}\, ry^3 + \tfrac{1}{24}\, sy^4 - \tfrac{1}{120}\, ty^5 + \text{etc.}$$

7. Quo hanc seriem ad usum magis accommodatam reddamus, quantitatem y inde penitus excludamus. Cum enim sit $y = V$ et V functio cognita ipsius v, ex eius indole habemus statim $p = \frac{\partial v}{\partial V}$, quo valore invento erit porro

$q = \frac{\partial p}{\partial V}$ hincque ulterius $r = \frac{\partial q}{\partial V}$, $s = \frac{\partial r}{\partial V}$ et ita porro in infinitum. Quibus observatis pro radice quaesita sequentem impetrabimus seriem infinitam

$$z = v - pV + \tfrac{1}{2} qV^2 - \tfrac{1}{6} rV^3 + \tfrac{1}{24} sV^4 - \tfrac{1}{120} tV^5 + \text{etc.}$$

Huius autem seriei usum aliquot exemplis illustrare operae erit pretium.

EXEMPLUM 1

8. *Proposita sit haec aequatio quadratica $zz = a$, ita ut series quaeratur, quae aequalis sit ipsi $z = \sqrt{a}$.*

Hic igitur erit $Z = zz - a$ hincque loco z scribendo v erit $V = vv - a$ ideoque $\partial V = 2v\partial v$. Hinc igitur sequentes definiantur valores

$$p = \frac{1}{2v}, \quad q = -\frac{1}{4v^3}, \quad r = \frac{3}{8v^5}, \quad s = -\frac{3 \cdot 5}{16v^7}, \quad t = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{32v^9} \quad \text{etc.};$$

quibus inventis pro radice quaesita habebimus

$$\sqrt{a} = v - \frac{vv - a}{2v} - \frac{(vv-a)^2}{2 \cdot 4 v^3} - \frac{3(vv-a)^3}{6 \cdot 8 v^5} - \frac{3 \cdot 5 (vv-a)^4}{24 \cdot 16 v^7}$$
$$- \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 (vv-a)^5}{120 \cdot 32 v^9} - \text{etc.}$$

Quodsi ergo aequationi propositae hanc tribuamus formam $zz = bb + c$, ita ut sit $z = \sqrt{(bb+c)}$, loco a ubique scribi debebit $bb + c$. Tum vero, quia quantitas v ab arbitrio nostro pendet, sumamus $v = b$, unde fiet $vv - a = -c$, quo facto radix quaesita erit

$$\sqrt{(bb+c)} = b + \frac{c}{2b} - \frac{cc}{2 \cdot 4 b^3} + \frac{3c^3}{6 \cdot 8 b^5} - \frac{3 \cdot 5 c^4}{24 \cdot 16 b^7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 c^5}{120 \cdot 32 b^9} - \text{etc.},$$

eadem series, quae per extractionem radicis ex evolutione binomii obtinetur. Quodsi igitur quaeratur $\sqrt{10}$, sumatur $b = 3$ et $c = 1$, unde colligitur

$$\sqrt{10} = 3 + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{216} + \tfrac{1}{3888} - \text{etc.}$$

Cum igitur propemodum sit $\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6}$, series multo magis convergens

eruetur ponendo $b = 3\frac{1}{6} = \frac{19}{6}$; tum autem erit $c = -\frac{1}{36}$, unde per solos duos priores terminos reperietur

$$\sqrt{10} = 3\frac{1}{6} - \frac{1}{12 \cdot 19} = 3\frac{37}{228},$$

cuius quadratum tam prope ad 10 accedit, ut error tantum sit $\frac{1}{51984}$.

EXEMPLUM 2

9. *Proposita sit haec aequatio $z^n = a$, ita ut quaeratur $z = \sqrt[n]{a}$.*

Erit ergo $Z = z^n - a$ ideoque $V = v^n - a$ et $\partial V = nv^{n-1}\partial v$; quare litterae illae p, q, r, s etc. sequenti modo determinabuntur

$$p = \frac{1}{nv^{n-1}}, \quad q = -\frac{n-1}{nnv^{2n-1}}, \quad r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3v^{3n-1}},$$
$$s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4v^{4n-1}} \quad \text{etc.};$$

quibus valoribus substitutis radix quaesita erit

$$z = \sqrt[n]{a} = v - \frac{v^n - a}{nv^{n-1}} - \frac{(n-1)(v^n-a)^2}{2nnv^{2n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(v^n-a)^3}{6n^3v^{3n-1}}$$
$$- \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)(v^n-a)^4}{24n^4v^{4n-1}} - \text{etc.}$$

Haec scilicet series semper eundem valorem exprimet, quicumque numerus loco v accipiatur, quippe qui penitus arbitrio nostro relinquitur. Eo promptius autem ista series ad veritatem appropinquabit, quo minus potestas v^n a numero a discrepat.

Quodsi ergo fuerit $a = b^n + c$, conveniet sumi $v = b$; tum enim erit $v^n - a = -c$ et series radicem quaesitam exprimens erit

$$\sqrt[n]{(b^n + c)} = b + \frac{c}{nb^{n-1}} - \frac{(n-1)cc}{2nnb^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)c^3}{6n^3b^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)c^4}{24n^4b^{4n-1}}$$
$$+ \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)c^5}{120n^5b^{5n-1}} - \text{etc.},$$

quae series etiam reperitur ex evolutione huius binomii

$$(b^n + c)^{\frac{1}{n}}.$$

EXEMPLUM 3

10. *Proposita hac aequatione* $z^3 = z - 1$ *invenire seriem, quae valorem radicis* z *exhibeat.*

Hic ergo erit $Z = z^3 - z + 1$ ideoque $V = v^3 - v + 1$, unde fit $\partial V = \partial v(3vv - 1)$; quamobrem habebimus

$$p = \frac{1}{3vv-1}, \quad q = -\frac{6v}{(3vv-1)^3}, \quad r = \frac{6(15vv+1)}{(3vv-1)^5}, \quad s = -\frac{360v(6vv+1)}{(3vv-1)^7} \quad \text{etc.}$$

His igitur valoribus substitutis colligetur

$$z = \sqrt[3]{(z-1)} = v - \frac{(v^3-v+1)}{3vv-1} - \frac{3v(v^3-v+1)^2}{(3vv-1)^3} - \frac{(15vv+1)(v^3-v+1)^3}{(3vv-1)^5}$$
$$- \frac{15v(6vv+1)(v^3-v+1)^4}{(3vv-1)^7} - \text{etc.},$$

ubi iterum quantitas v pro lubitu assumi potest; conveniet autem eam ita accipi, ut parum a valore radicis z discrepet. Ita si sumamus $v = 1$, prodit $v^3 - v + 1 = 1$ et $3vv - 1 = 2$, unde fit $z = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{8} - \frac{1}{2}$, qui autem valor ad veritatem parum accedit.

11. Ex hoc autem exemplo patet approximationem vix succedere, nisi valor radici z proximus accipiatur; tum autem methodus vulgaris negotium multo commodius conficit. Interim tamen series hac methodo inventae maxime sunt memorabiles, quoniam in infinitum continuatae semper eundem valorem pro z exhibent, quicumque numerus pro v fuerit assumtus. Imprimis autem haec methodus omnem attentionem meretur, quod non solum series exhibeat pro ipsa radice, sed etiam pro quibusvis eius potestatibus, id quod sequenti problemate ostendetur.

PROBLEMA

12. *Proposita aequatione quacumque, quae sit* $Z = 0$, *ubi* Z *sit functio quaecumque ipsius* z, *invenire seriem infinitam, quae non solum ipsam radicem* z *sed etiam eius potestatem quamcumque* z^n *exprimat.*

SOLUTIO

Ratiocinium instituatur ut ante, scilicet loco z scribatur quantitas quaecumque v, unde Z abeat in V; et quatenus v non est radix aequationis propositae, eatenus V non in nihilum abibit. Ponamus igitur ut supra $V = y$ et etiam v spectari poterit ut functio ipsius y, quae ergo ita erit comparata, ut casu, quo ponitur $y = 0$, fiat $v = z$, quandoquidem hoc casu erit v vera aequationis radix.

13. Simili vero modo etiam potestas v^n spectari poterit tamquam functio ipsius y, quae ergo, quando fit $y = 0$ sive quando loco y scribitur $y - y$, nobis largietur valorem potestatis quaesitae z^n, quocirca, ut supra ostendimus, erit

$$z^n = v^n - \frac{y\partial . v^n}{\partial y} + \frac{yy\partial^2 . v^n}{2\partial y^2} - \frac{y^3\partial^3 . v^n}{2 \cdot 3\,\partial y^3} + \frac{y^4\partial^4 . v^n}{2 \cdot 3 \cdot 4\,\partial y^4} - \text{etc.}$$

Hinc, quia $y = V$, erit

$$z^n = v^n - \frac{V\partial . v^n}{\partial V} + \frac{V^2\partial^2 . v^n}{2\partial V^2} - \frac{V^3\partial^3 . v^n}{2 \cdot 3\,\partial V^3} + \frac{V^4\partial^4 . v^n}{2 \cdot 3 \cdot 4\,\partial V^4} - \text{etc.}$$

14. Ut iam hanc seriem a differentialibus liberemus, statuamus

$$P = \frac{\partial . v^n}{\partial V} = \frac{nv^{n-1}\partial v}{\partial V};$$

hincque porro formentur sequentes valores

$$Q = \frac{\partial P}{\partial V}, \quad R = \frac{\partial Q}{\partial V}, \quad S = \frac{\partial R}{\partial V}, \quad T = \frac{\partial S}{\partial V} \quad \text{etc.};$$

quibus valoribus inventis series quaesita potestatem z^n exprimens erit

$$z^n = v^n - VP + \tfrac{1}{2}V^2Q - \tfrac{1}{6}V^3R + \tfrac{1}{24}V^4S - \tfrac{1}{120}V^5T + \text{etc.},$$

ubi notandum est, postquam omnes isti termini per v fuerint evoluti, tum loco v omnes plane quantitates assumi posse, ita ut nihilominus semper idem valor potestatis z^n inde resultet.

15. Cum ista series exprimat valorem ipsius z^n, posito $n = 0$ series nostra praebere debet unitatem, id quod de primo termino v^n per se est perspicuum; deinde quia littera P factorem habet n, etiam omnes sequentes litterae per eundem exponentem n erunt multiplicatae sicque posito $n = 0$ omnes seriei huius termini sequentes sponte evanescent.

16. Hoc observato praeter omnes potestates ipsius z etiam eius logarithmum hyperbolicum, scilicet lz, per huiusmodi seriem infinitam exhibere poterimus. Cum enim seriei inventae omnes termini, post primum, factorem habeant n, eorum loco scribamus $n\Omega$, ut sit

$$z^n = v^n + n\Omega$$

hincque porro

$$\Omega = \frac{z^n - v^n}{n},$$

cuius aequationis differentiale erit

$$\partial\Omega = z^{n-1}\partial z - v^{n-1}\partial v,$$

sicque casu $n = 0$ erit

$$\partial\Omega = \frac{\partial z}{z} - \frac{\partial v}{v},$$

quae aequatio integrata praebet $\Omega = l\frac{z}{v}$, unde colligimus

$$lz = lv + \Omega,$$

postquam scilicet in omnibus terminis, quibus Ω componitur, positum fuerit $n = 0$.

17. Quodsi ergo Ω summam omnium terminorum casu $n = 0$ denotet, uti assumsimus, ad numeros regrediendo, si e denotet eum numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, erit

$$z = ve^{\Omega}, \quad \text{ergo} \quad z^n = v^n e^{n\Omega}.$$

Hinc autem, si formula exponentialis $e^{n\Omega}$ more solito in seriem infinitam convertatur, orietur

$$z^n = v^n\left(1 + n\Omega + \tfrac{1}{2}nn\Omega^2 + \tfrac{1}{6}n^3\Omega^3 + \tfrac{1}{24}n^4\Omega^4 + \text{etc.}\right).$$

Quae ergo series illi, quae ante est inventa, aequalis esse debet. Quin adeo necesse est, ut facta evolutione litterae Ω ipsa series ante inventa prodeat, id quod exemplo declarasse iuvabit.

EXEMPLUM

18. *Proposita aequatione* $z^\lambda = a$ *invenire seriem tam pro alia quavis potestate* z^n *quam pro eius logarithmo hyperbolico.*

Hic ergo habebimus $Z = z^\lambda - a$ ideoque $V = v^\lambda - a$, ex quo fit

$$\partial V = \lambda v^{\lambda-1} \partial v.$$

Hinc iam litterae ante introductae P, Q, R etc. sequenti modo determinabuntur

$$P = \frac{n}{\lambda} v^{n-\lambda},$$

$$Q = \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{\lambda} v^{n-2\lambda},$$

$$R = \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{n-2\lambda}{\lambda} v^{n-3\lambda},$$

$$S = \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{n-2\lambda}{\lambda} \cdot \frac{n-3\lambda}{\lambda} v^{n-4\lambda}$$

etc.,

quibus valoribus substitutis series desiderata erit

$$z^n = v^n - \frac{n}{\lambda} v^{n-\lambda} (v^\lambda - a) + \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{2\lambda} v^{n-2\lambda} (v^\lambda - a)^2$$
$$- \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{2\lambda} \cdot \frac{n-2\lambda}{3\lambda} v^{n-3\lambda} (v^\lambda - a)^3$$
$$+ \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{2\lambda} \cdot \frac{n-2\lambda}{3\lambda} \cdot \frac{n-3\lambda}{4\lambda} v^{n-4\lambda} (v^\lambda - a)^4 - \text{etc.}$$

Posito hic $n = 0$ erit

$$lz = lv - \frac{1}{\lambda} v^{-\lambda} (v^\lambda - a) - \frac{1}{2\lambda} v^{-2\lambda} (v^\lambda - a)^2$$
$$- \frac{1}{3\lambda} v^{-3\lambda} (v^\lambda - a)^3 - \frac{1}{4\lambda} v^{-4\lambda} (v^\lambda - a)^4 - \text{etc.}$$

INNUMERAE AEQUATIONUM FORMAE EX OMNIBUS ORDINIBUS QUARUM RESOLUTIO EXHIBERI POTEST

Conventui exhibita die 6. Maii 1776

Commentatio 644 indicis ENESTROEMIANI
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 6 (1788), 1790, p. 25—35
Summarium ibidem p. 82—84

SUMMARIUM

Les règles générales, données pour la résolution des équations, n'étant pas applicables pour les équations qui surpassent le quatrième degré, il est de la dernière importance de connoître celles d'entre les équations des ordres supérieurs qui peuvent être résolues. Leur nombre est infiniment grand. Pour ne point dire ni des équations qui ont des racines rationnelles, ni de celles qui peuvent être résolues en facteurs et réduites, par conséquent, à des formes d'équations résolubles par les règles générales, plusieurs Géomètres, et surtout l'Auteur de ce Mémoire lui-même, ont assigné autrefois des équations résolubles de tous les degrés.

Dans le présent Mémoire feu M. EULER a donné de nouveau une infinité d'équations algébriques dont toutes les racines peuvent être assignées. Toutes ces équations sont contenues dans la forme générale suivante

$$x^n = n''ab\left(\frac{a-b}{a-b}\right)x^{n-2} + n'''ab\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}\right)x^{n-3} + n''''ab\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}\right)x^{n-4} + \text{etc.},$$

où les caractères n'', n''', n'''' etc. indiquent le second, troisième, quatrième etc. coefficient du binome élevé à la n^{me} puissance; et une des racines de cette équation de l'ordre n est

$$\frac{b\sqrt[n]{\frac{a}{b}} - a}{1 - \sqrt[n]{\frac{a}{b}}},$$

où $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ admet n valeurs différentes, de sorte qu'on aura aussi toutes les n racines de l'équation mentionnée du n^{me} degré.

Cette vérité est puisée de la considération de cette équation $\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^n = \frac{a}{b}$; car on en tire $\frac{a+x}{b+x} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ et partant

$$x = \frac{b\sqrt[n]{\frac{a}{b}} - a}{1 - \sqrt[n]{\frac{a}{b}}},$$

et en développant l'équation adoptée

$$b(a+x)^n = a(b+x)^n$$

elle prendra la forme exposée ci-dessus

$$x^n = n''ab\left(\frac{a-b}{a-b}\right)x^{n-2} + n'''ab\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}\right)x^{n-3} + \text{etc.}$$

On pourroit s'imaginer que la considération de cette équation $\left(\frac{f+x}{g+x}\right)^n = \frac{a}{b}$ pût mener à des formes différentes et plus générales d'équations résolubles; mais l'Auteur, pour obvier à cette erreur, fait voir que quelque différentes de a et b que soyent les quantités f et g, cette équation se laisse toujours réduire à la précédente.

Enfin, M. Euler apperçoit dans les formes des racines trouvées pour les équations contenues dans son équation générale, une nouvelle confirmation de la conjecture qu'il avoit hazardée autrefois[1]), touchant la résolution des équations dans lesquelles le second terme manque, comme par exemple dans celle-ci

$$x^n = px^{n-2} + qx^{n-3} + rx^{n-4} + \text{etc.},$$

en prétendant que de pareilles équations étoient toujours résolubles moyennant une équations résolvante d'un dégré moins élevée de la forme

$$y^{n-1} - Ay^{n-2} + By^{n-3} - Cy^{n-4} + \text{etc.} = 0,$$

la forme de la racine étant

$$x = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \sqrt[n]{\delta} + \text{etc.},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. indiquent les racines de l'équation résolvante, qui sont au nombre de $n-1$

1. Quoniam regulae generales pro resolutione aequationum non ultra quartum gradum extenduntur, plurimum intererit eiusmodi aequationum formas notasse, quas resolvere liceat. Hic autem de eiusmodi aequationibus loquor, quae neque radices habeant rationales, neque per factores in aequa-

1) Voir le mémoire 30 de ce volume. P. St.

tiones ordinum inferiorum resolvi queant, quandoquidem facillimum foret innumerabiles huiusmodi aequationes resolubiles proferre. Hanc ob rem eiusmodi aequationum species attentione dignae sunt censendae, quarum resolutio necessario extractionem radicum eiusdem ordinis, cuius est ipsa aequatio, postulat.

2. Huiusmodi aequationes iam olim a MOIVREO[1]) pro singulis ordinibus in medium sunt prolatae, quibus scientia analytica non parum amplificata merito est putanda; deinde vero etiam ipse plures tales aequationes in lucem protraxi[2]); nuper autem se mihi obtulit methodus innumerabiles alias huius indolis aequationes eliciendi, quas spero Geometris haud ingratas esse futuras.

3. Istas igitur aequationum formas, prouti ad eas sum deductus, hic ordine proponam.

I. Si

$$x^2 = ab,$$

erit

$$x = \sqrt{ab}.$$

II. Si

$$x^3 = 3abx + ab(a+b),$$

erit

$$x = \sqrt[3]{aab} + \sqrt[3]{abb}.$$

III. Si

$$x^4 = 6abxx + 4ab(a+b)x + ab(aa+ab+bb),$$

erit

$$x = \sqrt[4]{a^3b} + \sqrt[4]{aabb} + \sqrt[4]{ab^3}.$$

IV. Si

$$x^5 = 10abx^3 + 10ab(a+b)xx + 5ab(aa+ab+bb)x + ab(a^3+aab+abb+b^3),$$

erit

$$x = \sqrt[5]{a^4b} + \sqrt[5]{a^3bb} + \sqrt[5]{aab^3} + \sqrt[5]{ab^4}.$$

1) Vide notam p. 8. P. St.

2) Vide Commentationem 282 huius voluminis, imprimis p. 192 et sequ. P. St.

V. Si

$$x^6 = 15abx^4 + 20ab(a+b)x^3 + 15ab(aa+ab+bb)xx + 6ab(a^3+aab+abb+b^3)x + ab(a^4 + a^3b + aabb + ab^3 + b^4),$$

erit

$$x = \sqrt[6]{a^5b} + \sqrt[6]{a^4bb} + \sqrt[6]{a^3b^3} + \sqrt[6]{aab^4} + \sqrt[6]{ab^5}.$$

VI. Si

$$x^7 = 21abx^5 + 35ab(a+b)x^4 + 35ab(aa+ab+bb)x^3 + 21ab(a^3+aab+abb+b^3)xx + 7ab(a^4+a^3b+aabb+ab^3+b^4)x + ab(a^5 + a^4b + a^3bb + aab^3 + ab^4 + b^5),$$

erit

$$x = \sqrt[7]{a^6b} + \sqrt[7]{a^5bb} + \sqrt[7]{a^4b^3} + \sqrt[7]{a^3b^4} + \sqrt[7]{aab^5} + \sqrt[7]{ab^6}.$$

4. Hinc iam facile colligitur in genere pro ordine quocumque

$$x^n = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}abx^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}ab(a+b)x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}ab(aa+ab+bb)x^{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}ab(a^3+aab+abb+b^3)x^{n-5} + \text{etc.}$$

fore

$$x = \sqrt[n]{a^{n-1}b} + \sqrt[n]{a^{n-2}bb} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^3} + \sqrt[n]{a^{n-4}b^4} + \text{etc.}$$

Vel si loco illorum coefficientium scribamus brevitatis gratia n^{II}, n^{III}, n^{IV}, n^{V}, n^{VI} etc., ista aequatio generalis succinctius ita exprimi poterit

$$x^n = n^{\mathrm{II}}ab\left(\frac{a-b}{a-b}\right)x^{n-2} + n^{\mathrm{III}}ab\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}\right)x^{n-3} + n^{\mathrm{IV}}ab\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}\right)x^{n-4} + n^{\mathrm{V}}ab\left(\frac{a^4-b^4}{a-b}\right)x^{n-5} + n^{\mathrm{VI}}ab\left(\frac{a^5-b^5}{a-b}\right)x^{n-6} + \text{etc.};$$

tum vero etiam ipsa radix ita concinnius exprimi poterit, ut sit

$$x = \frac{a\sqrt[n]{b} - b\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}},$$

quae ergo est aequatio generalis ad omnes ordines patens.

5. Has aequationes in aliam formam transfundere licet, qua artificium, quod eo manuduxit, magis occultatur. Ponamus scilicet litterarum a et b productum $ab = p$ earumque summam $a + b = s$ hasque duas litteras p et s loco illarum a et b in calculum introducamus; tum autem erit

$$a = \frac{s + \sqrt{(ss - 4p)}}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{s - \sqrt{(ss - 4p)}}{2}.$$

His iam novis valoribus introductis aequationes superiores speciales sequentes formas induent:

I. Si

$$x^2 = p,$$

erit

$$x = \sqrt{p}.$$

II. Si

$$x^3 = 3px + ps,$$

erit

$$x = \sqrt[3]{aab} + \sqrt[3]{abb} = \sqrt[3]{ap} + \sqrt[3]{bp}.$$

III. Si

$$x^4 = 6pxx + 4psx + p(ss - p),$$

erit

$$x = \sqrt[4]{aap} + \sqrt[4]{abp} + \sqrt[4]{bbp}.$$

IV. Si

$$x^5 = 10px^3 + 10psxx + 5p(ss - p)x + p(s^3 - 2sp),$$

erit

$$x = \sqrt[5]{a^3p} + \sqrt[5]{ap^2} + \sqrt[5]{bp^2} + \sqrt[5]{b^3p}.$$

V. Si

$$x^6 = 15px^4 + 20psx^3 + 15p(ss - p)xx + 6p(s^3 - 2ps)x + p(s^4 - 3ps^2 + pp),$$

erit

$$x = \sqrt[6]{a^4p} + \sqrt[6]{aapp} + \sqrt[6]{p^3} + \sqrt[6]{bbpp} + \sqrt[6]{b^4p}.$$

VI. Si

$$\begin{aligned} x^7 = 21px^5 + 35psx^4 + 35p(ss - p)x^3 + 21p(s^3 - 2ps)xx \\ + 7p(s^4 - 3pss + pp)x + p(s^5 - 4ps^3 + 3pps), \end{aligned}$$

erit

$$x = \sqrt[7]{a^5p} + \sqrt[7]{a^3pp} + \sqrt[7]{ap^3} + \sqrt[7]{bp^3} + \sqrt[7]{b^3pp} + \sqrt[7]{b^5p}$$

etc.

6. Quo nunc hanc formam generalem reddamus, observandum est novos coefficientes litteris p et s contentos seriem constituere recurrentem, cuius scala relationis[1]) est s, $-p$. Si enim ponamus

$$Q=\frac{a^\lambda-b^\lambda}{a-b},\quad Q'=\frac{a^{\lambda+1}-b^{\lambda+1}}{a-b}\quad \text{et}\quad Q''=\frac{a^{\lambda+2}-b^{\lambda+2}}{a-b},$$

manifesto erit

$$Q''=sQ'-pQ;$$

namque ob $s=a+b$ erit

$$sQ'=\frac{a^{\lambda+2}+ba^{\lambda+1}-ab^{\lambda+1}-b^{\lambda+2}}{a-b},$$

at ob $p=ab$ erit

$$pQ=\frac{a^{\lambda+1}b-ab^{\lambda+1}}{a-b},$$

qua forma ab illa ablata remanebit

$$sQ'-pQ=\frac{a^{\lambda+2}-b^{\lambda+2}}{a-b}.$$

Hac igitur lege observata habebimus sequentes transformationes:

$$\frac{a-b}{a-b}=1,\qquad \frac{a^5-b^5}{a-b}=s^4-3pss+pp,$$

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}=s,\qquad \frac{a^6-b^6}{a-b}=s^5-4ps^3+3pps,$$

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=ss-p,\qquad \frac{a^7-b^7}{a-b}=s^6-5ps^4+6ppss-p^3,$$

$$\frac{a^4-b^4}{a-b}=s^3-2sp,\qquad \frac{a^8-b^8}{a-b}=s^7-6ps^5+10pps^3-4p^3s$$

etc.

7. Ordo, quo istae formulae progrediuntur, iam satis est perspicuus. Primo enim potestates ipsius s continuo binario decrescunt, contra vero ipsius p potestates unitate crescunt signis alternantibus; coefficientes autem numerici cuiusque termini conveniunt cum iis, quos iidem termini in evolu-

1) Vide notam p. 339. P. St.

tione binomii essent habiturae, vel, quod eodem redit, ii omnes permutationes litterarum p et s indicant, ita ut coefficiens termini $p^\alpha s^\beta$ sit

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\alpha+\beta)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\alpha\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots\beta}.$$

Hinc ergo deducimus transformationem sequentem generalem

$$\frac{a^{\lambda+1}-b^{\lambda+1}}{a-b}=s^\lambda-\frac{\lambda-1}{1}ps^{\lambda-2}+\frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{1\cdot 2}pps^{\lambda-4}$$
$$-\frac{(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)}{1\cdot 2\cdot 3}p^3s^{\lambda-6}+\frac{(\lambda-4)(\lambda-5)(\lambda-6)(\lambda-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}p^4s^{\lambda-8}$$
$$-\frac{(\lambda-5)(\lambda-6)(\lambda-7)(\lambda-8)(\lambda-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}p^5s^{\lambda-10}+\text{etc.}$$

8. Quodsi ergo hos valores in aequatione generali supra § 4 data substituamus, aequatio generalis, cuius resolutionem hac methodo exhibere licet, talem habebit formam

$$x^n=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}px^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}psx^{n-3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}p(ss-p)x^{n-4}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}p(s^3-2ps)x^{n-5}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}p(s^4-3pss+pp)x^{n-6}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}p(s^5-4ps^3+3pps)x^{n-7}+\text{etc.}$$

Huius scilicet aequationis resolutio, quicumque numeri pro p et s accipiantur, semper erit in potestate, eius quippe radix, postquam ex numeris p et s isti fuerint derivati

$$a=\frac{s+\sqrt{(ss-4p)}}{2}\quad\text{et}\quad b=\frac{s-\sqrt{(ss-4p)}}{2},$$

ita exprimetur, ut sit

$$x=\frac{a\sqrt[n]{b}-b\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}.$$

9. Haec quidem formula unicam radicem aequationis propositae nobis largitur, verumtamen facile hinc omnes plane radices eiusdem aequationis

deducuntur, quarum quidem numerus est $=n$. Primo enim ponendo $b=ak$ radix illa revocabitur ad unicum signum radicale, cum hinc fiat

$$x=\frac{a\sqrt[n]{k}-b}{1-\sqrt[n]{k}}.$$

Nunc vero ista radix, nempe $\sqrt[n]{k}$, valores diversos numero n admittit, quemadmodum etiam radix potestatis n ex unitate, scilicet $\sqrt[n]{1}$, totidem diversos valores recipit, quorum unus semper ipsi unitati aequatur. Unde si quilibet horum valorum designetur littera ϱ, ita ut sit $\varrho^n=1$, ista littera ϱ involvet n diversos valores, quorum quemlibet cum formula $\sqrt[n]{k}$ coniungere licet, scribendo scilicet eius loco $\varrho\sqrt[n]{k}$, quamobrem omnes plane radices aequationis propositae in hac formula continebuntur

$$x=\frac{\varrho a\sqrt[n]{k}-b}{1-\varrho\sqrt[n]{k}} \quad \text{sive} \quad x=\frac{\varrho a\sqrt[n]{b}-b\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}-\varrho\sqrt[n]{b}};$$

tum vero si haec formula per divisionem evolvatur, prodibit ista expressio

$$x=\varrho\sqrt[n]{a^{n-1}b}+\varrho^2\sqrt[n]{a^{n-2}bb}+\varrho^3\sqrt[n]{a^{n-3}b^3}+\text{etc.},$$

cuius expressionis numerus terminorum est $n-1$ ultimo existente $\varrho^{n-1}\sqrt[n]{ab^{n-1}}$.

10. Operae pretium erit hanc rem exemplo illustrasse. Sumamus igitur $n=5$, $s=1$ et $p=-1$, ut proponatur ista aequatio quinti gradus

$$x^5=-10x^3-10xx-10x-3$$

sive

$$x^5+10x^3+10xx+10x+3=0.$$

Ad huius ergo aequationis radices investigandas capiantur hi valores

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad b=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

quibus inventis erit quaelibet radix

$$x=\frac{\varrho a\sqrt[5]{b}-b\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{a}-\varrho\sqrt[5]{b}},$$

vel introducendo litteram $k = \frac{b}{a} = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ erit

$$x = \frac{\varrho a \sqrt[5]{k} - b}{1 - \varrho \sqrt[5]{k}}.$$

Sin autem hanc formam evolvere velimus, ob $ab = p = -1$ reperiemus

$$x = -\varrho \sqrt[5]{a^3} + \varrho^2 \sqrt[5]{a} + \varrho^3 \sqrt[5]{b} - \varrho^4 \sqrt[5]{b^3},$$

quae expressio penitus in numeris evoluta praebet

$$x = -\varrho \sqrt[5]{(2+\sqrt{5})} + \varrho^2 \sqrt[5]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \varrho^3 \sqrt[5]{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} - \varrho^4 \sqrt[5]{(2-\sqrt{5})}.$$

DEMONSTRATIO FORMULARUM SUPRA DATARUM

11. Analysis, quae ad istas aequationes perduxit, maxime est obvia, ita ut vix quicquam in recessu habere videatur; tota enim petita est ex hac aequatione simplicissima

$$\frac{(a+x)^n}{(b+x)^n} = \frac{a}{b}.$$

Cum enim hinc fiat

$$\frac{a+x}{b+x} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$

inde colligitur incognita

$$= \frac{a - b\sqrt[n]{\frac{a}{b}}}{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} - 1} = \frac{a\sqrt[n]{b} - b\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}},$$

quae est ea ipsa radix, quam pro aequationibus superioribus assignavimus.

12. Quodsi vero aequationem illam assumtam evolvamus, quoniam inde fieri debet $a(x+b)^n = b(x+a)^n$ sive $a(x+b)^n - b(x+a)^n = 0$, hinc derivabitur sequens aequatio

$$\left.\begin{aligned} &ax^n + \frac{n}{1} abx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} abbx^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} ab^3x^{n-3} + \text{etc.} \\ &-bx^n - \frac{n}{1} abx^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} aabx^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3bx^{n-3} - \text{etc.} \end{aligned}\right\} = 0,$$

ubi membra secunda se mutuo tollunt. Iam quia primum membrum afficitur

per $a-b$, reliqua membra in alteram partem transferantur ac per $a-b$ dividantur sicque emerget sequens aequatio

$$x^n = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}ab\left(\frac{a-b}{a-b}\right)x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}ab\left(\frac{aa-bb}{a-b}\right)x^{n-3}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}ab\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}\right)x^{n-4} + \text{etc.},$$

quae est ipsa aequatio generalis supra tractata, cuius ergo radix est

$$x = \frac{a\sqrt[n]{b} - b\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}.$$

13. Hinc forte quispiam expectare posset simili modo huiusmodi aequationes generaliores obtineri posse, si loco illius formulae simplicissimae haec formula latius patens

$$\frac{(f+x)^n}{(g+x)^n} = \frac{a}{b}$$

fundamenti loco constituatur, siquidem hic quatuor quantitates arbitrariae a, b, f et g in computum introducuntur, cum ante binae tantum a et b inessent; verumtamen quomodocumque litterae f et g a litteris a et b diversae accipiantur, tamen casus semper ad priorem simpliciorem reduci potest. Ad hoc ostendendum ponamus $x = \alpha + \beta z$ et aequatio nostra fiet

$$\frac{(\alpha+f+\beta z)^n}{(\alpha+g+\beta z)^n} = \frac{a}{b} \quad \text{sive} \quad \frac{\left(\frac{\alpha+f}{\beta}+z\right)^n}{\left(\frac{\alpha+g}{\beta}+z\right)^n} = \frac{a}{b};$$

atque nunc manifestum est quantitates α et β semper ita capi posse, ut fiat

$$\frac{\alpha+f}{\beta} = a \quad \text{et} \quad \frac{\alpha+g}{\beta} = b,$$

quandoquidem hinc deducitur

$$\alpha = \frac{bf-ag}{a-b} \quad \text{ideoque} \quad \beta = \frac{f-g}{a-b}.$$

Sicque formula illa, quae multo generalior videbatur, semper ad simplicissimam illam supra tractatam revocari potest neque idcirco quicquam novi inde est expectandum.

ANNOTATIO IN AEQUATIONES SUPRA EVOLUTAS

14. Si formas, quas pro radicibus harum aequationum supra assignavimus, accuratius perpendamus, haec omnia egregie convenire deprehenduntur cum coniectura illa, quam olim[1]) in medium proferre sum ausus, dum pro resolutione aequationis cuiuscumque gradus, in qua secundus terminus desit, veluti

$$x^n = px^{n-2} + qx^{n-3} + rx^{n-4} + \text{etc.},$$

affirmavi semper dari aequationem resolventem uno gradu inferiorem huius formae

$$y^{n-1} - Ay^{n-2} + By^{n-3} - Cy^{n-4} + Dy^{n-5} - \text{etc.} = 0,$$

cuius radices, numero $n-1$, si fuerint α, β, γ, δ, ε etc., futurum sit

$$x = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \sqrt[n]{\delta} + \sqrt[n]{\varepsilon} + \text{etc.}$$

15. Cum igitur pro forma generali, quam supra tractavimus, radix inventa sit

$$x = \sqrt[n]{a^{n-1}b} + \sqrt[n]{a^{n-2}bb} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^3} + \cdots + \sqrt[n]{ab^{n-1}},$$

hinc sequitur aequationis resolventis ordinis $n-1$ radices fore

$$a^{n-1}b, \quad a^{n-2}bb, \quad a^{n-3}b^3, \quad a^{n-4}b^4, \quad \ldots \; ab^{n-1},$$

quae ergo erunt valores ipsius y. Quare cum coefficiens A sit summa omnium harum radicum, erit

$$A = \frac{ab(a^{n-1} - b^{n-1})}{a-b};$$

postremum autem huius aequationis membrum absolutum erit productum ex omnibus his radicibus, quod ergo erit

$$= a^{\frac{nn-n}{2}} b^{\frac{nn-n}{2}}.$$

Pro reliquis terminis percurramus aequationes particulares supra expositas.

1) Vide Commentationes 30 et 282 huius voluminis. P. St.

I. Pro aequatione tertii gradus

$$x^3 = 3abx + ab(a + b),$$

ubi erat radix

$$x = \sqrt[3]{aab} + \sqrt[3]{abb}.$$

Hic si aequatio resolvens statuatur

$$yy - Ay + B = 0,$$

eius radices erunt aab et abb ideoque

$$A = ab(a + b)$$

et

$$B = a^3b^3.$$

II. Pro aequatione quarti gradus

$$x^4 = 6abxx + 4ab(a + b)x + ab(aa + ab + bb).$$

Hic est radix

$$x = \sqrt[4]{a^3b} + \sqrt[4]{aabb} + \sqrt[4]{ab^3};$$

unde si aequatio resolvens statuatur

$$y^3 - Ayy + By - C = 0,$$

eius radices erunt a^3b, $aabb$, ab^3, quocirca habebimus

$$A = ab(aa + ab + bb),$$

$$B = a^3b^3(aa + ab + bb)$$

et

$$C = a^6b^6.$$

III. Pro aequatione quinti gradus

$$x^5 = 10abx^3 + 10ab(a + b)xx + 5ab(aa + ab + bb)x + ab(a^3 + aab + abb + b^3).$$

Hic igitur erit

$$x = \sqrt[5]{a^4b} + \sqrt[5]{a^3bb} + \sqrt[5]{aab^3} + \sqrt[5]{ab^4};$$

unde si aequatio resolvens statuatur

$$y^4 - Ay^3 + Byy - Cy + D = 0,$$

eius radices erunt a^4b, a^3bb, aab^3, ab^4, unde colligitur fore

$$A = ab(a^3 + aab + abb + b^3),$$
$$B = a^3b^3(a^4 + a^3b + 2aabb + ab^3 + b^4),$$
$$C = a^6b^6(a^3 + aab + abb + b^3),$$
$$D = a^{10}b^{10}.$$

IV. Pro aequatione sexti gradus

$$x^6 = 15abx^4 + 20ab(a+b)x^3 + 15ab(aa + ab + bb)xx$$
$$+ 6ab(a^3 + aab + abb + b^3)x + ab(a^4 + a^3b + aabb + ab^3 + b^4).$$

Hic igitur habebitur

$$x = \sqrt[6]{a^5b} + \sqrt[6]{a^4bb} + \sqrt[6]{a^3b^3} + \sqrt[6]{aab^4} + \sqrt[6]{ab^5};$$

unde si aequatio resolvens statuatur

$$y^5 - Ay^4 + By^3 - Cyy + Dy - E = 0,$$

eius radices erunt a^5b, a^4bb, a^3b^3, aab^4, ab^5, unde colligitur fore

$$A = ab(a^4 + a^3b + aabb + ab^3 + b^4),$$
$$B = a^3b^3(a^6 + a^5b + 2a^4bb + 2a^3b^3 + 2aab^4 + ab^5 + b^6),$$
$$C = a^6b^6(a^6 + a^5b + 2a^4bb + 2a^3b^3 + 2aab^4 + ab^5 + b^6),$$
$$D = a^{10}b^{10}(a^4 + a^3b + aabb + ab^3 + b^4),$$
$$E = a^{15}b^{15},$$

ubi formulae mediae B et C ita concinnius exprimi possunt

$$B = a^3b^3(aa + bb)(a^4 + a^3b + aabb + ab^3 + b^4)$$

et

$$C = a^6b^6(aa + bb)(a^4 + a^3b + aabb + ab^3 + b^4),$$

quae determinationes fortasse aliquam lucem accendere possunt ad resolutionem aequationum generalem feliciori successu tractandam.

METHODUS NOVA AC FACILIS OMNIUM AEQUATIONUM ALGEBRAICARUM RADICES NON SOLUM IPSAS SED ETIAM QUASCUMQUE EARUM POTESTATES PER SERIES CONCINNAS EXPRIMENDI[1]

Conventui exhibita die 21. Septembris 1778

Commentatio 711 indicis Enestroemiani
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 12 (1794), 1801, p. 71—90
Summarium ibidem p. 66

SUMMARIUM

Feu Mr. Euler avoit déjà traité cette même matière dans un Mémoire antérieur à celui-ci, qui se trouve dans le Tome XV des Nouveaux Commentaires sous le titre: *Observationes circa radices aequationum*[2]), où il avoit donné une série infinie, exprimant la n^{me} puissance de la plus grande racine de l'équation algébrique d'un degré quelconque

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \text{etc.}$$

Dans le présent Mémoire il est revenu sur le même sujet; or il y traite non seulement une équation beaucoup plus générale

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \text{etc.,}$$

---

1) Confer hac cum dissertatione Commentationem 406 huius voluminis atque alias illas commentationes p. 263 laudatas. P. St.

2) C'est le mémoire 406 de ce volume. P. St.

mais la méthode même qu'il y employe, pour trouver, par une série infinie, la n^{me} puissance de la racine x^n, est aussi plus directe et plus facile; cependant elle n'est pas de nature a pouvoir s'en faire une idée précise, sans entrer dans des détails que les Analystes aimeront mieux lire dans le Mémoire même, où nous nous voyons obligé de renvoyer.

1. Primus, qui hoc argumentum satis felici successu tractavit, erat ingeniosissimus LAMBERT[1]) non ita pridem beate defunctus[2]), qui huiusmodi series pro aequationibus trinomialibus methodo prorsus singulari per approximationes procedente elicuit. Verum ista methodus calculos maxime operosos ac taediosos requirebat, ita ut inventis aliquot terminis initialibus eundem calculum ulterius prosequi non potuerit, sed tantum ex egregio ordine, qui in prioribus terminis observabatur, per inductionem sequentes concludere fuerit coactus. Quamobrem iam ex illo tempore plurimum studii collocavi in methodum directam et planiorem inquirendi, quae ad easdem series perduceret.

2. In huiusmodi autem methodum non multo post incidi, quam in Commentariorum Novorum Tomo XV. fusius exposui[3]), ubi in genere aequationem sub hac forma contentam

$$1 = \frac{A}{x} - \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} - \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} - \text{etc.}$$

sum contemplatus; cuius radices si fuerint α, β, γ etc., notum est earum summam esse $= A$, summam quadratorum $= A^2 - 2B$, summam cuborum $= A^3 - 3AB + 3C$, et ita porro. Hinc igitur pro summa potestatum quarumcumque $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n +$ etc. similem expressionem investigavi, cuius legem progressionis in infinitum extendi observavi; cum tamen pro quovis casu eos tantum terminos accipi oporteat, qui a fractionibus sint liberati; unde mihi in mentem venit in valores istarum serierum, si in infinitum continuentur, inquirere. Mox autem facili ratiocinio intellexi earum summam eandem potestatem solius maximae radicis, puta α^n, definire.

1) Vide notam p. 274. P. St.

2) LAMBERT die 25. Septembris 1777 mortuus erat. P. St.

3) Vide Commentationem 406 huius voluminis. P. St.

3. Cum igitur seriem infinitam essem adeptus, quae potestatem exponentis n maximae radicis, scilicet α, exprimeret, mox perspexi istam seriem egregie cum LAMBERTINA convenire; tum vero haud amplius difficile erat similes series pro omnibus aequationibus sub hac forma multo generaliori contentas

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \text{etc.}$$

exhibere, ubi exponentibus α, β, γ, δ etc. adeo omnes plane valores, sive positivos sive negativos, sive integros sive fractos, tribuere licet. Nihilo vero minus singuli huius seriei termini egregio ordine procedunt hosque adeo, quousque libuerit, facile continuare licet, ita ut hic nihil plane inductioni vel coniecturae concedere necesse sit.

4. Cum autem haec methodus ex principio prorsus alieno et per ambages non parum molestas sit deducta, plurimum laboravi, ut methodum magis directam et faciliori negotio ad scopum perducentem perscrutarer, quin etiam labores meos in aliquot dissertationibus cum Academia communicatis accuratius exposui.[1] Nunc autem idem argumentum retractans in methodum longe faciliorem ac per nullas ambages procedentem incidi, quam hoc loco clarius explicare constitui.

5. Hic igitur consideraturus sum aequationem algebraicam sub hac forma generalissima contentam

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \text{etc.},$$

ubi ante omnia facile patet sine ulla restrictione loco litterae A unitatem scribi posse, ita ut aequatio, quam hic tractare suscipio, sit

$$1 = \frac{1}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \text{etc.},$$

ex qua statim patet, si litterae B, C, D etc. evanescerent, fore $x = 1$; unde sequitur in genere radicem x certe seriei infinitae aequalem statui posse, cuius primus terminus sit unitas, sequentes vero litteras B, C, D etc. utcumque

1) Vide Commentationes 406, 532, 631, 632, 643 huius voluminis. P. St.

inter se compositas complectantur, quandoquidem in eam praeter ipsas has litteras singulas tam omnia producta ex binis quam ex ternis et pluribus ingredi debent.

6. Quoniam autem hic mihi propositum est non solum in ipsam radicem x sed in genere in eius potestatem quamcumque x^n inquirere, ipsam aequationem hac forma repraesentabo

$$x^n - x^{n-\alpha} = Bx^{n-\beta} + Cx^{n-\gamma} + Dx^{n-\delta} + \text{etc.},$$

ubi primum terminum a dextra in sinistram transtuli, ut ad dextram tantum litterae B, C, D etc. cum suis potestatibus coniunctae occurrant, ex quarum permixtione verum valorem potestatis x^n investigari oportet; ubi facile perspicitur eiusmodi seriem pro x^n prodire debere, in qua post terminum primum 1 non solum singulae litterae B, C, D etc. sed etiam omnia producta tam ex binis quam ternis pluribusque occurrere debeant, ita ut totum negotium iam huc redeat, ut singulis his productis debiti coefficientes assignentur, qui utique potissimum pendebunt ab exponente n, praeter reliquos exponentes datos α, β, γ, δ, ε etc.

7. Hic autem plurimum iuvabit istos coefficientes per idoneos characteres repraesentare, quibus scilicet omnis confusio ex infinita multitudine terminorum oriunda evitari queat. Ita coefficientes ipsarum litterarum B, C, D etc., quatenus ad potestatem exponentis n referuntur, his signis denotabo $(\overset{n}{B})$, $(\overset{n}{C})$, $(\overset{n}{D})$ etc. Unde si alius quicumque exponens, puta m, proponeretur, hi coefficientes ita forent designandi $(\overset{m}{B})$, $(\overset{m}{C})$, $(\overset{m}{D})$ etc., quod idem tenendum est de omnibus productis ex binis pluribusve harum litterarum compositis. Veluti si in genere occurrat hoc productum $B^b C^c D^d$ etc., eius coefficientem pro potestate exponentis n ita sum repraesentaturus $(B^b \overset{n}{C^c} D^d \text{ etc.})$.

8. Hoc igitur signandi modo constituto valor potestatis quaesitae x^n per huiusmodi seriem exprimetur

$$\begin{aligned} x^n = 1 &+ (\overset{n}{B})B + (\overset{n}{C})C + (\overset{n}{D})D + (\overset{n}{E})E + \text{etc.} \\ &+ (\overset{n}{B^2})B^2 + (\overset{n}{C^2})C^2 + (\overset{n}{D^2})D^2 + (\overset{n}{E^2})E^2 + \text{etc.} \\ &+ (\overset{n}{BC})BC + (\overset{n}{BD})BD + (\overset{n}{BE})BE + \text{etc.} \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

cuius ergo seriei terminus generalis omnes plane in se complectens erit

$$\overset{n}{(B^b C^c D^d E^e \text{ etc.})}\, B^b C^c D^d E^e \text{ etc.}$$

9. Ne autem hic opus sit calculum ad plures horum terminorum simul applicare, praecipuum momentum huc redit, ut singulos coefficientes ex paucioribus terminis iam cognitis investigare doceamus. Ac primo quidem si quaeratur coefficiens $\overset{n}{(B)}$ sive terminus $\overset{n}{(B)}B$ pro potestate x^n, evidens est pro $x^{n-\alpha}$ hunc terminum fore $\overset{n-\alpha}{(B)}B$, unde ex ipsa aequatione, quatenus hic tantum de terminis formae B agitur, erit

$$\overset{n}{(B)}B - \overset{n-\alpha}{(B)}B = Bx^{n-\beta} = B,$$

propterea quod potestas $x^{n-\beta}$ nullas harum litterarum involvere debet ideoque pro $x^{n-\beta}$ scribi debet unitas utpote prima pars valoris veri. Quoniam nunc hic per B dividi potest, habebimus pro coefficiente quaesito $\overset{n}{(B)}$ hanc aequationem

$$\overset{n}{(B)} - \overset{n-\alpha}{(B)} = 1;$$

simili modo pro reliquis habemus has aequationes

$$\overset{n}{(C)} - \overset{n-\alpha}{(C)} = 1, \quad \overset{n}{(D)} - \overset{n-\alpha}{(D)} = 1, \quad \overset{n}{(E)} - \overset{n-\alpha}{(E)} = 1 \quad \text{etc.}$$

10. Sin autem quaeramus coefficientem $\overset{n}{(B^2)}$, evidens est ex parte dextra nostrae aequationis solum terminum $Bx^{n-\beta}$ in computum venire, quia nullae aliae litterae hic occurrunt. Erit igitur

$$\overset{n}{(B^2)}B^2 - \overset{n-\alpha}{(B^2)}B^2 = \overset{n-\beta}{(B)}B^2,$$

ergo per B^2 dividendo

$$\overset{n}{(B^2)} - \overset{n-\alpha}{(B^2)} = \overset{n-\beta}{(B)}.$$

Simili modo erit

$$\overset{n}{(C^2)} - \overset{n-\alpha}{(C^2)} = \overset{n-\gamma}{(C)},$$

tum vero

$$\overset{n}{(D^2)} - \overset{n-\alpha}{(D^2)} = \overset{n-\delta}{(D)}$$

etc.

11. Sin autem porro quaeratur coefficiens $(\overset{n}{BC})$ sive terminus $(\overset{n}{BC})BC$, manifestum est ex parte aequationis dextra binos terminos $Bx^{n-\beta}$ et $Cx^{n-\gamma}$ hic in subsidium vocari debere. Ut enim forma BC resultet, pro priore parte pro $x^{n-\beta}$ sumi debet $(\overset{n-\beta}{C})C$, pro posteriore autem loco $x^{n-\gamma}$ scribi debet $(\overset{n-\gamma}{B})B$ sicque nostra aequatio per BC divisa erit

$$(\overset{n}{BC}) - (\overset{n-\alpha}{BC}) = (\overset{n-\beta}{C}) + (\overset{n-\gamma}{B}).$$

Eodem modo erit

$$(\overset{n}{BD}) - (\overset{n-\alpha}{BD}) = (\overset{n-\beta}{D}) + (\overset{n-\delta}{B}),$$

$$(\overset{n}{CD}) - (\overset{n-\alpha}{CD}) = (\overset{n-\gamma}{D}) + (\overset{n-\delta}{C})$$

et ita porro. Similique modo evidens est fore

$$(\overset{n}{BCD}) - (\overset{n-\alpha}{BCD}) = (\overset{n-\beta}{CD}) + (\overset{n-\gamma}{BD}) + (\overset{n-\delta}{BC})$$

atque porro

$$(\overset{n}{BCDE}) - (\overset{n-\alpha}{BCDE}) = (\overset{n-\varepsilon}{BCD}) + (\overset{n-\beta}{CDE}) + (\overset{n-\gamma}{BDE}) + (\overset{n-\delta}{BCE}).$$

12. Quodsi eadem littera saepius occurrat, ipsa quidem quadrata iam evolvimus, pro cubis vero habebimus

$$(\overset{n}{B^3}) - (\overset{n-\alpha}{B^3}) = (\overset{n-\beta}{B^2}),$$

$$(\overset{n}{C^3}) - (\overset{n-\alpha}{C^3}) = (\overset{n-\gamma}{C^2}),$$

$$(\overset{n}{D^3}) - (\overset{n-\alpha}{D^3}) = (\overset{n-\delta}{D^2})$$

etc.

Eodemque modo erit pro superioribus potestatibus

$$(\overset{n}{B^4}) - (\overset{n-\alpha}{B^4}) = (\overset{n-\beta}{B^3}),$$

$$(\overset{n}{B^5}) - (\overset{n-\alpha}{B^5}) = (\overset{n-\beta}{B^4}),$$

$$(\overset{n}{B^6}) - (\overset{n-\alpha}{B^6}) = (\overset{n-\beta}{B^5})$$

etc.

13. Sin autem plures litterae ingrediantur, ex parte aequationis dextra etiam plures termini in subsidium vocari debent, veluti ex sequentibus formulis patescit:

$$\overset{n}{(B^2 C)} - \overset{n-\alpha}{(B^2 C)} = \overset{n-\gamma}{(B^2)} + \overset{n-\beta}{(B C)},$$

$$\overset{n}{(B^2 C^2)} - \overset{n-\alpha}{(B^2 C^2)} = \overset{n-\gamma}{(B^2 C)} + \overset{n-\beta}{(B C^2)},$$

$$\overset{n}{(B^3 C)} - \overset{n-\alpha}{(B^3 C)} = \overset{n-\gamma}{(B^3)} + \overset{n-\beta}{(B^2 C)},$$

$$\overset{n}{(B^3 C^2)} - \overset{n-\alpha}{(B^3 C^2)} = \overset{n-\gamma}{(B^3 C)} + \overset{n-\beta}{(B^2 C^2)},$$

$$\overset{n}{(B^3 C^3)} - \overset{n-\alpha}{(B^3 C^3)} = \overset{n-\gamma}{(B^3 C^2)} + \overset{n-\beta}{(B^2 C^3)}.$$

Simili modo perspicuum est fore

$$\overset{n}{(B^3 C^2 D)} - \overset{n-\alpha}{(B^3 C^2 D)} = \overset{n-\beta}{(B^2 C^2 D)} + \overset{n-\gamma}{(B^3 C D)} + \overset{n-\delta}{(B^3 C^2)}.$$

Haecque exempla abunde sufficiunt ad coefficientes omnium plane productorum per huiusmodi aequationes designandos.

14. Per tales autem aequationes investigatio coefficientium utcumque complexorum ad coefficientes simpliciorum productorum reducitur, quos tamquam iam cognitos spectare licet, quandoquidem a determinatione simpliciorum operationes inchoamus. Scilicet si coefficiens quaesitus quicumque designetur per $\varphi : n$, siquidem tamquam functio ipsius n spectari potest, resolutio omnium harum aequationum revocatur ad hanc formam

$$\varphi : n - \varphi : (n - \alpha) = \Pi,$$

ubi Π est functio iam cognita litterae n. At vero mox videbimus huius aequationis resolutionem pro nostro instituto satis commode expediri posse.

15. Resolutio huius aequationis ad calculum differentiarum finitarum est referenda et perinde ac differentialium quantitatem constantem arbitrariam recipiet. Quare ne hinc ulla incertitudo relinquatur, ante omnia probe est notandum omnes coefficientes, quos quaerimus, ita comparatos esse debere, ut evanescant posito $n = 0$. Cum enim hoc casu fiat $x^n = 1$ ideoque ipsi primo

termino nostrae seriei aequalis, sequentes termini omnes litteras B, C, D etc. involventes hoc casu evanescere debebunt; unde necesse est, ut eorum coefficientes factorem n involvant.

16. Resolutio autem generalis huius aequationis $\varphi : n - \varphi : (n - \alpha) = \Pi$ parum adiumenti in hoc negotio esset allatura. At vero datur solutio particularis ad nostrum institutum imprimis accommodata, quam hic evolvi conveniet. Denotante scilicet n' ipsam quantitatem variabilem n constante quapiam c sive auctam sive minutam, ita ut sit $n' = n \pm c$, si fuerit

$$\varphi : n = \varDelta n(n' + \alpha)(n' + 2\alpha) \cdots (n' + i\alpha),$$

ubi $\varDelta$ itidem significat quantitatem constantem, erit

$$\varphi : (n - \alpha) = \varDelta(n - \alpha)n'(n' + \alpha)(n' + 2\alpha) \cdots (n' + (i - 1)\alpha),$$

unde ob factores communes $(n' + \alpha)(n' + 2\alpha) \cdots (n' + (i - 1)\alpha)$ erit

$$\begin{aligned}\varphi : n - \varphi : (n - \alpha) &= \varDelta(n'n + in\alpha - n'n + \alpha n') \cdots \\ &= \varDelta\alpha(n' + in)(n' + \alpha)(n' + 2\alpha) \cdots (n' + (i - 1)\alpha),\end{aligned}$$

quae expressio ergo aequabitur quantitati illi Π, unde sequens Lemma fundamenti loco hic constituamus.

LEMMA

17. *Proposita aequatione resolvenda*

$$\varphi : n - \varphi : (n - \alpha) = \Pi$$

quoties ista quantitas Π in hac forma continebitur

$$\Pi = \varDelta\alpha(n' + in)\{(n' + \alpha)(n' + 2\alpha)(n' + 3\alpha) \cdots (n' + (i - 1)\alpha)\},$$

tum semper erit

$$\varphi : n = \varDelta n(n' + \alpha)(n' + 2\alpha) \cdots (n' + i\alpha)$$

existente $n' = n \pm c$.

Haec forma iam ita est comparata, ut evanescat posito $n = 0$, sicque ad coefficientes quaesitos definiendos apprime est accommodata.

18. Iam huius Lemmatis beneficio omnes nostros coefficientes satis expedite determinare licebit; et quia magis compositos perpetuo ex simplicioribus derivari oportet, omnes terminos seriei generalis, quam quaerimus, pro potestate indefinita x^n in certos ordines distinguamus, quorum primus comprehendat terminos ipsas litteras B, C, D etc. simpliciter continentes; ad ordinem secundum referamus producta ex binis harum litterarum, cuiusmodi sunt B^2, BC, C^2 etc.; tertius ordo contineat productum ex ternis, cuiusmodi sunt B^3, B^2C, BCD etc.; quartus ordo producta ex quaternis et ita porro. Pro singulis ergo his ordinibus coefficientes investigabimus.

INVESTIGATIO TERMINORUM PRIMI ORDINIS

19. Omnium horum terminorum unica est forma B, pro cuius coefficiente supra habuimus hanc aequationem

$$\overset{n}{(B)} - \overset{n-\alpha}{(B)} = 1;$$

unde posito $\overset{n}{(B)} = \varphi : n$ erit hic $\Pi = 1$. Sumatur ergo in Lemmate praemisso $\varphi : n = \Delta n$, ita ut hic sit $i = 0$, et quoniam hinc fit $\varphi : (n - \alpha) = \Delta(n - \alpha)$, erit

$$\Pi = \Delta\alpha = 1,$$

unde fit $\Delta = \frac{1}{\alpha}$. Quamobrem coefficiens noster erit

$$\overset{n}{(B)} = \frac{n}{\alpha}$$

similique modo pro caeteris huius ordinis erit

$$\overset{n}{(C)} = \frac{n}{\alpha}, \quad \overset{n}{(D)} = \frac{n}{\alpha} \quad \text{etc.},$$

ita ut ipsi termini huius ordinis futuri sint

$$\frac{n}{\alpha}B + \frac{n}{\alpha}C + \frac{n}{\alpha}D + \frac{n}{\alpha}E + \text{etc.}$$

INVESTIGATIO TERMINORUM SECUNDI ORDINIS

20. Horum igitur terminorum dabitur duplex forma, vel B^2 vel BC, quorum ergo coefficientes sunt $\overset{n}{(B^2)}$ vel $\overset{n}{(BC)}$, quos indagari oportet. Pro priore autem supra iam dedimus hanc aequationem

$$\overset{n}{(B^2)} - \overset{n-\alpha}{(B^2)} = \overset{n-\beta}{(B)},$$

ita ut posito $\overset{n}{(B^2)} = \varphi : n$ sit $\Pi = \overset{n-\beta}{(B)}$. Cum igitur modo invenerimus esse $\overset{n}{(B)} = \frac{n}{\alpha}$, erit

$$\Pi = \frac{n-\beta}{\alpha}.$$

In Lemmate igitur fiat $i = 1$, ita ut sit $\varphi : n = \Delta n(n' + \alpha)$, unde oritur

$$\Pi = \Delta\alpha(n' + n) = \frac{n-\beta}{\alpha}.$$

Hinc ergo restituto $n' = n + c$ erit $\frac{n-\beta}{\alpha} = \Delta\alpha(2n + c)$, unde sequitur fore $2\Delta\alpha n = \frac{n}{\alpha}$ et $\Delta\alpha c = -\frac{\beta}{\alpha}$, unde fit $\Delta = \frac{1}{2\alpha\alpha}$ et $c = -\frac{\beta}{\Delta\alpha\alpha} = -2\beta$, ita ut sit $n' = n - 2\beta$.

21. Cum igitur sit $\Delta = \frac{1}{2\alpha\alpha}$ et $n' = n - 2\beta$, erit coefficiens ipsius B^2 quaesitus, scilicet $\overset{n}{(B^2)}$,

$$= \frac{n(n+\alpha-2\beta)}{2\alpha\alpha} = \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta}{2\alpha}.$$

Quare termini secundi ordinis formae B^2 erunt sequentes

$$\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta}{2\alpha}B^2 + \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\gamma}{2\alpha}C^2 + \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\delta}{2\alpha}D^2 + \text{etc.}$$

22. Pro altera forma BC supra attulimus hanc aequationem

$$\overset{n}{(BC)} - \overset{n-\alpha}{(BC)} = \overset{n-\beta}{(C)} + \overset{n-\gamma}{(B)}.$$

Cum igitur sit $\overset{n}{(B)} = \overset{n}{(C)} = \frac{n}{\alpha}$, si ponamus $\overset{n}{(BC)} = \varphi : n$, erit

$$\Pi = \frac{n-\beta}{\alpha} + \frac{n-\gamma}{\alpha} = \frac{2n-\beta-\gamma}{\alpha}.$$

In Lemmate igitur nostro sumamus $i = 1$, ut sit $\varphi : n = \varDelta n(n' + \alpha)$, fierique debet $\varDelta\alpha(n' + n) = \frac{2n - \beta - \gamma}{\alpha}$. Sumatur ergo primo $n' = n - \beta - \gamma$, ut fiat $\varDelta\alpha = \frac{1}{\alpha}$ ideoque $\varDelta = \frac{1}{\alpha\alpha}$, sicque erit coefficiens quaesitus

$$(\overset{n}{B}C) = \frac{n(n + \alpha - \beta - \gamma)}{\alpha\alpha} = \frac{2n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - \beta - \gamma}{2\alpha}.$$

23. Hinc ergo pro secundo ordine termini formae BC erunt

$$(\overset{n}{B}C) = \frac{2n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - \beta - \gamma}{2\alpha}$$

hincque

$$\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - \beta - \gamma}{2\alpha} 2BC + \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - \beta - \delta}{2\alpha} 2BD + \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - \gamma - \delta}{2\alpha} 2CD + \text{etc.};$$

quibus si adiungantur termini formae B^2 modo ante inventi, totus ordo secundus iam est absolutus.

INVESTIGATIO TERMINORUM TERTII ORDINIS

24. Prima forma in hoc ordine occurrens est B^3, pro cuius coefficiente supra nacti sumus hanc aequationem

$$(\overset{n}{B^3}) - (\overset{n-\alpha}{B^3}) = (\overset{n-\beta}{B^2}).$$

Cum igitur modo invenerimus

$$(\overset{n}{B^2}) = \frac{n(n + \alpha - 2\beta)}{\alpha \cdot 2\alpha},$$

erit hic

$$(\overset{n-\beta}{B^2}) = \varPi = \frac{n - \beta}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - 3\beta}{2\alpha}.$$

Hinc in Lemmate praemisso sumamus $i = 2$, ut inde fiat

$$\varPi = \varDelta\alpha(n' + 2n)(n' + \alpha).$$

Ut igitur posteriores factores evadant aequales, statui debet $n' = n - 3\beta$, quo factore communi sublato relinquetur haec aequatio

$$\varDelta\alpha(n' + 2n) = \varDelta\alpha(3n - 3\beta) = \frac{n - \beta}{2\alpha^2}.$$

Hic igitur commode divisio per $n-\beta$ succedit, ita ut hinc fiat $\Delta = \frac{1}{6\alpha^3}$. Sicque coefficiens quaesitus erit

$$(\overset{n}{B^3}) = \frac{n(n+\alpha-3\beta)(n+2\alpha-3\beta)}{\alpha\cdot 2\alpha\cdot 3\alpha},$$

unde per se patet termini C^3 coefficientem fore

$$(\overset{n}{C^3}) = \frac{n(n+\alpha-3\gamma)(n+2\alpha-3\gamma)}{\alpha\cdot 2\alpha\cdot 3\alpha}.$$

25. Secunda forma huius ordinis erit B^2C, pro cuius coefficiente supra repperimus hanc aequationem

$$(\overset{n}{B^2C}) - (\overset{n-\alpha}{B^2C}) = (\overset{n-\gamma}{B^2}) + (\overset{n-\beta}{BC}) = \Pi;$$

ergo ex valoribus iam inventis derivamus istas duas partes:

$$(\overset{n-\gamma}{B^2}) = \frac{(n-\gamma)(n+\alpha-2\beta-\gamma)}{\alpha\cdot 2\alpha},$$

deinde

$$(\overset{n-\beta}{BC}) = \frac{2(n-\beta)(n+\alpha-2\beta-\gamma)}{\alpha\cdot 2\alpha},$$

ubi evidens est posteriores factores aequales inter se prodire debuisse; unde ex additione orietur

$$\Pi = \frac{(3n-2\beta-\gamma)(n+\alpha-2\beta-\gamma)}{\alpha\cdot 2\alpha}.$$

In Lemmate igitur nostro sumi debet $i=2$ indeque fiet

$$\Pi = \Delta\alpha(n'+2n)(n'+\alpha);$$

quare, ut posteriores factores congruant, sumi debet $n' = n-2\beta-\gamma$, quibus sublatis remanebit haec aequatio

$$\frac{3n-2\beta-\gamma}{2\alpha^2} = \Delta\alpha(3n-2\beta-\gamma),$$

ubi iterum divisio per $3n-2\beta-\gamma$ succedit, ita ut hinc $\Delta = \frac{1}{2\alpha^3}$. Consequenter coefficiens quaesitus erit

$$(\overset{n}{B^2C}) = \frac{n(n+\alpha-2\beta-\gamma)(n+2\alpha-2\beta-\gamma)}{\alpha\cdot 2\alpha\cdot\alpha}$$

sive hoc modo

$$\frac{1}{3}(\overset{n}{B^2C}) = \frac{n(n+\alpha-2\beta-\gamma)(n+2\alpha-2\beta-\gamma)}{\alpha\cdot 2\alpha\cdot 3\alpha}.$$

26. Tertia denique forma huius ordinis est BCD, pro cuius coefficiente supra data est haec aequatio

$$(\overset{n}{BCD})-(\overset{n-\alpha}{BCD}) = (\overset{n-\beta}{CD}) + (\overset{n-\gamma}{BD}) + (\overset{n-\delta}{BC}) = \Pi,$$

ita ut hic Π componatur ex tribus partibus, quae ad praesentes indices reductae erunt

$$(\overset{n-\beta}{CD}) = \frac{2(n-\beta)(n+\alpha-\beta-\gamma-\delta)}{\alpha\cdot 2\alpha},$$

$$(\overset{n-\gamma}{BD}) = \frac{2(n-\gamma)(n+\alpha-\beta-\gamma-\delta)}{\alpha\cdot 2\alpha},$$

$$(\overset{n-\delta}{BC}) = \frac{2(n-\delta)(n+\alpha-\beta-\gamma-\delta)}{\alpha\cdot 2\alpha};$$

ubi evidens est posteriores factores necessario inter se aequales prodire debuisse. Sicque his iunctis erit

$$\Pi = \frac{2(3n-\beta-\gamma-\delta)(n+\alpha-\beta-\gamma-\delta)}{\alpha\cdot 2\alpha}.$$

In nostro igitur Lemmate sumi oportet $i=2$, ut inde prodeat

$$\Pi = \Delta\alpha(n'+2n)(n'+\alpha),$$

ubi manifesto sumi debet $n' = n-\beta-\gamma-\delta$; sicque etiam priores factores tolli poterunt hincque concludetur fore $\Delta = \frac{1}{\alpha^3}$. Consequenter coefficiens quaesitus producti BCD erit

$$(\overset{n}{BCD}) = \frac{6n(n+\alpha-\beta-\gamma-\delta)(n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta)}{\alpha\cdot 2\alpha\cdot 3\alpha}.$$

INVESTIGATIO TERMINORUM QUARTI ORDINIS

27. Prima forma in hoc ordine occurrens, quando scilicet omnes quatuor factores sunt inter se aequales, est B^4, pro cuius coefficiente supra haec aequatio est data

$$(\overset{n}{B^4}) - (\overset{n-\alpha}{B^4}) = (\overset{n-\beta}{B^3}) = \Pi.$$

Cum igitur modo invenerimus

$$(\overset{n}{B^3}) = \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\beta}{3\alpha},$$

erit

$$(\overset{n-\beta}{B^3}) = \frac{n-\beta}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-4\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-4\beta}{3\alpha} = \Pi.$$

Quia hic habentur tres factores, in Lemmate praemisso sumi debet $i=3$ indeque orietur

$$\Pi = \varDelta\alpha(n'+3n)(n'+\alpha)(n'+2\alpha);$$

ubi bini posteriores factores sponte se tollunt ponendo $n'=n-4\beta$; tum autem relinquetur haec aequatio

$$\frac{n-\beta}{6\alpha^3} = 4\varDelta\alpha(n-\beta),$$

unde fit $\varDelta = \frac{1}{24\alpha^4}$. Sicque coefficiens quaesitus pro forma B^4 erit

$$(\overset{n}{B^4}) = \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-4\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-4\beta}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-4\beta}{4\alpha}.$$

28. Secunda forma hic occurrens est B^3C, pro cuius coefficiente supra dedimus hanc aequationem

$$(\overset{n}{B^3C}) - (\overset{n-\alpha}{B^3C}) = (\overset{n-\gamma}{B^3}) + (\overset{n-\beta}{B^2C}) = \Pi.$$

Colligantur ergo ex formis supra inventis hae duae partes ac reperietur

$$(\overset{n-\gamma}{B^3}) = \frac{n-\gamma}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta-\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\beta-\gamma}{3\alpha},$$

$$(\overset{n-\beta}{B^2C}) = \frac{3(n-\beta)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta-\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\beta-\gamma}{3\alpha};$$

unde oritur

$$\Pi = \frac{4n-3\beta-\gamma}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta-\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\beta-\gamma}{3\alpha}.$$

In Lemmate ergo pro hoc casu sumi debet $i=3$, ut prodeat inde

$$\Pi = \varDelta\alpha(n'+3n)(n'+\alpha)(n'+2\alpha),$$

ubi statim patet sumi debere $n' = n - 3\beta - \gamma$; hocque modo omnes factores litteram n involventes se tolli patiuntur, quo facto reperietur $\varDelta = \frac{1}{6\alpha^4}$. Consequenter formae $B^3 C$ coefficiens quaesitus erit

$$(\overset{n}{B^3 C}) = \frac{4n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta-\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\beta-\gamma}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-3\beta-\gamma}{4\alpha}.$$

29. Tertia forma in hoc ordine est $B^2 C^2$, pro cuius coefficiente supra data est haec aequatio

$$(\overset{n}{B^2 C^2}) - (\overset{n-\alpha}{B^2 C^2}) = (\overset{n-\gamma}{B^2 C}) + (\overset{n-\beta}{B C^2}) = \varPi.$$

Hic vero erit primo

$$(\overset{n-\gamma}{B^2 C}) = \frac{3(n-\gamma)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-2\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-2\gamma}{3\alpha},$$

$$(\overset{n-\beta}{B C^2}) = \frac{3(n-\beta)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-2\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-2\gamma}{3\alpha},$$

unde fit

$$\varPi = \frac{2n-\beta-\gamma}{2\alpha^3}(n+\alpha-2\beta-2\gamma)(n+2\alpha-2\beta-2\gamma).$$

Quare si in Lemmate sumamus $i = 3$, quoque ut ante esse debet

$$\varPi = \varDelta\alpha(n'+3n)(n'+\alpha)(n'+2\alpha),$$

ubi manifesto sumi debet $n' = n - 2\beta - 2\gamma$, quo facto reperitur $\varDelta = \frac{1}{4\alpha^4}$. Sicque huius formae $B^2 C^2$ coefficiens quaesitus erit

$$(\overset{n}{B^2 C^2}) = \frac{6n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-2\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-2\gamma}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-2\beta-2\gamma}{4\alpha}.$$

30. Quarta forma ad hunc ordinem referenda est $B^2 CD$, pro cuius coefficiente ex principiis supra stabilitis haec aequatio statui debet

$$(\overset{n}{B^2 CD}) - (\overset{n-\alpha}{B^2 CD}) = (\overset{n-\delta}{B^2 C}) + (\overset{n-\gamma}{B^2 D}) + (\overset{n-\beta}{B CD}) = \varPi,$$

sicque $\varPi$ constat ex tribus partibus

$$(\overset{n-\delta}{B^2 C}) = \frac{3(n-\delta)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{3\alpha},$$

$$(\overset{n-\gamma}{B^2 D}) = \frac{3(n-\gamma)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{3\alpha},$$

$$(\overset{n-\beta}{B CD}) = \frac{6(n-\beta)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{3\alpha};$$

quibus ergo collectis fit

$$\Pi = \frac{4n - 2\beta - \gamma - \delta}{2\alpha^3}(n + \alpha - 2\beta - \gamma - \delta)(n + 2\alpha - 2\beta - \gamma - \delta),$$

cui ex Lemmate haec expressio

$$\Delta\alpha(n' + 3n)(n' + \alpha)(n' + 2\alpha)$$

reddi debet aequalis, quod egregie succedet sumendo $n' = n - 2\beta - \gamma - \delta$; hinc enim colligetur $\Delta = \frac{1}{2\alpha^4}$. Consequenter huius formae B^2CD coefficiens debitus ita exprimetur

$$(B^2\overset{n}{C}D) = \frac{12n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - 2\beta - \gamma - \delta}{2\alpha} \cdot \frac{n + 2\alpha - 2\beta - \gamma - \delta}{3\alpha} \cdot \frac{n + 3\alpha - 2\beta - \gamma - \delta}{4\alpha}.$$

31. Postrema forma huius ordinis est $BCDE$, pro cuius coefficiente habetur haec aequatio

$$(B\overset{n}{C}DE) - (B\overset{n-\alpha}{C}DE) = (B\overset{n-\varepsilon}{C}D) + (B\overset{n-\delta}{C}E) + (B\overset{n-\gamma}{D}E) + (C\overset{n-\beta}{D}E).$$

Has igitur quatuor partes hic evolvamus

$$(B\overset{n-\varepsilon}{C}D) = \frac{6(n-\varepsilon)}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon}{2\alpha} \cdot \frac{n + 2\alpha - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon}{3\alpha},$$

$$(B\overset{n-\delta}{C}E) = \frac{6(n-\delta)}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon}{2\alpha} \cdot \frac{n + 2\alpha - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon}{3\alpha},$$

$$(B\overset{n-\gamma}{D}E) = \frac{6(n-\gamma)}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon}{2\alpha} \cdot \frac{n + 2\alpha - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon}{3\alpha},$$

$$(C\overset{n-\beta}{D}E) = \frac{6(n-\beta)}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon}{2\alpha} \cdot \frac{n + 2\alpha - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon}{3\alpha}.$$

His igitur in unam summam collectis erit

$$\Pi = \frac{4n - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon}{\alpha^3}(n + \alpha - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon)(n + 2\alpha - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon).$$

Quare ut Lemmatis forma pro Π data huic evadat aequalis, manifesto sumi debet $n' = n - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon$, unde fit $\Delta = \frac{1}{\alpha^4}$. Sicque istius formae $BCDE$ coefficiens erit

$$(BC\overset{n}{D}E) = \frac{24n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon}{2\alpha} \cdot \frac{n + 2\alpha - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon}{3\alpha} \cdot \frac{n + 3\alpha - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon}{4\alpha}.$$

CONCLUSIO GENERALIS

32. Lex, qua istae expressiones ulterius progrediuntur, iam ita est manifesta, ut superfluum foret has operationes ulterius continuare, id quod unico exemplo illustrasse sufficiet. Sit igitur proposita haec forma ordinis noni $B^4 C^3 D^2$, cuius coefficiens naturalis ex lege combinationis ortus est, ut constat,

$$N = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2}.$$

Iam si brevitatis gratia ponamus $4\beta + 3\gamma + 2\delta = \lambda$, coefficiens huius formae pro nostro instituto erit

$$(B^4 \overset{n}{C^3} D^2) = N \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\lambda}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\lambda}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-\lambda}{4\alpha} \cdot \frac{n+4\alpha-\lambda}{5\alpha} \cdots \frac{n+8\alpha-\lambda}{9\alpha};$$

ubi si loco N valorem modo datum substituamus, nanciscemur

$$(B^4 \overset{n}{C^3} D^2) = \frac{1}{\alpha^9} \cdot \frac{n(n+\alpha-\lambda)(n+2\alpha-\lambda)\cdots(n+8\alpha-\lambda)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2}.$$

33. Hinc iam in genere pro producto $B^b C^c D^d E^e$ etc. eundem coefficientem reperimus, quem iam olim[1]) in Tomo Commentariorum XV. ex longe aliis principiis elicueram; scilicet, si summa omnium exponentium

$$b + c + d + e + \text{etc.} = i,$$

quo numero ordo, ad quem hoc productum est referendum, indicatur, tum vero statuatur

$$b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon + \text{etc.} = \lambda,$$

coefficiens istius producti ita exprimetur:

$$\frac{1}{\alpha^i} \cdot \frac{n(n+\alpha-\lambda)(n+2\alpha-\lambda)(n+3\alpha-\lambda)\cdots(n+(i-1)\alpha-\lambda)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots b \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots c \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots d \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots e \cdot \text{etc.}}.$$

34. Quodsi ergo omnia possibilia producta litterarum B, C, D, E etc. cum his coefficientibus coniuncta in unam summam colligantur eique unitas praefigatur, habetur valor potestatis indefinitae x^n, qui convenit huic aequationi algebraicae

$$1 = \frac{1}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \frac{E}{x^\varepsilon} + \text{etc.}$$

1) Vide Commentationem 406 huius voluminis. P. St.

35. In hac aequatione omnes numeratores litteris diversis B, C, D, E etc. designavimus, propterea quod ad diversas potestates ipsius x referuntur. Unde intelligitur, etiamsi forte esset $C = B$, tamen producti, quod esset B^2, coefficientem neutiquam ex forma $(\overset{n}{B}B)$ sed perpetuo ex forma $(\overset{n}{B}C)$ repeti debere.

36. Quoniam ope huius methodi valorem cuiuscumque potestatis indefinitae x^n formavimus, nil certe facilius est quam hinc ipsam aequationis propositae radicem x determinare, ponendo scilicet $n = 1$. Unde hoc insigne paradoxon se offert, quod eadem methodus nullum plane usum praestatura fuisset, si eius ope ipsam radicem x elicere voluissemus, propterea quod vis istius methodi in eo ipso est constituenda, quod potestatem plane indefinitam x^n iam statim ab initio simus contemplati, unde omnium aliarum potestatum $x^{n-\alpha}$, $x^{n-\beta}$, $x^{n-\gamma}$ etc. valores exprimere licuit. Ceterum alia insignia phaenomena, quae series hoc modo formatae offerunt, hic non commemoranda censeo, cum hoc argumentum iam alibi fusius sim prosecutus, hoc vero loco mihi potissimum fuerit propositum methodum directam in medium afferre tales series satis expedite inveniendi.

DE RESOLUTIONE FRACTIONUM COMPOSITARUM IN SIMPLICIORES[1]

Conventui exhibita die 11. Januarii 1779

Commentatio 728 indicis Enestroemiani
Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 1 (1803/6), 1809, p. 3—25

1. Cum olim hoc argumentum tractassem[2], praecipue ad eius usum in calculo integrali respexi, unde necesse erat denominatorem fractionis propositae in suos factores simplices seu primi gradus, in quibus scilicet quantitas variabilis non ultra primam potestatem assurgit, resolvere; quo facto methodum tradidi pro quolibet denominatoris factore simplici fractionem partialem inde oriundam investigandi sive eius numeratorem, qui semper est constans, definiendi. Quodsi enim hac ratione pro singulis factoribus simplicibus tales fractiones partiales fuerint formatae, summa omnium aequalis esse debet ipsi fractioni propositae, siquidem fuerit genuina et quantitas variabilis in numeratore pauciores habeat dimensiones quam in denominatore; sin autem fuerit spuria et variabilis in numeratore ad totidem vel adeo ad plures dimensiones surrexerit, tum ad illam fractionum partialium summam insuper partes integras, quae ex divisione numeratoris per denominatorem resultant, addi oportet.

---

1) Confer hac cum dissertatione Commentationem 540 huius voluminis atque alias illas commentationes p. 370 laudatas. P. St.

2) Vide L. Euleri *Introductionem in analysin infinitorum,* Lausannae 1748, t. I cap. 2 et 12, nec non *Institutiones calculi differentialis* (1755), partis posterioris cap. 18; *Leonhardi Euleri Opera omnia,* series I, vol. 8 et 10. P. St.

2. Quoniam autem plerumque evenire solet, ut plures denominatoris factores simplices evadant imaginarii, quorum bini coniuncti semper productum reale constituunt, methodum meam etiam ad factores secundi gradus huius formae $a + bx + cxx$ extendi atque demonstravi, quemadmodum fractionis hinc natae numerator inveniri debeat, qui plerumque duabus constabit partibus, dum in eo etiam prima potestas variabilis inesse potest, ita ut fractio inde nata hanc habitura sit formam $\frac{\alpha + \beta x}{a + bx + cxx}$. In hoc autem negotio calculum imaginariorum in subsidium vocare sum coactus.

3. Peculiaria autem artificia requirebant casus, quibus denominator fractionis propositae duos pluresve complectitur factores inter se aequales, quorum evolutio in fractiones partiales longas ambages postulabat, imprimis quando duo pluresve factores secundi gradus fuerint inter se aequales. Nunc igitur aliam methodum proponam, quam etiam ad factores altiorum graduum applicare liceat, sub quibus ergo etiam quadrata altioresque potestates factorum tam primi quam secundi gradus comprehendi possunt. Imprimis autem haec methodus a praecedente in eo discrepat, quod totum negotium sine quantitatibus imaginariis absolvi possit, quam ergo methodum hic accuratius exponere mecum constitui.

4. Considero igitur hunc in finem fractionem quamcumque compositam huius formae

$$\frac{N}{PQR \text{ etc.}},$$

cuius denominator complectatur quotcumque factores P, Q, R, S etc., qui singuli non solum sint primi vel secundi vel tertii, sed etiam cuiuscumque altioris gradus, ita ut, si cuiuspiam factoris gradus ad n dimensiones ascendat, eius forma futura sit

$$\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \text{etc.}$$

Imprimis autem in hocce negotio necesse est, ut omnes isti factores sint inter se primi neque ullum factorem communem involvant. Numerator vero N functio esse potest quaecumque *rationalis integra* ipsius x; ac perinde est, sive haec fractio sit *genuina* sive *spuria,* quandoquidem posteriore casu partes integras in fractione proposita contentas per divisionem actualem eruere licet, quod quidem, postquam iam omnes fractiones partiales fuerint inventae, demum fieri poterit.

5. Primo igitur hanc fractionem resolvi oportebit in huiusmodi partes

$$\frac{\mathfrak{P}}{P} + \frac{\mathfrak{Q}}{Q} + \frac{\mathfrak{R}}{R} + \text{etc.},$$

quae scilicet ex singulis factoribus denominatoris oriuntur. Deinde vero, si in numeratore N quantitas variabilis x ascendat ad totidem dimensiones, quot habet in denominatore $PQRS$ etc., praeterea accedet quantitas constans $\mathfrak{A}$; sin autem ad plures dimensiones ascendat, insuper accedent partes integrae $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}xx +$ etc. Quemadmodum igitur omnes istae partes commode inveniri queant, methodum facilem hic sum traditurus, quae ita est comparata, ut quaelibet pars sine respectu ad reliquas habito seorsim investigari possit.

6. Cum igitur ex denominatoris factore P oriri statuamus fractionem $\frac{\mathfrak{P}}{P}$, ante omnia est notandum hanc fractionem esse debere genuinam, ita ut in eius numeratore $\mathfrak{P}$ quantitas x pauciores habeat dimensiones quam in denominatore P, quandoquidem partes integrae in forma $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}xx + \mathfrak{D}x^3$ $+$ etc. contineri ponuntur. Unde si factor P fuerit primi gradus formae $\alpha + \beta x$, numerator $\mathfrak{P}$ erit quantitas constans a; sin autem factor P fuerit secundi ordinis, fieri potest, ut etiam x in $\mathfrak{P}$ ingrediatur, ita ut habeat formam $a + bx$; at si P fuerit factor tertii gradus formae $\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3$ tum forma numeratoris $\mathfrak{P}$ esse poterit $a + bx + cxx$, et ita porro; ita ut in genere numerator $\mathfrak{P}$ involvere possit omnes potestates ipsius x *minores*, quam in denominatore occurrunt. In operationibus igitur sequentibus probe cavendum erit, ne in numeratore $\mathfrak{P}$ investigando istae potestates minores ex calculo extirpentur. Hoc observato methodum hic sum expositurus, cuius ope pro qualibet harum fractionum numerator $\mathfrak{P}$ sine respectu ad reliquas habito inveniri queat.

INVESTIGATIO FRACTIONIS $\frac{\mathfrak{P}}{P}$ QUAE SCILICET EX DENOMINATORIS FACTORE P ORITUR

7. Quoniam igitur fractio proposita $\frac{N}{PQR\,\text{etc.}}$ summae omnium partium aequalis esse debet, ita ut habeatur sequens aequatio

$$\frac{N}{PQR\,\text{etc.}} = \frac{\mathfrak{P}}{P} + \frac{\mathfrak{Q}}{Q} + \frac{\mathfrak{R}}{R} + \cdots + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}xx + \text{etc.},$$

pro fractione $\frac{\mathfrak{P}}{P}$ indaganda reliquas partes omnes sub charactere etc. complectamur, ita ut habeamus hanc aequationem

$$\frac{N}{PQR\,\text{etc.}}=\frac{\mathfrak{P}}{P}+\text{etc.}$$

In ipsa autem fractione proposita, quia hic tantum denominatoris factorem P respicimus, productum reliquorum factorum QRS etc. littera M designemus, ita ut iam habeamus hanc aequationem

$$\frac{N}{PM}=\frac{\mathfrak{P}}{P}+\text{etc.},$$

unde valorem numeratoris $\mathfrak{P}$ erui oportet.

8. Hunc in finem multiplicemus hanc aequationem $\frac{N}{PM}=\frac{\mathfrak{P}}{P}+\text{etc.}$ per ipsum factorem P, ut prodeat ista $\frac{N}{M}=\mathfrak{P}+P\cdot\text{etc.}$, quae ergo statim praebet $\mathfrak{P}=\frac{N}{M}-P\cdot\text{etc.}$ Quamobrem si statuamus $P=0$, fiet

$$\mathfrak{P}=\frac{N}{M};$$

quae expressio cum sit fractio, totum negotium huc redit, quemadmodum inde functio integra ipsius x erui possit.

9. Incipiamus a casu simplicissimo, quo factor P est primi gradus ideoque numerator quaesitus $\mathfrak{P}$ quantitas constans atque ex aequatione $P=0$ statim eruitur

$$x=f,$$

qui valor in fractione $\frac{N}{M}$ substitutus verum nobis praebebit valorem ipsius $\mathfrak{P}$ quaesitum.

Sin autem factor P fuerit secundi gradus, ex aequatione $P=0$ elicimus

$$xx=fx+g,$$

unde omnes altiores potestates ipsius x per similem formam exprimere poterimus. Cum enim inde sit $x^3=fxx+gx$, si hic loco xx eius valor scribatur, habebimus

$$x^3=(ff+g)x+fg;$$

ac denuo per x multiplicando erit

$$x^4 = (f^3 + 2fg)x + (ffg + gg),$$

tum vero

$$x^5 = (f^4 + 3ffg + gg)x + (f^3 g + 2fgg)$$

hocque modo, quousque libuerit, progredi licebit, ita ut omnes potestates altiores ipsius x per talem formam $fx + g$ exprimantur.

10. Quodsi ergo hos valores tam in numeratore N quam in denominatore M substituamus, manifesto ad talem formam perveniemus

$$\frac{N}{M} = \mathfrak{P} = \frac{\alpha + \beta x}{a + bx};$$

ubi facile intelligitur numeratorem et denominatorem per eiusmodi factorem communem multiplicari posse, ut posito $xx = fx + g$ ex denominatore quantitas x penitus extirpetur, quo pacto debitus valor ipsius $\mathfrak{P}$ obtinebitur. Quodsi enim pro illo multiplicatore sumamus $p + qx$, denominator evadet $ap + (aq + bp)x + bqxx$, qui posito $xx = fx + g$ induet hanc formam

$$(aq + bp + fbq)x + (ap + gbq),$$

ubi tantum opus est p et q ita definire, ut fiat $aq + bp + fbq = 0$ sive

$$\frac{p}{q} = \frac{-fb - a}{b}.$$

Sumto ergo

$$p = -fb - a \quad \text{et} \quad q = b$$

denominator erit

$$= ap + gbq = gbb - afb - aa$$

ideoque constans. Numerator vero tum erit

$$(\alpha + \beta x)(p + qx) = \alpha p + (\alpha q + \beta p)x + \beta qxx,$$

qui ob $xx = fx + g$ reducitur ad debitam formam $fx + g$. Erit enim

$$N = (\alpha q + \beta p + \beta fq)x + (\alpha p + \beta gq),$$

ita ut numerator quaesitus sit

$$\mathfrak{P} = \frac{(\alpha q + \beta p + \beta fq)x + (\alpha p + \beta gq)}{gbb - abf - aa}.$$

11. Eodem modo si fuerit P factor tertii gradus, posito $P = 0$ fiet

$$x^3 = fxx + gx + h;$$

unde etiam omnes potestates altiores ipsius x per similem formam exprimi poterunt, in qua scilicet tantum prima et secunda eius insit potestas; inde enim colligitur fore

$$x^4 = (ff + g)xx + (fg + h)x + fh,$$

$$x^5 = (f^3 + 2fg + h)xx + (ffg + fh + gg)x + (ffh + gh).$$

Ulterius autem progrediendo evidens est has formulas constituere seriem recurrentem, cuius scala relationis[1]) est

$$f, \quad +g, \quad +h;$$

quo observato facile, quousque libuerit, progredi licebit.

12. Iam satis manifestum est, si denominator P fuerit gradus cuiuscumque, puta n, ex aequatione $P = 0$ semper fore

$$x^n = fx^{n-1} + gx^{n-2} + hx^{n-3} + \text{etc.},$$

unde simul omnes altiores potestates ipsius x per potestates n^{ima} inferiores exprimi poterunt. Quodsi iam isti valores tam in numeratore N quam in denominatore M substituantur, tum pro $\mathfrak{P}$ reperietur fractio, in cuius tam numeratore quam denominatore tantum potestates minores quam exponentis n occurrent. Tum vero haud difficulter intelligere licet semper talem multiplicatorem communem investigare licere, ut facta multiplicatione denominator evadat quantitas constans, numerator vero ad potestates minores quam exponentis n reducatur, quo pacto valor desideratus pro littera $\mathfrak{P}$ obtinebitur.

13. Hoc autem modo investigatio postremi multiplicatoris plerumque calculos perquam operosos et taediosos postularet; quamobrem plurimum intererit aliam excogitare methodum, cuius ope fractio inventa $\frac{N}{M}$ in aliam formam transmutari possit, cuius denominator evadat quantitas constans. Talis

1) Vide notam p. 339. P. St.

autem methodus huic principio innititur, quod, si duae fractiones $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ fuerint inter se aequales, tum iisdem etiam fractio haec $\frac{\alpha p+\beta r}{\alpha q+\beta s}$ futura sit aequalis, cuius rei veritas iam sponte in oculos incurrit.

14. Hoc principio stabilito, quoniam pro $\mathfrak{P}$ invenimus fractionem $\frac{N}{M}$, unde maiores potestates ipsius x iam exclusas esse assumimus, si hic successive tam supra quam infra multiplicetur per x, x^2, x^3 etc. et loco x^n et maiorum potestatum valores assignati substituantur, prodibunt aliae fractiones totidem pariter valorem ipsius $\mathfrak{P}$ exprimentes, quae sint $\frac{N'}{M'}$, $\frac{N''}{M''}$, $\frac{N'''}{M'''}$ etc., in quas tantum potestates minores quam x^n ingrediuntur. Harum iam binae ita per principium expositum facile combinari poterunt, ut posito

$$\mathfrak{P}=\frac{\alpha N+\beta N'}{\alpha M+\beta M'}$$

ex denominatore potestas inferiorum maxima, scilicet x^{n-1}, excludatur; quod si pluribus modis fuerit factum, simili modo ex his novis fractionibus aliae formari poterunt, in quarum denominatoribus maxima potestas tantum sit x^{n-2}; hocque modo ulterius progrediendo tandem pervenietur ad fractionem, cuius denominator prorsus sit constans, quae ergo valorem desideratum litterae $\mathfrak{P}$ praebebit. In his autem operationibus cautela supra memorata probe est observanda, ne scilicet istae fractiones, qualemcumque habeant formam, umquam deprimantur, etiamsi forte habuerint factorem numeratori ac denominatori communem.

15. Hac igitur methodo pro quolibet denominatoris principalis factore, sive P sive Q sive R sive S etc., fractiones partiales $\frac{\mathfrak{P}}{P}$, $\frac{\mathfrak{Q}}{Q}$, $\frac{\mathfrak{R}}{R}$, $\frac{\mathfrak{S}}{S}$ etc. seorsim assignari poterunt, in quarum numeratoribus quantitas x ubique ad pauciores potestates assurgat quam in denominatore.

ALIA METHODUS NUMERATOREM $\mathfrak{P}$ INVESTIGANDI

16. Postquam perventum fuerit ad aequalitatem $\frac{N}{M}$, ubi omnes ipsius x potestates iam sint minores quam in ipso denominatore P, singularis se mihi obtulit via multiplicatorem illum supra memoratum eruendi; qui si littera Π designetur, habebimus $\mathfrak{P}=\frac{N\Pi}{M\Pi}$. Iam quia requiritur, ut posito $P=0$

iste denominator evadat quantitas constans, hoc eveniet statuendo

$$M\Pi = C + P\Theta.$$

Sic enim ratione habita aequationis $P = 0$ utique fiet

$$\mathfrak{P} = \frac{N\Pi}{C}$$

sicque ista littera per functionem integram ipsius x exprimetur, postquam scilicet ex numeratore $N\Pi$ altiores potestates fuerint exclusae.

17. Nunc ad istas quantitates Π et Θ inveniendas evidens est, si quantitas variabilis x ut infinita spectetur, tum fore $M\Pi = P\Theta$ ideoque

$$\frac{\Pi}{\Theta} = \frac{P}{M};$$

unde patet fractionem $\frac{\Pi}{\Theta}$ proxime aequalem esse debere fractioni $\frac{P}{M}$. Hic igitur in subsidium vocare conveniet eandem operationem, quae in numeris institui solet, quando fractione quacumque proposita alia ipsi proxime aequalis quaeritur[1]). Simili enim modo quantitate P per M divisa residuum sumatur pro divisore, praecedens vero divisor pro dividendo; hocque modo procedatur, donec ad quotos fractos perveniatur, in quorum scilicet denominatore ipsa quantitas x insit. Tum enim si more solito ex quotis repertis fractiones formentur, ea, quae ultimo quoto integro respondet, nobis exhibebit ipsam fractionem $\frac{\Pi}{\Theta}$, ex qua deinceps numeratoribus et denominatoribus seorsim aequatis numerator $\mathfrak{P}$ facili negotio eruitur.

18. Quoniam autem tales operationes in quantitatibus algebraicis nondum sunt usitatae, rem exemplo illustrasse operae erit pretium. Sumamus igitur denominatorem

$$P = 1 + x^4,$$

at pro littera $\mathfrak{P}$ statuamus perventum esse ad hanc formam

$$\frac{x^3 + 1}{x^3 + xx + 1},$$

1) Vide L. EULERI *Introductionem in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, t. I cap. 18; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 8. P. St.

ita ut

$$N = x^3 + 1 \quad \text{et} \quad M = x^3 + xx + 1;$$

sicque erit fractio

$$\frac{P}{M} = \frac{x^4+1}{x^3+xx+1},$$

pro qua instituatur haec operatio

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|l}
x^3+xx+1 & x^4+1 & x & & & & \\
 & x^4+x^3+x & & & & & \\
\hline
 & -x^3-x+1 & x^3+xx+1 & -1 & & & \\
 & & x^3+x-1 & & & & \\
\hline
 & & +xx-x+2 & -x^3-x+1 & -x & & \\
 & & & -x^3+xx-2x & & & \\
\hline
 & & & -xx+x+1 & +xx-x+2 & -1 & \\
 & & & & +xx-x-1 & & \\
\hline
 & & & & +3 & -xx+x+1 & -\frac{xx}{3} \\
 & & & & & -xx & \\
\hline
 & & & & & +x+1 & \text{etc.}
\end{array}$$

Hic ergo quoti ordine sunt

$$x, \quad -1, \quad -x, \quad -1, \quad -\frac{xx}{3}.$$

Posita iam prima fractione primo quoto x subscribenda, ut vulgo fieri solet, $= \frac{1}{0}$ sequentes fractiones inde more solito formatae ita se habebunt

$$\begin{array}{ccccc}
x, & -1, & -x, & -1, & -\frac{1}{3}xx, \\
\frac{1}{0}, & \frac{x}{1}, & \frac{-x+1}{-1}, & \frac{xx}{x+1}, & \frac{-xx-x+1}{-x-2}.
\end{array}$$

Quarum fractionum ultima $\frac{xx+x-1}{x+2}$ ipsi fractioni $\frac{\Pi}{\Theta}$ est aequanda, ex quo fit

$$\Pi = xx + x - 1 \quad \text{et} \quad \Theta = x + 2.$$

19. Cum igitur posuerimus $M\Pi = C + P\Theta$, erit $C = M\Pi - P\Theta$. At vero pro nostro casu est

$$M\Pi = x^5 + 2x^4 + x - 1$$

et

$$P\Theta = x^5 + 2x^4 + x + 2,$$

unde denominator constans erit $C = -3$, consequenter valor numeratoris $\mathfrak{P}$ quaesitus

$$\mathfrak{P} = \frac{N\Pi}{-3} = -\frac{1}{3}(x^5 + x^4 - x^3 + xx + x - 1),$$

ubi autem potestates cubo altiores exturbari debent, quod fit ope aequationis $P = 1 + x^4 = 0$, unde colligitur $x^4 = -1$ et $x^5 = -x$, quo facto erit

$$\mathfrak{P} = +\frac{1}{3}(x^3 - xx + 2).$$

INVESTIGATIO PARTIUM INTEGRARUM SI QUAE IN FRACTIONE PROPOSITA CONTINEANTUR

20. Postquam omnes fractiones partiales, scilicet $\frac{\mathfrak{P}}{P}$, $\frac{\mathfrak{Q}}{Q}$, $\frac{\mathfrak{R}}{R}$ etc., per methodos expositas fuerint inventae, nil aliud superest, nisi ut partes integrae, quae forte in fractione proposita $\frac{N}{PQR\text{ etc.}}$ sunt contentae, veluti

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}xx + \text{etc.},$$

investigentur. Ponamus igitur, postquam omnes factores denominatoris fuerint in se invicem multiplicati, maximam potestatem ipsius x ibi contentam esse x^m. Nisi ergo etiam tanta potestas vel adeo maior in numeratore insit, nullae prorsus partes integrae habebuntur. Quando autem evenit, ut tales potestates in numeratore N insint, eas partes integras, quae tum necesse in fractione proposita continentur, sequenti modo facillime indagare licebit.

21. Ponamus primo maximam potestatem in numeratore N contentam esse ipsam x^m atque evidens est partem integram inveniri, si tantum *supremi* termini tam numeratoris quam denominatoris dividantur, hocque modo obtinebitur pars integra $\mathfrak{A}$. Sin autem summa potestas in numeratore occurrens fuerit x^{m+1}, tum pars integra reperietur, si divisio tantum inter *binos* supremos terminos instituatur, quo pacto orietur pars integra formae $\mathfrak{B}x + \mathfrak{A}$. Simili modo, si summa potestas in numeratore occurrens fuerit x^{m+2}, divisionem institui sufficiet inter *ternos* terminos supremos, unde quotus formae $\mathfrak{C}xx + \mathfrak{B}x + \mathfrak{A}$ resultabit. Hoc igitur modo operationes divisionis haud mediocriter sublevabuntur. Conveniet autem omnia, quae hactenus sunt praecepta, aliquot exemplis illustrare.

EXEMPLUM 1

22. *Proposita sit ista fractio*

$$\frac{x^4+1}{xx(x+1)}$$

in suas fractiones partiales resolvenda.

Sumatur hic primo $P=xx$ et $Q=x+1$ et $N=x^4+1$, ita ut pro prima fractione partiali habeamus $\frac{\mathfrak{P}}{xx}$, ubi $\mathfrak{P}=\frac{N}{M}=\frac{x^4+1}{1+x}$, posito scilicet $P=xx=0$, unde superiores potestates omnes evanescunt. Hic autem cavendum est, ne etiam inferiores ipsius x potestates pro nihilo habeantur, etiamsi pariter evanescant, idque ob cautelam supra memoratam. Erit igitur hoc casu

$$1^0 \quad \mathfrak{P}=\frac{1}{1+x};$$

tum vero primam methodum adhibendo, hoc est per x supra et infra multiplicando et loco xx cyphram scribendo, erit

$$2^0 \quad \mathfrak{P}=\frac{x}{x},$$

quae duae fractiones combinatae, uti supra est stabilitum, praebent fractionem, cuius denominator est constans, scilicet $\mathfrak{P}=\frac{1-x}{1}$, qui idem valor etiam prodit, dum altera methodus adhibetur. Fractio igitur partialis prior ex denominatoris factore xx orta erit

$$\frac{1-x}{xx}.$$

Quodsi iam fractio ex altero factore $Q=1+x$ nata statuatur $=\frac{\mathfrak{Q}}{Q}$, erit per Q multiplicando $\mathfrak{Q}=\frac{1+x^4}{xx}$, posito scilicet $1+x=0$, unde fit $x=-1$, $xx=+1$ et $x^4=+1$, unde statim in integris oritur $\mathfrak{Q}=2$, ita ut altera fractio partialis sit

$$\frac{2}{1+x}$$

ideoque ambae hae fractiones iunctae

$$\frac{1-x}{xx}+\frac{2}{1+x}.$$

Restat igitur, ut partes integrae in fractione proposita contentae eliciantur, quod fit, dum numerator $1+x^4$ dividitur per totum denominatorem ex duabus tantum partibus constantem x^3+xx, unde oritur quotus

$$x-1$$

ad fractiones partiales instar partium integrarum adiiciendus, quo facto fractio proposita $\frac{x^4+1}{x^2(x+1)}$ in sequentes partes resolvitur

$$\frac{1-x}{xx}+\frac{2}{1+x}+x-1,$$

quae tres partes in unam summam collectae revera dant $\frac{x^4+1}{xx(x+1)}$.

EXEMPLUM 2

23. *Sit proposita haec fractio*

$$\frac{x^6}{(1+xx)(1-x)^2}$$

in suas fractiones partiales resolvenda.

Hic ergo est $N=x^6$, $P=1+xx$, $Q=(1-x)^2$. Si igitur fractiones partiales statuantur $\frac{\mathfrak{P}}{1+xx}$ et $\frac{\mathfrak{Q}}{(1-x)^2}$, erit primo $\mathfrak{P}=\frac{x^6}{(1-x)^2}$, posito scilicet $1+xx=0$, unde fit $xx=-1$, $x^3=-x$, $x^4=+1$, $x^5=+x$ et $x^6=-1$, ex quo colligitur $\mathfrak{P}=\frac{-1}{(1-x)^2}$. Hic autem denominatorem evolvi oportet, quo scribi possit -1 loco xx, ita ut prodeat

$$1^0 \quad \mathfrak{P}=\frac{1}{2x};$$

tum vero multiplicando supra et infra per x erit

$$2^0 \quad \mathfrak{P}=\frac{x}{2xx}=-\frac{x}{2}$$

sicque prima fractio partialis erit

$$\frac{-x}{2(1+xx)}.$$

Pro altera fractione habebimus $\mathfrak{Q}=\frac{x^6}{1+xx}$ posito $(1-x)^2=0$, unde autem neutiquam concludi debet $x=1$; sed evolutione facta, perinde ac si

nulla binomii potestas esset, statui debet $xx = 2x - 1$, unde $x^3 = 3x - 2$, $x^4 = 4x - 3$, $x^5 = 5x - 4$ et $x^6 = 6x - 5$. Hinc erit

$$1^0 \quad \mathfrak{Q} = \frac{6x-5}{2x},$$

ex qua fractione more solito formatur

$$2^0 \quad \mathfrak{Q} = \frac{7x-6}{4x-2},$$

quibus debite combinatis ex denominatore elidetur x, ut fiat $\mathfrak{Q} = \frac{5x-4}{2}$, unde altera fractio partialis erit

$$\frac{5x-4}{2(1-x)^2}.$$

Partes integrae denique orientur, si numerator x^6 dividatur per denominatorem et quidem, uti iam supra innuimus, tantum per ternos terminos supremos $x^4 - 2x^3 + 2xx$, unde quotus oritur

$$xx + 2x + 2.$$

Hoc igitur modo tota resolutio ita se habebit

$$\frac{x^6}{(1+xx)(1-x)^2} = \frac{-x}{2(1+xx)} + \frac{5x-4}{2(1-x)^2} + xx + 2x + 2.$$

EXEMPLUM 3

24. *Proposita sit haec fractio*

$$\frac{1+xx}{x^5(1-xx)^2}$$

in suas fractiones partiales resolvenda.

Quoniam hic nullae partes integrae occurrunt, sint fractiones partiales $\frac{\mathfrak{P}}{x^5}$ et $\frac{\mathfrak{Q}}{(1-xx)^2}$; ac pro priore erit $\mathfrak{P} = \frac{1+xx}{(1-xx)^2}$, posito scilicet $x^5 = 0$, unde etiam omnes potestates altiores evanescent. Cum igitur facta evolutione sit

$$\text{I.} \quad \mathfrak{P} = \frac{1+xx}{1-2xx+x^4},$$

fractiones reliquae erunt

$$\text{II.} \quad \frac{x+x^3}{x-2x^3}, \qquad \text{III.} \quad \frac{xx+x^4}{xx+2x^4}, \qquad \text{IV.} \quad \frac{x^3}{x^3}, \qquad \text{V.} \quad \frac{x^4}{x^4}.$$

Iam eliminando ex fractione principali I. potestatem x^4 ope ultimae V. ex denominatore orietur

$$1^0 \quad \mathfrak{P} = \frac{1 + xx - x^4}{1 - 2xx};$$

at facto eodem cum III. et V. erit

$$2^0 \quad \mathfrak{P} = \frac{xx + 3x^4}{xx}.$$

Nunc autem 1^0 et 2^0 combinando, ut etiam xx exturbetur, pervenietur denique ad $\mathfrak{P} = \frac{1 + 3xx + 5x^4}{1}$, qui est valor quaesitus pro numeratore $\mathfrak{P}$, quo igitur invento prior fractio partialis erit

$$\frac{1 + 3xx + 5x^4}{x^5}.$$

Pro altera fractione habebimus $\mathfrak{Q} = \frac{1+xx}{x^5}$ posito $(1 - xx)^2 = 0$ sive $1 - 2xx + x^4 = 0$, unde fit $x^4 = 2xx - 1$ et $x^5 = 2x^3 - x$, quo substituto fiet $\mathfrak{Q} = \frac{1+xx}{2x^3 - x}$. Hinc porro nascentur sequentes valores:

$$\text{I.} \quad \mathfrak{Q} = \frac{x + x^3}{2x^4 - xx} = \frac{x + x^3}{3xx - 2},$$

$$\text{II.} \quad \mathfrak{Q} = \frac{xx + x^4}{3x^3 - 2x} = \frac{3xx - 1}{3x^3 - 2x},$$

$$\text{III.} \quad \mathfrak{Q} = \frac{3x^3 - x}{3x^4 - 2xx} = \frac{3x^3 - x}{4xx - 3}.$$

Cum harum derivatarum prima et tertia tantum potestatem secundam xx in denominatore involvat, inde statim obtinetur fractio denominatore constante praedita; erit enim I. $\frac{4}{4}$ — III. $\frac{3}{3} = \frac{-5x^3 + 7x}{1}$, unde altera fractio partialis concluditur

$$= \frac{7x - 5x^3}{(1 - xx)^2}.$$

Erit igitur

$$\frac{1 + xx}{x^5(1 - xx)^2} = \frac{1 + 3xx + 5x^4}{x^5} + \frac{7x - 5x^3}{(1 - xx)^2},$$

cuius veritas calculum evolventi mox patebit.

EXEMPLUM 4

25. *In fractiones partiales resolvenda sit haec fractio*

$$\frac{1}{(1+xx)(1+x^3)(1+x^4)}.$$

Statuantur fractiones partiales quaesitae $\frac{\mathfrak{P}}{1+xx}$, $\frac{\mathfrak{Q}}{1+x^3}$, $\frac{\mathfrak{R}}{1+x^4}$; ac primo quidem erit $\mathfrak{P}=\frac{1}{(1+x^3)(1+x^4)}$ posito $1+xx=0$, unde fit $xx=-1$, $x^3=-x$, $x^4=+1$, quibus substitutis erit

$$1^0 \quad \mathfrak{P}=\frac{1}{2(1-x)},$$

tum vero hinc

$$2^0 \quad \mathfrak{P}=\frac{x}{2(x+1)},$$

unde statim colligitur fractio ab x quoad denominatorem immunis, scilicet $\mathfrak{P}=\frac{1+x}{4}$, ita ut prima fractio partialis sit

$$\frac{1+x}{4(1+xx)}.$$

Pro secunda fractione habebimus $\mathfrak{Q}=\frac{1}{(1+xx)(1+x^4)}$ existente $1+x^3=0$, unde fit $x^3=-1$, $x^4=-x$, ita ut

$$\text{I.} \quad \mathfrak{Q}=\frac{1}{(1-x)(1+xx)}=\frac{1}{2-x+xx}.$$

Derivantur hinc porro

$$\text{II.} \quad \mathfrak{Q}=\frac{x}{2x-xx-1}$$

et

$$\text{III.} \quad \mathfrak{Q}=\frac{xx}{2xx+1-x};$$

unde eliminando primo xx ex I. et II. erit

$$1^0 \quad \mathfrak{Q}=\frac{1+x}{x+1}$$

et ex I. et III.

$$2^0 \quad \mathfrak{Q}=\frac{2-xx}{3-x},$$

ex quibus denuo x eliditur, cum fiat $1^0 + 2^0 = \frac{3 + x - xx}{4}$, ita ut secunda fractio sit

$$\frac{3 + x - xx}{4(1 + x^3)}.$$

Tertia denique fractio est $\mathfrak{R} = \frac{1}{(1 + xx)(1 + x^3)}$ existente $1 + x^4 = 0$ sive $x^4 = -1$ et $x^5 = -x$, quibus substitutis fit

$$\text{I.} \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{1 - x + xx + x^3},$$

ex qua porro derivantur

$$\text{II.} \quad \mathfrak{R} = \frac{x}{x + x^3 - 1 - xx},$$

$$\text{III.} \quad \mathfrak{R} = \frac{xx}{xx - 1 - x - x^3},$$

$$\text{IV.} \quad \mathfrak{R} = \frac{x^3}{x^3 - x - xx + 1}.$$

Elidatur x^3 et deriventur hunc in finem sequentes

$$1^0 \text{ ex I. et II. } \mathfrak{R} = \frac{1 - x}{2 - 2x + 2xx},$$

$$2^0 \text{ ex I. et III. } \mathfrak{R} = \frac{1 + xx}{2xx - 2x},$$

$$3^0 \text{ ex I. et IV. } \mathfrak{R} = \frac{1 - x^3}{2xx},$$

ex quarum prima et secunda statim tam primam quam secundam potestatem ipsius x eliminare licet; fit enim hinc $\mathfrak{R} = \frac{-x - xx}{2}$, unde tertia fractio partialis erit

$$\frac{-x - xx}{2(1 + x^4)},$$

ita ut iam sit

$$\frac{1}{(1 + xx)(1 + x^3)(1 + x^4)} = \frac{1 + x}{4(1 + xx)} + \frac{3 + x - xx}{4(1 + x^3)} - \frac{x + xx}{2(1 + x^4)}.$$

Quoniam haec postrema investigatio haud exiguas ambages postulavit, eam quoque per alteram methodum tentemus, quam supra § 16 et seqq. exposuimus. Cum igitur primo invenerimus valorem numeratoris $\mathfrak{R} = \frac{1}{1 - x + xx + x^3}$,

ponamus multiplicatorem idoneum esse Π, ita ut sit $\mathfrak{R} = \frac{\Pi}{\Pi(1-x+xx+x^3)}$. At vero Π ita comparatum esse oportet, ut fiat

$$\Pi(1-x+xx+x^3) = C + \Theta(1+x^4),$$

ubi ergo fractionem quaeri oportet $\frac{\Pi}{\Theta}$, quae proxime aequalis sit fractioni $\frac{1+x^4}{1-x+xx+x^3}$. Inter terminos igitur huius fractionis instituatur sequens operatio, cuius ratio iam supra est exposita:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l}
x^3+xx-x+1 & x^4+1 & x & & & \\
 & x^4+x^3-xx+x & & & & \\
\hline
 & -x^3+xx-x+1 & x^3+xx-x+1 & -1 & & \\
 & & x^3-xx+x-1 & & & \\
\hline
 & & 2xx-2x+2 & -x^3+xx-x+1 & -\frac{x}{2} & \\
 & & & -x^3+xx-x & & \\
\hline
 & & & +1 & 2xx-2x+2 & 2xx \\
 & & & & 2xx & \\
\hline
 & & & & -2x+2 & \text{etc.}
\end{array}$$

Nunc ex quotis more solito formentur fractiones

$$\begin{array}{cccc}
x, & -1, & -\frac{1}{2}x, & 2xx, \\
\frac{1}{0}, & \frac{x}{1}, & \frac{-x+1}{-1}, & \frac{\frac{1}{2}xx+\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x+1},
\end{array}$$

quarum ultimae aequatur fractio $\frac{\Pi}{\Theta}$; sicque erit

$$\Pi = xx + x \quad \text{et} \quad \Theta = x + 2;$$

hincque iam erit

$$\Pi(x^3 + xx - x + 1) = x^5 + 2x^4 + x$$

et

$$\Theta(1 + x^4) = x^5 + 2x^4 + x + 2,$$

unde manifesto fit

$$C = \Pi(x^3 + xx - x + 1) - \Theta(1 + x^4) = -2,$$

quocirca erit

$$\mathfrak{R} = \frac{\Pi}{C} = \frac{xx+x}{-2},$$

qui valor cum ante invento egregie convenit.

EXEMPLUM 5

26. *Proposita fractione*

$$\frac{x^m}{1+x^n},$$

cuius denominatoris factorem constat esse $1-2x\cos.\theta+xx$, *invenire fractionem partialem ex hoc factore oriundam, quae sit*

$$\frac{\mathfrak{P}}{1-2x\cos.\theta+xx}.$$

Cum igitur sit

$$\frac{x^m}{1+x^n}=\frac{\mathfrak{P}}{1-2x\cos.\theta+xx}+\text{etc.},$$

erit

$$\mathfrak{P}=\frac{x^m(1-2x\cos.\theta+xx)}{1+x^n},$$

posito scilicet $1-2x\cos.\theta+xx=0$. Quia vero hoc casu tam numerator quam denominator evanesceret, in fractione $\frac{1-2x\cos.\theta+xx}{1+x^n}$ loco numeratoris et denominatoris eorum differentialia substituantur, unde oritur fractio $\frac{2x-2\cos.\theta}{nx^{n-1}}$ sive $\frac{2xx-2x\cos.\theta}{nx^n}$, sicque erit

$$\mathfrak{P}=\frac{x^m(2xx-2x\cos.\theta)}{nx^n}.$$

Quia vero nostro casu fit $1+x^n=0$ ideoque $x^n=-1$, erit

$$\mathfrak{P}=-\frac{1}{n}x^m(2xx-2x\cos.\theta),$$

ubi iam id sumus adepti, ut denominator non amplius x complectatur.

Nihil aliud igitur superest, nisi ut ex numeratore potestates altiores ipsius x exterminentur; factore autem $1-2x\cos.\theta+xx$ nihilo aequato fit

$$xx=2x\cos.\theta-1,$$

ex quo porro colligitur

$$\mathfrak{P}=\frac{x^m(2x\cos.\theta-2)}{-n}.$$

Iam quaerantur valores altiorum potestatum per simplex x expressi, qui reperiuntur

$$x^3 = 4x\cos.\theta^2 - x - 2\cos.\theta,$$

$$x^4 = 8x\cos.\theta^3 - 4x\cos.\theta - 4\cos.\theta^2 + 1,$$

qui valores in progressione recurrente procedunt, cuius scala relationis est

$$2\cos.\theta, \quad -1.$$

Quoniam autem hi termini continuo fiunt magis complicati, totum negotium egregie sublevari observo, si quaerantur valores formularum $x^3 \sin.\theta$, $x^4 \sin.\theta$, $x^5 \sin.\theta$, $x^6 \sin.\theta$ et ita porro, quippe qui secundum eandem legem progrediuntur. Cum enim sit, uti ex calculi sinuum elementis constat,

$$2\cos.\theta \sin.\lambda\theta - \sin.(\lambda - 1)\theta = \sin.(\lambda + 1)\theta,$$

progressio recurrens sequenti modo se habebit:

$$\begin{aligned} x \sin.\theta &= x\sin.\theta, \\ x^2 \sin.\theta &= x\sin.2\theta - \sin.\theta, \\ x^3 \sin.\theta &= x\sin.3\theta - \sin.2\theta, \\ x^4 \sin.\theta &= x\sin.4\theta - \sin.3\theta, \\ x^5 \sin.\theta &= x\sin.5\theta - \sin.4\theta, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^m \sin.\theta &= x\sin.m\theta - \sin.(m-1)\theta. \end{aligned}$$

Hoc igitur valore substituto erit numerator quaesitus

$$\mathfrak{P} = -\frac{2}{n\sin.\theta}(x\sin.m\theta - \sin.(m-1)\theta)(x\cos.\theta - 1),$$

sive evolvendo et loco xx suum valorem substituendo erit

$$\mathfrak{P} = -\frac{2}{n\sin.\theta}\left(\begin{matrix} 2x\sin.m\theta\cos.\theta^2 - x\sin.(m-1)\theta\cos.\theta - x\sin.m\theta \\ + \sin.(m-1)\theta - \sin.m\theta\cos.\theta \end{matrix}\right),$$

pro qua forma scribamus brevitatis gratia

$$\mathfrak{P} = \frac{-2}{n\sin.\theta}(Fx + G),$$

ita ut sit

$$F = 2\sin. m\theta \cos.\theta^2 - \sin.(m-1)\theta \cos.\theta - \sin. m\theta,$$
$$G = \sin.(m-1)\theta - \sin. m\theta \cos.\theta.$$

Iam pro valore F cum sit

$$\sin.(m-1)\theta = \sin. m\theta \cos.\theta - \cos. m\theta \sin.\theta,$$

erit

$$F = \sin. m\theta \cos.\theta^2 + \cos. m\theta \sin.\theta \cos.\theta - \sin. m\theta$$

sive

$$F = -\sin. m\theta \sin.\theta^2 + \cos. m\theta \sin.\theta \cos.\theta$$

hincque

$$\frac{F}{\sin.\theta} = \cos. m\theta \cos.\theta - \sin. m\theta \sin.\theta = \cos.(m+1)\theta.$$

Simili modo erit

$$G = \sin. m\theta \cos.\theta - \cos. m\theta \sin.\theta - \sin. m\theta \cos.\theta = -\cos. m\theta \sin.\theta$$

ideoque

$$\frac{G}{\sin.\theta} = -\cos. m\theta.$$

His rite substitutis erit

$$\mathfrak{P} = \frac{2}{n}(\cos. m\theta - x\cos.(m+1)\theta)$$

ideoque fractio partialis quaesita

$$= + \frac{2(\cos. m\theta - x\cos.(m+1)\theta)}{n(1 - 2x\cos.\theta + xx)}.$$

Hinc simul facile inveniri potest, cuiusmodi anguli pro θ assumi debeant, ut haec formula $1 - 2x\cos.\theta + xx$ revera evadat factor denominatoris $1 + x^n$; ex formulis enim ante exhibitis erit

$$x^n = \frac{x\sin. n\theta - \sin.(n-1)\theta}{\sin.\theta}.$$

Quia igitur casu $xx - 2x\cos.\theta + 1 = 0$ etiam $1 + x^n$ evanescere debet, satisfacienda aequatio erit

$$x\sin. n\theta - \sin.(n-1)\theta + \sin.\theta = 0,$$

id quod fieri nequit, nisi fuerit $\sin. n\theta = 0$ ideoque $\cos. n\theta = \pm 1$. Cum igitur sit

$$\sin.(n-1)\theta = \sin. n\theta \cos.\theta - \cos. n\theta \sin.\theta,$$

ob $\sin. n\theta = 0$ erit $\sin.(n-1)\theta = \mp \sin.\theta$ sicque aequatio adimplenda fiet $\sin.\theta \pm \sin.\theta = 0$; unde patet signum inferius valere debere, ita ut $\cos. n\theta = -1$. Hanc ob rem, si π denotet angulum duobus rectis aequalem, statui debet $n\theta = i\pi$ existente i numero impari sicque simul omnes plane valores idonei pro angulo θ obtinebuntur, qui erunt

$$\frac{\pi}{n}, \quad \frac{3\pi}{n}, \quad \frac{5\pi}{n}, \quad \frac{7\pi}{n}, \quad \frac{9\pi}{n}, \quad \ldots$$

Unde si pro singulis factoribus denominatoris hinc oriundis quaerantur fractiones partiales, summa earum omnium aequabitur ipsi fractioni propositae, scilicet $\frac{x^m}{1+x^n}$, siquidem $m < n$, hoc est, si fractio fuerit genuina; alioquin etiam, si fuerit spuria, partes integrae seorsim extrahi debent.

THEOREMA ARITHMETICUM EIUSQUE DEMONSTRATIO[1]

Commentatio 794 indicis ENESTROEMIANI
Commentationes arithmeticae collectae 2, 1849, p. 588—592
Opera postuma 1, 1862, p. 152—156

Theorema, quod hic proponere ac demonstrare constitui, iam pridem per litteras cum amicis communicaveram[2], quibus id non parum elegans et omni attentione dignum est visum, praesertim cum eius demonstratio minime sit obvia ac fortasse a plerisque frustra indagata. Sequenti autem modo istud theorema enunciavi:

Si fuerint propositi numeri quotcumque inaequales a, b, c, d etc. et ex singulis eiusmodi formentur fractiones, quarum numerator communis sit unitas, denominator vero cuiusque productum ex omnibus differentiis eiusdem numeri a singulis reliquorum, ita ut hae fractiones sint

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)\text{ etc}}, \quad \frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)\text{ etc.}}, \quad \frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)\text{ etc.}} \quad \text{etc.,}$$

tum summa omnium harum fractionum semper est nihilo aequalis.

1) Confer hac cum dissertatione Commentationem 540 huius voluminis atque alias illas commentationes p. 370 laudatas. Vide porro L. EULERI *Institutionum calculi integralis* vol. II, Petropoli 1769, § 1169; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 12, p. 341. Confer denique Commentationem 475 (indicis ENESTROEMIANI): *Speculationes analyticae*, Novi comment. acad. sc. Petrop. 20 (1775), 1776, p. 59; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 18, p. 1, imprimis p. 22. P. St.

2) Vide epistolas d. 25. Sept. et 9. Nov. 1762 ad CHR. GOLDBACH datas, *Correspondance math. et phys.*, publiée par P. H. FUSS, St.-Pétersbourg 1843, t. I, p. 659 et 663; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series III. P. St.

Ita si exempli gratia propositi sint hi numeri 2, 5, 7, 8, quatuor fractiones inde formandae sunt

$$\frac{1}{-3\cdot-5\cdot-6},\quad \frac{1}{3\cdot-2\cdot-3},\quad \frac{1}{5\cdot2\cdot-1},\quad \frac{1}{6\cdot3\cdot1},$$

quae ad has reducuntur

$$-\frac{1}{3\cdot5\cdot6},\quad +\frac{1}{3\cdot2\cdot3},\quad -\frac{1}{5\cdot2\cdot1},\quad +\frac{1}{6\cdot3\cdot1},$$

eritque vi theorematis

$$-\frac{1}{90}+\frac{1}{18}-\frac{1}{10}+\frac{1}{18}=0.$$

Ne signa negationis molestiam creent, formatio harum fractionum ita praecipi potest, ut dispositis numeris datis secundum ordinem magnitudinis, sive crescendo sive decrescendo, pro quolibet eius differentiae a singulis reliquorum in se invicem ducantur hisque pro denominatoribus sumtis numeratore existente unitate fractionibus hinc factis signa + et — alternatim tribuantur.

Veluti si numeri propositi sint

3, 8, 12, 15, 17, 18,

ex singulis denominatores ita colligantur:

ex 3	$5\cdot 9\cdot12\cdot14\cdot15=113400$
8	$5\cdot 4\cdot 7\cdot 9\cdot10=12600$
12	$9\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 6=3240$
15	$12\cdot 7\cdot 3\cdot 2\cdot 3=1512$
17	$14\cdot 9\cdot 5\cdot 2\cdot 1=1260$
18	$15\cdot10\cdot 6\cdot 3\cdot 1=2700$

eritque

$$\frac{1}{113400}-\frac{1}{12600}+\frac{1}{3240}-\frac{1}{1512}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{2700}=0$$

seu singulis per 36 multiplicatis

$$\frac{1}{3150}-\frac{1}{350}+\frac{1}{90}-\frac{1}{42}+\frac{1}{35}-\frac{1}{75}=0,$$

quod fractionibus ad eundem denominatorem 3150 reductis

$$\frac{1-9+35-75+90-42}{3150}=0$$

per se est manifestum.

Casu quidem, quo duo tantum numeri proponuntur, theorema demonstratione non eget, cum sit perspicuum esse

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-a}=0;$$

casus autem trium numerorum a, b, c iam magis est reconditus neque enim statim liquet esse

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0;$$

sed pro pluribus numeris atque adeo in genere, quantacumque sit eorum multitudo, vix quicquam iuvat in casibus simplicioribus veritatem agnovisse.

Verum etiam hoc theorema multo latius extendi et sequenti modo proferri potest.

THEOREMA GENERALIUS

Si propositi fuerint numeri inaequales quotcumque a, b, c, d, e, f etc., quorum multitudo sit $=m$, et ex uniuscuiusque a reliquis differentiis sequentia formentur producta

$$(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(a-f) \text{ etc.} = A,$$
$$(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)(b-f) \text{ etc.} = B,$$
$$(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)(c-f) \text{ etc.} = C,$$
$$(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)(d-f) \text{ etc.} = D,$$
$$(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)(e-f) \text{ etc.} = E$$
$$\text{etc.},$$

quorum singula $m-1$ factoribus constant, tum erit non solum ut ante

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}+\frac{1}{E}+\text{etc.}=0$$

sed etiam hoc modo generalius

$$\frac{a^n}{A}+\frac{b^n}{B}+\frac{c^n}{C}+\frac{d^n}{D}+\frac{e^n}{E}+\text{etc.}=0,$$

dummodo exponens n sit numerus integer positivus minor quam $m-1$.

Ita in exemplo supra allato, quo numeri propositi sunt 3, 8, 12, 15, 17, 18, non solum est ut ibi

$$\frac{1}{113400}-\frac{1}{12600}+\frac{1}{3240}-\frac{1}{1512}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{2700}=0,$$

sed etiam veritas in sequentibus fractionibus aeque habet locum

$$\frac{3}{113400}-\frac{8}{12600}+\frac{12}{3240}-\frac{15}{1512}+\frac{17}{1260}-\frac{18}{2700}=0,$$

$$\frac{3^2}{113400}-\frac{8^2}{12600}+\frac{12^2}{3240}-\frac{15^2}{1512}+\frac{17^2}{1260}-\frac{18^2}{2700}=0,$$

$$\frac{3^3}{113400}-\frac{8^3}{12600}+\frac{12^3}{3240}-\frac{15^3}{1512}+\frac{17^3}{1260}-\frac{18^3}{2700}=0,$$

$$\frac{3^4}{113400}-\frac{8^4}{12600}+\frac{12^4}{3240}-\frac{15^4}{1512}+\frac{17^4}{1260}-\frac{18^4}{2700}=0;$$

neque vero ad altiores potestates progredi licet, cum quilibet denominator ex quinque factoribus constet.

DEMONSTRATIO THEOREMATIS

Theorema hoc nactus sum ex consideratione huius formulae

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\text{ etc.}},$$

quam constat, dummodo exponens n sit numerus integer positivus minor multitudine factorum in denominatore, semper resolvi posse in huiusmodi fractiones simplices

$$\frac{A'}{x-a}+\frac{B'}{x-b}+\frac{C'}{x-c}+\frac{D'}{x-d}+\text{etc.},$$

quarum denominatores sunt ipsi factores illius denominatoris, numeratores

vero[1]) quantitates constantes ab x non pendentes, quorum singulos sequenti modo definire licet. Cum forma proposita his fractionibus simplicibus sit aequalis, per $x-a$ multiplicando habebimus

$$\frac{x^n}{(x-b)(x-c)(x-d)\text{ etc.}} = A' + \frac{B'(x-a)}{x-b} + \frac{C'(x-a)}{x-c} + \frac{D'(x-a)}{x-d} + \text{etc.},$$

quae aequalitas subsistet, quicumque valor ipsi x tribuatur, quandoquidem litterae A', B', C', D' etc. ab x non pendent. Vera ergo erit ista aequatio, si ponatur $x=a$, unde fit

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)\text{ etc.}} = A',$$

sicque valor ipsius A' innotescit; similique modo intelligitur esse

$$B' = \frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)\text{ etc.}}, \quad C' = \frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)\text{ etc.}}$$

sicque de reliquis. Cum igitur fractionibus simplicibus ad alteram partem transponendis sit

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\text{ etc.}} + \frac{A'}{a-x} + \frac{B'}{b-x} + \frac{C'}{c-x} + \frac{D'}{d-x} + \text{etc.} = 0,$$

habebimus utique, numero x tamquam postremo horum numerorum $a, b, c, d, \ldots x$ spectato,

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)\cdots(a-x)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)\cdots(b-x)}$$
$$+ \frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)\cdots(c-x)} + \cdots + \frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-v)} = 0$$

denotante v numerorum illorum penultimum.

Haec est demonstratio theorematis propositi, quae neutiquam ita est obvia, ut ista veritas inter vulgares, quarum ratio facile perspicitur, referenda videatur, nisi forte alia demonstratio facilior reperiri poterit, quod autem ob eam rationem minus sperare licet, quod hoc theorema veritati non est consentaneum, nisi exponens n sit numerus integer positivus minor multitudine factorum in singulis denominatoribus.

1) In editione principe hi numeratores litteris A, B, C, D etc. designati sunt, quae autem litterae iam pro differentiarum illarum productis usurpatae sunt. Correxit A. K.

Cum igitur sumto pro n numero maiore summa illarum fractionum non amplius evanescat, ex ipso fonte, unde hoc theorema hausimus, pro quovis casu valorem istius summae assignare poterimus, scilicet posito factorum numero $= m - 1$ ideoque numerorum omnium propositorum $a, b, c, d, \ldots x$ multitudine $= m$. Si fuerit $n = m - 1$ vel $n = m$ vel $n > m$, fractio in demonstratione assumta

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \text{ etc.}}$$

tamquam spuria spectari debet, quae partes quasi integras in se complectatur, atque huic ipsi parti integrae summa illarum fractionum formatarum aequalis sit necesse est.

Ita casu, quo $n = m - 1$, pars integra est unitas ideoque summa illarum fractionum $= 1$. In exemplo igitur supra tractato, ubi secundum demonstrationem signa mutari oportet, erit

$$\frac{18^5}{2700} - \frac{17^5}{1260} + \frac{15^5}{1512} - \frac{12^5}{3240} + \frac{8^5}{12600} - \frac{3^5}{113400} = 1.$$

Sin autem sit $n = m$, pars integra ex fractione illa eruta est

$$x + a + b + c + d + \text{etc.}$$

seu summa omnium numerorum propositorum. Cum ergo in superiori exemplo sit summa numerorum propositorum $= 73$, erit

$$\frac{18^6}{2700} - \frac{17^6}{1260} + \frac{15^6}{1512} - \frac{12^6}{3240} + \frac{8^6}{12600} - \frac{3^6}{113400} = 73.$$

Hinc facile colligitur, quomodo hae summae ulterius sint inveniendae. Numerorum scilicet propositorum $a, b, c, d, \ldots x$ primo sumatur summa, quae sit $= P$, tum summa productorum ex binis, quae sit $= Q$, porro summa productorum ex ternis, quae sit $= R$, item ex quaternis $= S$, ex quinis $= T$ et cetera, quo facto formetur series

$$1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.},$$

ut sit

$$\mathfrak{A} = P, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{A}P - Q, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{B}P - \mathfrak{A}Q + R,$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{C}P - \mathfrak{B}Q + \mathfrak{A}R - S \quad \text{etc.},$$

atque

casu	erit summa nostrarum fractionum
$n = m - 1$	$1,$
$n = m$	$\mathfrak{A} = P,$
$n = m + 1$	$\mathfrak{B} = P^2 - Q,$
$n = m + 2$	$\mathfrak{C} = P^3 - 2PQ + R,$
$n = m + 3$	$\mathfrak{D} = P^4 - 3P^2Q + 2PR + Q^2 - S,$
$n = m + 4$	$\mathfrak{E} = P^5 - 4P^3Q + 3P^2R + 3PQ^2 - 2PS - 2QR + T$

etc.

Vel si ponatur summa ipsorum numerorum $= \mathfrak{P}$, summa quadratorum $= \mathfrak{Q}$, summa cuborum $= \mathfrak{R}$, summa potestatum quartarum $= \mathfrak{S}$, quintarum $= \mathfrak{T}$ etc., erit, ut sequitur,[1])

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{C} = \tfrac{1}{6}\mathfrak{P}^3 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{R},$$
$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{24}\mathfrak{P}^4 + \tfrac{1}{4}\mathfrak{P}^2\mathfrak{Q} + \tfrac{1}{8}\mathfrak{Q}^2 + \tfrac{1}{3}\mathfrak{P}\mathfrak{R} + \tfrac{1}{4}\mathfrak{S} \quad \text{etc.},$$

qui valores hac lege progrediuntur, ut sit

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P},$$
$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{A} + \mathfrak{Q}),$$
$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{3}(\mathfrak{P}\mathfrak{B} + \mathfrak{Q}\mathfrak{A} + \mathfrak{R}),$$
$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{4}(\mathfrak{P}\mathfrak{C} + \mathfrak{Q}\mathfrak{B} + \mathfrak{R}\mathfrak{A} + \mathfrak{S})$$

etc.

Theorematis nostri veritate stabilita haud abs re fore arbitror, si indolem formularum, circa quas theorema versatur, accuratius investigavero. Quaeritur igitur, si propositi fuerint numeri quotcumque a, b, c, d etc., cuius indolis sit futura formula $(a-b)(a-c)(a-d)$ etc., quae ex differentiis cuiusque a reliquis in se invicem multiplicatis producitur. Sit igitur multitudo[2]) horum numerorum propositorum $= n$ et assumta quantitate indefinita z inde formo hoc productum

$$(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)(z-e) \text{ etc.},$$

1) Confer Commentationem 153 huius voluminis. P. St.

2) Quam multitudinem EULERUS hucusque littera m designaverat. A. K.

quod multiplicatione evolutum praebeat

$$z^n - Pz^{n-1} + Qz^{n-2} - Rz^{n-3} + Sz^{n-4} - \text{etc.}^{1})$$

Dividendo ergo per $z - a$ habebimus

$$(z-b)(z-c)(z-d) \text{ etc.} = \frac{z^n - Pz^{n-1} + Qz^{n-2} - Rz^{n-3} + \text{etc.}}{z-a}.$$

Quodsi iam hic ponamus $z = a$, orietur ea ipsa forma $(a-b)(a-c)(a-d)$ etc., quam supra littera A indicavi. Tum vero ad alteram partem tam numerator quam denominator in nihilum abit eiusque propterea valor erit

$$na^{n-1} - (n-1)Pa^{n-2} + (n-2)Qa^{n-3} - (n-3)Ra^{n-4} + \text{etc.},$$

qui, cum sit

$$a^n - Pa^{n-1} + Qa^{n-2} - Ra^{n-3} + Sa^{n-4} - \text{etc.} = 0,$$

. . . .

1) In editione principe loco litterarum P, Q, R, S etc. hic et in sequentibus aequationibus litterae $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ etc. usurpatae sunt, quibus autem litteris hucusquae aliae quantitates designatae erant. Correxit A. K.

[Conclusione caret.]

PROBLEMA ALGEBRAICUM DE INVENIENDIS QUATUOR NUMERIS EX DATIS TOTIDEM PRODUCTIS UNIUSCUIUSQUE HORUM NUMERORUM IN SUMMAS TRIUM RELIQUORUM

Commentatio 808 indicis ENESTROEMIANI
Opera postuma 1, 1862, p. 282—287

Si quatuor numeri inveniendi ponantur v, x, y, z, habentur sequentes quatuor aequationes

$$v(x+y+z)=a,$$
$$x(v+y+z)=b,$$
$$y(v+x+z)=c,$$
$$z(v+x+y)=d.$$

Ex his aequationibus per regulas vulgares successive tres incognitae eliminari et quarta ad resolutionem aequationis perduci poterit. Verum cum nulla sit ratio, cur unam potius quam aliam quamvis eligamus, quae ultimo determinatur, nullam earum per aequationem finalem determinari convenit, sed eiusmodi introducenda est nova incognita, quae ad singulas aequaliter pertineat et ex qua incognitae definiri queant. Sumamus ergo summam numerorum inveniendorum in hunc finem

$$v+x+y+z=2t$$

atque hinc aequationes superiores abibunt in has

$$v(2t-v)=a=2tv-v^2, \quad \text{inde} \quad v=t-\sqrt{(tt-a)},$$
$$x(2t-x)=b=2tx-x^2, \quad x=t-\sqrt{(tt-b)},$$
$$y(2t-y)=c=2ty-y^2, \quad y=t-\sqrt{(tt-c)},$$
$$z(2t-z)=d=2tz-z^2, \quad z=t-\sqrt{(tt-d)}.$$

Eousque igitur solutionem iam produximus, ut ex unica quantitate t omnes quatuor numeros quaesitos expedite determinare valeamus; quare tantum superest, ut hanc quantitatem t investigemus, quod fiet ex aequatione

$$v+x+y+z=2t$$

substituendo loco v, x, y, z valores per t modo inventos

$$4t-\sqrt{(tt-a)}-\sqrt{(tt-b)}-\sqrt{(tt-c)}-\sqrt{(tt-d)}=2t,$$

unde oritur ista aequatio

$$2t=\sqrt{(tt-a)}+\sqrt{(tt-b)}+\sqrt{(tt-c)}+\sqrt{(tt-d)},$$

quae quidem methodo NEUTONIANA ad rationalitatem perduci posset[1]), at labor foret maxime molestus. Alio igitur modo resolutionem huius aequationis tentemus.

Ponamus

$$\sqrt{(tt-a)}=p, \quad \text{erit} \quad v=t-p,$$
$$\sqrt{(tt-b)}=q, \quad x=t-q,$$
$$\sqrt{(tt-c)}=r, \quad y=t-r,$$
$$\sqrt{(tt-d)}=s, \quad z=t-s$$

eritque

$$p+q+r+s=2t,$$

quae aequatio ob irrationales p, q, r et s in aliam debet transformari, in qua litterarum p, q, r et s potestates exponentium parium tantum occurrant,

1) I. NEWTON (1643—1727), *Arithmetica universalis*, Cantabrigiae 1707, p. 66; 3. ed. (ed. G. I. 's GRAVESANDE), Lugd. Batav. 1732, p. 64; quae quidem methodus iam a. P. DE FERMAT exposita erat, *Varia opera mathematica*, Tolosae 1679, p. 60; *Oeuvres de FERMAT*, publiées par les soins de MM. P. TANNERY et CH. HENRY, t. I, Paris 1891, p. 184. P. St.

quo per substitutionem loco litterarum p, q, r et s faciendam nascatur aequatio rationalis, ex. qua valor incognitae t definiatur.

In hunc finem formemus hanc aequationem

$$X^4 - AX^3 + BX^2 - CX + D = 0,$$

cuius quatuor radices sint quantitates datae a, b, c, d. Erit ergo per naturam aequationum

$$A = a + b + c + d,$$

$$B = ab + ac + ad + bc + bd + cd,$$

$$C = abc + abd + acd + bcd,$$

$$D = abcd.$$

Ponatur iam

$$Y = tt - X \quad \text{seu} \quad X = -Y + tt;$$

habebimus facta hac substitutione istam aequationem

$$\left.\begin{array}{r} Y^4 - 4ttY^3 + \quad 6t^4Y^2 - \quad 4t^6Y + \quad t^8 \\ + \; AY^3 - 3AttY^2 + 3At^4Y - At^6 \\ + \quad BY^2 - 2BttY + Bt^4 \\ + \quad CY - Ctt \\ + D \end{array}\right\} = 0.$$

Cuius aequationis quatuor radices ipsius Y erunt

$$tt - a, \quad tt - b, \quad tt - c, \quad tt - d.$$

Loco huius aequationis ponamus brevitatis gratia hanc

$$Y^4 - PY^3 + QY^2 - RY + S = 0,$$

ita ut sit

$$P = 4tt - \quad A,$$

$$Q = 6t^4 - 3Att + \quad B,$$

$$R = 4t^6 - 3At^4 + 2Btt - C,$$

$$S = \quad t^8 - \quad At^6 + \quad Bt^4 - Ctt + D.$$

Sit porro

$$Y = Z^2 \text{ seu } Z = \pm \sqrt{Y};$$

habebimus

$$Z^8 - PZ^6 + QZ^4 - RZ^2 + S = 0$$

eruntque huius aequationis octo radices sequentes

$$\begin{array}{ll} +\sqrt{(tt-a)} = +p, & -\sqrt{(tt-a)} = -p, \\ +\sqrt{(tt-b)} = +q, & -\sqrt{(tt-b)} = -q, \\ +\sqrt{(tt-c)} = +r, & -\sqrt{(tt-c)} = -r, \\ +\sqrt{(tt-d)} = +s, & -\sqrt{(tt-d)} = -s. \end{array}$$

Aequatio haec octo dimensionum resolvatur in binas biquadraticas, quarum alterius radices sint $+p$, $+q$, $+r$, $+s$, alterius $-p$, $-q$, $-r$, $-s$; quae sint

$$Z^4 - \alpha Z^3 + \beta Z^2 - \gamma Z + \delta = 0,$$
$$Z^4 + \alpha Z^3 + \beta Z^2 + \gamma Z + \delta = 0,$$

in quibus erit per naturam aequationum

$$\begin{aligned} \alpha &= p + q + r + s, \\ \beta &= pq + pr + ps + qr + qs + rs, \\ \gamma &= pqr + pqs + prs + qrs, \\ \delta &= pqrs. \end{aligned}$$

Quoniam igitur productum ex his duabus aequationibus biquadraticis illi aequationi octo dimensionum aequale esse debet, erit

$$\begin{aligned} P &= \alpha^2 - 2\beta, \\ Q &= \beta^2 - 2\alpha\gamma + 2\delta, \\ R &= \gamma^2 - 2\beta\delta, \\ S &= \delta^2. \end{aligned}$$

Et cum sit $\alpha = p + q + r + s$, erit

$$\alpha = 2t$$

ideoque $\alpha^2 = 4tt$, unde fit

$$\alpha^2 - 2\beta = 4tt - 2\beta = P = 4tt - A,$$

ergo

$$\beta = \frac{A}{2}.$$

Secunda aequatio $Q = \beta^2 - 2\alpha\gamma + 2\delta$ dabit

$$6t^4 - 3Att + B = \frac{A^2}{4} - 4\gamma t + 2\delta$$

sive

$$\delta = 3t^4 - \frac{3}{2}Att + 2\gamma t - \frac{A^2}{8} + \frac{B}{2}.$$

Tertia vero aequatio $R = \gamma^2 - 2\beta\delta$ praebebit

$$4t^6 - 3At^4 + 2Btt - C = \gamma^2 - A\delta$$

sive

$$A\delta = -4t^6 + 3At^4 - 2Btt + C + \gamma^2;$$

hinc cum superiori fit

$$\left.\begin{array}{l} 4t^6 - \frac{3}{2}A^2tt + 2A\gamma t - \frac{A^3}{8} \\ \quad + \;\; 2Btt \qquad\qquad + \frac{AB}{2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - C \end{array}\right\} = \gamma^2.$$

Extracta radice quadrata obtinebitur

$$\gamma = At \pm \sqrt{\left(4t^6 + (2B - \tfrac{1}{2}A^2)tt - \tfrac{1}{8}A^3 + \tfrac{1}{2}AB - C\right)}$$

hincque

$$\delta = 3t^4 + \tfrac{1}{2}Att - \tfrac{1}{8}A^2 + \tfrac{1}{2}B \pm 2t\sqrt{\left(4t^6 + (2B - \tfrac{1}{2}A^2)tt - \tfrac{1}{8}A^3 + \tfrac{1}{2}AB - C\right)},$$

cuius quadratum erit

$$\begin{array}{l} 25t^8 + 3At^6 - \frac{5}{2}A^2t^4 - \;\frac{5}{8}A^3tt + \frac{1}{64}A^4 \\ \qquad\qquad\quad + 11B \;\; + \frac{5}{2}AB \;\; - \frac{1}{8}A^2B \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \;\; 4C \;\; + \frac{1}{4}B^2 \end{array}$$

$$\pm (12t^5 + 2At^3 - \tfrac{1}{2}A^2t + 2Bt)\sqrt{\left(4t^6 + (2B - \tfrac{1}{2}A^2)tt - \tfrac{1}{8}A^3 + \tfrac{1}{2}AB - C\right)},$$

quod aequale esse debet ipsi S seu huic expressioni $t^8 - At^6 + Bt^4 - Ctt + D$; unde resultat haec aequatio

$$\begin{array}{lllll}
24t^8 + 4At^6 & -\frac{5}{2}A^2t^4 & -\frac{5}{8}A^3tt & +\frac{1}{64}A^4 \\
 & +10B & +\frac{5}{2}AB & -\frac{1}{8}A^2B \\
 & & -3C & +\frac{1}{4}B^2 \\
 & & & -D
\end{array}$$

$$+(12t^5 + 2At^3 - \tfrac{1}{2}A^2t + 2Bt)\sqrt{\left(4t^6 + (2B - \tfrac{1}{2}A^2)tt - \tfrac{1}{8}A^3 + \tfrac{1}{2}AB - C\right)} = 0,$$

quae ad rationalitatem reducta dabit

$$\begin{array}{llllll}
+3A^4t^8 & +\frac{5}{4}A^5t^6 & +\frac{3}{16}A^6t^4 & +\frac{3}{256}A^7tt & +\frac{1}{4096}A^8 & =0. \\
-12A^2B & -8A^3B & -\frac{27}{16}A^4B & -\frac{9}{64}A^5B & -\frac{1}{256}A^6B & \\
+24AC & +7A^2C & +\frac{7}{4}A^3C & +\frac{5}{32}A^4C & +\frac{3}{128}A^4B^2 & \\
-48D & +12AB^2 & +\frac{9}{2}A^2B^2 & +\frac{9}{16}A^3B^2 & -\frac{1}{32}A^4D & \\
 & -8AD & +5A^2D & +\frac{5}{4}A^3D & -\frac{1}{16}A^2B^3 & \\
 & -12BC & -7ABC & -\frac{5}{4}A^2BC & +\frac{1}{4}A^2BD & \\
 & & -3B^3 & -\frac{3}{4}AB^3 & +\frac{1}{16}B^4 & \\
 & & -20BD & -5ABD & -\frac{1}{2}B^2D & \\
 & & +9C^2 & +\frac{5}{2}B^2C & +D^2 & \\
 & & & +6CD & &
\end{array}$$

Ponatur brevitatis gratia $E = \frac{1}{4}A^2 - B$ et $u = 2t$; erit

$$\begin{array}{llllll}
+3A^2Eu^8 & +2A^3Eu^6 & +9A^2E^2u^4 & +12AE^3uu & +4E^4 & =0. \\
+6AC & +4A^2C & +28ACE & +80ADE & -32DE^2 & \\
-12D & +12AE^2 & +80DE & +96CD & +64D^2 & \\
 & -8AD & +36C^2 & +40CE^2 & & \\
 & +12CE & +12E^3 & & &
\end{array}$$

Haec ergo aequatio quatuor habet radices affirmativas totidemque negativas ipsis aequales, ita ut resolutio aequationis per aequationem biquadraticam perfici queat. Sunt autem A, B, C, D et E quantitates cognitae ex datis a, b, c, d determinatae; est nempe

$$A = a + b + c + d,$$

$$B = ab + ac + ad + bc + bd + cd,$$

$$C = abc + abd + acd + bcd,$$

$$D = abcd$$

itemque

$$E = \frac{1}{4}A^2 - B.$$

Invento autem quocumque valore pro u erunt quantitates quaesitae

$$v = \frac{u - \sqrt{(uu - 4a)}}{2},$$

$$x = \frac{u - \sqrt{(uu - 4b)}}{2},$$

$$y = \frac{u - \sqrt{(uu - 4c)}}{2},$$

$$z = \frac{u - \sqrt{(uu - 4d)}}{2}.$$

ALIA SOLUTIO

Problema etiam hoc modo solvi potest. Ex primis aequationibus est

$$a - b = (v - x)(y + z), \qquad b - c = (x - y)(v + z),$$

$$a - c = (v - y)(x + z), \qquad b - d = (x - z)(v + y),$$

$$a - d = (v - z)(x + y), \qquad c - d = (y - z)(v + x).$$

Ex aequationibus prima et ultima nanciscimur

$$v - x = \frac{a - b}{y + z}, \qquad v + x = \frac{c - d}{y - z}.$$

Sit

$$\frac{a+b-c-d}{2}=h;$$

erit

$$h=vx-yz$$

et facto

$$\frac{a+b+c+d}{2}=k$$

erit

$$k=vx+vy+vz+xy+xz+yz,$$

ergo

$$k-h=2yz+(v+x)(y+z)$$

seu

$$k-h=2yz+\frac{(c-d)(y+z)}{y-z}=c+d,$$

ergo

$$2yz=\frac{2dy-2cz}{y-z} \quad \text{seu} \quad yyz-yzz=dy-cz,$$

quae aequatio posito $yz=t$ abit in hanc

$$(d-t)y-(c-t)z=0.$$

Ponatur nunc

$$dy-cz=u$$

eritque

$$y=\frac{(c-t)u}{(c-d)t} \quad \text{et} \quad z=\frac{(d-t)u}{(c-d)t},$$

qui valores in $t=yz$ substituti praebent

$$t=\frac{(c-t)(d-t)uu}{(c-d)^2tt},$$

unde prodit

$$u=\frac{(c-d)t\sqrt{t}}{\sqrt{(cd-(c+d)t+tt)}},$$

quo substituto in valoribus pro y et z supra inventis habebimus

$$\text{I.} \quad y=\frac{(c-t)\sqrt{t}}{\sqrt{(cd-(c+d)t+tt}}$$

et

$$\text{II.} \quad z=\frac{(d-t)\sqrt{t}}{\sqrt{(cd-(c+d)t+tt)}}$$

ac addendo et subtrahendo

$$y + z = \frac{(c+d-2t)\sqrt{t}}{\sqrt{(cd-(c+d)t+tt)}} \quad \text{et} \quad y - z = \frac{(c-d)\sqrt{t}}{\sqrt{(cd-(c+d)t+tt)}}.$$

Hinc porro deducitur

$$v + x = \frac{\sqrt{(cd-(c+d)t+tt)}}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad v - x = \frac{(a-b)\sqrt{(cd-(c+d)t+tt)}}{(c+d-2t)\sqrt{t}},$$

unde denuo addendo et subtrahendo positisque brevitatis gratia

$$b + c + d - a = m \quad \text{et} \quad a + c + d - b = n$$

prodeunt sequentes valores pro v et x

$$\text{III.} \quad v = \frac{(n-2t)\sqrt{(cd-(c+d)t+tt)}}{2(c+d-2t)\sqrt{t}}$$

et

$$\text{IV.} \quad x = \frac{(m-2t)\sqrt{(cd-(c+d)t+tt)}}{2(c+d-2t)\sqrt{t}}.$$

Cum autem supra invenerimus $h = vx - yz$, hinc substitutis pro v, x, y, z eorum valoribus et facta evolutione prodit pro determinando valore ipsius t haec aequatio quatuor dimensionum

$$4t(h+t)(c+d-2t)^2 = (m-2t)(n-2t)(c-t)(d-t).$$

ANMERKUNG DER REDAKTION

Die vorstehende zweite Lösung stammt zwar dem Inhalte nach von EULER, der Darstellung nach aber von seinem Urenkel NICOLAUS FUSS. Das FUSSSCHE Manuskript ist dem EULERSCHEN, das in seinem zweiten Teile nichts weniger als druckfertig ist, beigefügt und befindet sich in dem Handschriftenmaterial, das die Petersburger Akademie der Eulerkommission zur Verfügung gestellt hat und das in Zürich aufbewahrt wird. Am Schlusse seiner Darstellung wendet sich NICOLAUS an seinen Bruder PAUL HEINRICH, den Mitherausgeber der *Opera postuma*, mit folgenden Worten:

„Hier hast Du die richtige Analyse für die zweite Auflösung des Satzes mit Weglassung alles dessen, was EULER in seinem Brouillon versuchsweise angefangen, nachher

davon abgekommen, hat unbeendigt stehen lassen und was also zum Druck ganz unnütz ist. Die fernere nöthige Mundirung zum Druck wirst Du besser machen als ich es kann; ich hoffe die Sache ist so weit klar auseinander gesetzt, daß man es verstehen kann, sollte Dir etwas besonderes auffallen, so sprechen wir noch darüber. Jedenfalls möchte ich wohl, nachdem Du es eingekleidet hast, es noch einmahl lesen.

N.“

Die Mundierung, die dann für den Druck der *Opera postuma* besorgt worden ist, weicht nur ganz unwesentlich von der Darstellung ab, die NICOLAUS FUSS gegeben hat.

F. R.

FRAGMENTUM
EX ADVERSARIIS MATHEMATICIS DEPROMPTUM[1]

Ex commentatione 819 indicis Enestroemiani
Opera postuma 1, 1862, p. 504—506

105
(Lexell)

CRITERIUM PRO DIGNOSCENDIS RADICIBUS RATIONALIBUS AEQUATIONUM CUBICARUM

Quum aequationis cubicae ternae radices ita[2]) exprimantur

$$\text{I.}\quad x = p + \sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{r},$$

$$\text{II.}\quad x = p + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{q} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{r},$$

$$\text{III.}\quad x = p + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{q} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{r},$$

1) In praefatione a Nicolao Fuss minore *Operibus postumis* praemissa legitur p. IV—V: „Praeter scripta postuma ab Eulero ipso elaborata et maximam partem ipsius manu exarata exstant volumina tria, quibus titulus est *Adversaria mathematica.* His adversariis administri et discipuli Euleri inferre solebant theses quasdam et sententias breves, quas quidem a magistro acceptas ipsi fusius et accuratius explicaverant. Ex his thesibus selectae sunt graviores, quae *Operibus postumis* suo loco insererentur, et primum quidem nonaginta dignae visae sunt, quae typis describerentur. Deinde clarissimus Tschebyscheff, perlustratis iterum dictis voluminibus, invenit alias sex theses, quas addendas esse censuit; has tomus prior exhibet sub Numero XXIII, p. 487—493. In hunc praeterea ex adversariis illatae sunt theses geometricae octo, theses analytici argumenti quatuor et duae ad calculum integralem spectantes; ita ut omnino tomo priori 110 theses ex adversariis depromptae contineantur.“ Tomus primus adversariorum, ex quo fragmentum 105 depromptum est, pertinet ab anno 1766 usque ad annum 1775. P. St.

2) Quae in editione principe inveniuntur radicum formae hic secundum notam 1 p. 58 exhibitae sunt. A. K.

hae tres formae rationales esse nequeunt, nisi $\sqrt[3]{q}$ et $\sqrt[3]{r}$ sequenti modo exhiberi liceat

$$\sqrt[3]{q} = s + t\sqrt{-3} \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{r} = s - t\sqrt{-3};$$

tum enim fiet

$$\text{I. } x = p + 2s, \qquad \text{II. } x = p - s - 3t, \qquad \text{III. } x = p - s + 3t;$$

tum autem ipsae litterae q et r similes formas habebunt, erit scilicet

$$q = u + v\sqrt{-3} \quad \text{et} \quad r = u - v\sqrt{-3}.$$

His praenotatis consideremus aequationem cubicam

$$x^3 = 3fx + 2g,$$

cuius radicem constat esse

$$x = \sqrt[3]{(g + \sqrt{(gg - f^3)})} + \sqrt[3]{(g - \sqrt{(gg - f^3)})}.$$

Ut ergo omnes tres radices sint rationales, ob $g \pm \sqrt{(gg - f^3)} = u \pm v\sqrt{-3}$ evidens est esse debere $\sqrt{(gg - f^3)} = v\sqrt{-3}$ ideoque

$$v = \sqrt{\frac{-gg + f^3}{3}} \quad \text{et} \quad f^3 - gg = 3vv \quad \text{sive} \quad \frac{f^3 - gg}{3} = \Box;$$

unde concludimus, quoties $\frac{f^3 - gg}{3}$ fuerit quadratum, etiam omnes tres radices fore rationales.

EXEMPLUM

Sint radices

$$\text{I. } x = 3, \quad \text{II. } x = 7 \quad \text{et} \quad \text{III. } x = -10,$$

unde aequatio resultat $x^3 - 79x + 210 = 0$ sive

$$x^3 = 79x - 210,$$

ubi $f = \frac{79}{3}$ et $g = -105$, hinc $f^3 = \frac{493039}{27}$ et $gg = 11025$, ergo $f^3 - gg = \frac{195364}{27}$, consequenter

$$\frac{f^3 - gg}{3} = \frac{195364}{81} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{f^3 - gg}{3}} = \frac{442}{9},$$

unde fit $v = \frac{442}{9}$ et $u = -105$.

Hoc idem autem in genere ita ostenditur. Sint ternae radices

$$x = a, \quad x = b, \quad x = -a - b,$$

ita ut aequatio sit

$$x^3 = (a^2 + ab + b^2)x - ab(a + b).$$

Hinc fit

$$f = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \quad \text{et} \quad g = \frac{-ab(a+b)}{2},$$

$$f^3 = \frac{a^6 + 3a^5b + 6a^4b^2 + 7a^3b^3 + 6a^2b^4 + 3ab^5 + b^6}{27} \quad \text{et} \quad gg = \frac{a^4b^2 + 2a^3b^3 + a^2b^4}{4},$$

ergo

$$\frac{f^3 - gg}{3} = \frac{4a^6 + 12a^5b - 3a^4b^2 - 26a^3b^3 - 3a^2b^4 + 12ab^5 + 4b^6}{81 \cdot 4};$$

hinc

$$\sqrt{\frac{f^3 - gg}{3}} = \frac{2a^3 + 3a^2b - 3ab^2 - 2b^3}{9 \cdot 2} = \left[\frac{(2a^2 + 5ab + 2b)^2(a-b)}{9 \cdot 2}\right]^{1)}$$

[vel]

$$\left[\sqrt{\frac{f^3 - gg}{3}} =\right] \frac{(a-b)(2a+b)(a+2b)}{18}$$

[et]

$$\left[\frac{f^3 - gg}{3} = \frac{(a-b)^2(2a+b)^2(a+2b)^2}{18^2}\right].$$

OBSERVATIO 1

Quum $f^3 - gg$ debeat esse triplum quadratum, scilicet $3vv$, sive $f^3 = gg + 3vv$, certum est[2]) hoc fieri non posse, nisi ipse numerus f iam habeat formam similem $mm + 3nn$, unde sequitur, si numerus f in suos factores primos resolvatur, unumquemque fore formae $6\alpha + 1$, cuiusmodi numeri primi sunt 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97; unde statim ac numerus f factores involverit vel 5 vel 11 vel 17 etc., certum est aequationis omnes radices non esse rationales.

---

1) Quae hic uncis includuntur in *Adversariis* quidem extant, in *Operibus* autem *postumis* desunt. F. R.

2) Vide L. EULERI Commentationem 272 (indicis ENESTROEMIANI): *Supplementum quorundam theorematum arithmeticorum, quae in nonnullis demonstrationibus supponuntur*, Novi comment. acad. sc. Petrop. 8 (1760/1), 1763, p. 105, imprimis § 29; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 2, p. 556. Vide etiam L. EULER, *Vollständige Anleitung zur Algebra*, St. Petersburg 1770, Zweyter Teil, Zweyter Abschnitt, § 187—197; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 1, p. 429—434. P. St.

OBSERVATIO 2

Sit igitur f numerus huius formae $\alpha\alpha + 3\beta\beta$, et quum sit

$$(\alpha\alpha + 3\beta\beta)(pp + 3qq) = (\alpha p \pm 3\beta q)^2 + 3(\alpha q \mp \beta p)^2,$$

erit

$$(\alpha\alpha + 3\beta\beta)^2 = (\alpha\alpha \pm 3\beta\beta)^2 + 3(\alpha\beta \mp \beta\alpha)^2 = (\alpha\alpha - 3\beta\beta)^2 + 3(2\alpha\beta)^2,$$

porro

$$(\alpha\alpha + 3\beta\beta)^3 = (\alpha^3 - 3\alpha\beta\beta \pm 6\alpha\beta\beta)^2 + 3(2\alpha\alpha\beta \mp \alpha\alpha\beta \pm 3\beta^3)^2$$

ideoque vel

$$(\alpha\alpha + 3\beta\beta)^3 = (\alpha^3 + 3\alpha\beta\beta)^2 + 3(\alpha\alpha\beta + 3\beta^3)^2$$

vel

$$(\alpha\alpha + 3\beta\beta)^3 = (\alpha^3 - 9\alpha\beta\beta)^2 + 3(3\alpha\alpha\beta - 3\beta^3)^2.$$

Hinc, quum sit $f^3 = gg + 3vv$, erit

$$g = \pm(\alpha^3 - 9\alpha\beta\beta) \quad \text{et} \quad v = \pm(3\alpha\alpha\beta - 3\beta^3);$$

quare si in aequatione

$$x^3 = 3fx + 2g$$

fuerit

$$f = \alpha\alpha + 3\beta\beta \quad \text{atque insuper} \quad g = \pm(\alpha^3 - 9\alpha\beta\beta),$$

tum omnes tres radices erunt rationales, et nisi simul fuerit $f = \alpha\alpha + 3\beta\beta$ atque $g = \pm(\alpha^3 - 9\alpha\beta\beta)$, omnes tres radices rationales esse non possunt.

OBSERVATIO 3

Sin autem f et g tales habuerint formas, ut sit

$$x^3 = 3(\alpha\alpha + 3\beta\beta)x + 2\alpha(\alpha\alpha - 9\beta\beta),$$

radices certe erunt rationales, quippe quae erunt

$$x = 2\alpha, \quad x = -\alpha + 3\beta \quad \text{et} \quad x = -\alpha - 3\beta.$$

Hinc igitur veritas nostri criterii ita est stabilita, ut non solum praesentia criterii tres radices rationales indicet, sed etiam rationalitas radicum ipsum hoc criterium involvat.

OBSERVATIO 4

Videamus autem quoque, quomodo hoc criterium ad formam generalem aequationum cubicarum applicari debeat. Proposita igitur sit forma generalis

$$z^3 + Pz^2 + Qz + R = 0;$$

primo ergo ad formam praecedentem revocetur ponendo $z = x - \frac{1}{3}P$ et aequatio resultans erit

$$x^3 + \left(Q - \frac{1}{3}P^2\right)x + \frac{2}{27}P^3 - \frac{1}{3}PQ + R = 0$$

sive

$$x^3 = \left(\frac{1}{3}P^2 - Q\right)x - \frac{2}{27}P^3 + \frac{1}{3}PQ - R,$$

unde pro criterio nostro habebimus

$$f = \frac{1}{9}P^2 - \frac{1}{3}Q \quad \text{et} \quad g = -\frac{1}{27}P^3 + \frac{1}{6}PQ - \frac{1}{2}R,$$

unde fit

$$\left[f^3 = \frac{1}{729}P^6 - \frac{1}{81}P^4Q + \frac{1}{27}PPQQ - \frac{1}{27}Q^3,\right]^{1)}$$

$$\left[-g^2 = -\frac{1}{729}P^6 + \frac{1}{81}P^4Q - \frac{1}{36}PPQQ - \frac{1}{27}P^3R + \frac{1}{6}PQR - \frac{1}{4}R^2,\right]$$

$$\frac{f^3 - gg}{3} = \frac{1}{9\cdot 36}PPQQ - \frac{1}{81}Q^3 - \frac{1}{81}P^3R + \frac{1}{18}PQR - \frac{1}{12}RR;$$

ergo per 324 multiplicando criterium nostrum postulat, ut sit quadratum sequens forma

$$PPQQ - 4Q^3 - 4P^3R + 18PQR - 27RR = \square.$$

Adversaria mathematica, t. I, p. 109—110.

CONTINUATIO

Sit cubica aequatio

$$x^3 = fx + g$$

omnes radices habens rationales, quae sint α, β, γ; quia earum summa $= 0$,

1) Vide notam 1 p. 506. F. R.

erit $\gamma = -\alpha - \beta$. Iam sint α, β radices huius aequationis

$$zz - pz + q = 0,$$

ubi propterea erit $pp - 4q$ quadratum. Haec ergo per $z + p$, hoc est $z + \alpha + \beta$, multiplicata ipsam propositam producere debet, quae ergo fit

$$z^3 + (q - pp)z + pq = 0 \quad \text{sive} \quad z^3 = (pp - q)z - pq;$$

quocirca erit

$$f = pp - q \quad \text{et} \quad g = -pq.$$

Quum igitur sit $pp - 4q = \square$, quaeritur, quomodo eadem haec conditio per f et g exprimatur, quae est quaestio peculiaris naturae. Multiplicetur $pp - 4q$ per quadratum[1] $p^4 + 2\alpha' ppq + \alpha'\alpha' qq$, ita ut etiam productum

$$p^6 + (2\alpha' - 4)p^4 q + (\alpha'\alpha' - 8\alpha')ppqq - 4\alpha'\alpha' q^3$$

$= \square$ esse debeat; manifestum autem est similem formam nasci ex formula $f^3 + \beta' gg$; prodit enim

$$p^6 - 3p^4 q + (3 + \beta')ppqq - q^3 = \square;$$

pro identitate igitur litterae α', β' sequenti modo definiuntur

$$\alpha' = \frac{1}{2}, \quad \beta' = \frac{-27}{4},$$

qui valores etiam postrema membra identica reddunt. Ex quo pro rationalitate trium radicum hoc criterium requiritur, ut sit

$$f^3 - \frac{27}{4} gg = \square.$$

De hoc autem criterio duo sunt notanda: 1. $f^3 - \frac{27}{4} gg$ debet esse quadratum integrum; 2. huiusmodi aequationes $v^3 = 4fv + 8g$ ad formam simpliciorem ponendo $v = 2x$ debent reduci $x^3 = fx + g$.

Adversaria mathematica, t. I, p. 113, 115.

1) In editione principe loco litterarum hic sequentium α' et β' litterae α et β usurpatae sunt, quibus autem litteris radices aequationis cubicae designatae erant. Correxit A. K.